

¿Cómo se podría enseñar la factorización de polinomios integrando calculadoras simbólicas y lápiz/papel?

*María Fernanda Mejía Palomino**

RESUMEN

En las prácticas de enseñanza es común factorizar polinomios usando un conjunto de reglas para manipular expresiones algebraicas con lápiz/papel. Esto lleva a encasillar a la factorización a una sola representación matemática, la algebraica, y a un proceso matemático, la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. Por lo que el tiempo de trabajo requerido por un estudiante para expresar un polinomio en su forma factorizada con lápiz/papel no

sea corto. Lo anterior puede incidir en las escasas conexiones que se dan entre la factorización y otros conceptos. Sin embargo, la integración de calculadoras simbólicas podría dar paso a mirar cómo lograr otras situaciones de enseñanza que fortalezcan las conexiones de la factorización con otros conceptos, como los ceros de un polinomio.

Palabras clave: factorización de polinomios, técnicas, calculadoras simbólicas.

* Escuela Normal Superior Farallones de Cali. Universidad del Valle. Dirección electrónica: mafanda1216@gmail.com.

CONTEXTUALIZACIÓN

A mediados del año 2000 el Ministerio de Educación Nacional donó a varias instituciones educativas públicas del país un equipo de calculadoras simbólicas y otros artefactos, con el objetivo de mejorar la calidad en la educación en Colombia al incorporar Tecnologías de la Comunicación e Información (TIC). Por esta época varios profesores en ejercicio y en formación aprendieron sobre el uso de estas calculadoras para la enseñanza de las matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2004).

Por lo anterior, la autora de este trabajo se ha interesado en construir algunas situaciones de enseñanza para la factorización de polinomios con las calculadoras simbólicas (particularmente con el uso del sistema de álgebra computacional (en adelante CAS)) y lápiz/papel (L/P), para ser aplicadas en la institución educativa en la que labora (Mejía, 2004; Mejía, 2011).

Por otra parte, este trabajo toma algunos referentes de la ingeniería didáctica. Esta metodología la define Douady (1995) como el conjunto de secuencias de clase, diseñadas, organizadas y articuladas por el profesor "ingeniero", para lograr que sus estudiantes aprendan.

La ingeniería didáctica se caracteriza porque sus productos son construidos a partir de un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. A diferencia de otras metodologías basadas en la experimentación, en esta se recurre al registro de estudios de caso y su validación es, en esencia, interna, basada en la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995).

La experimentación se realizó con 36 estudiantes de un curso de grado noveno, se destinaron tres semanas, 15 horas de clase, se inició el 30 de junio de 2009 y se finalizó el 15 de julio de 2009.

REFERENTES TEÓRICOS

En este apartado se van a presentar dos aspectos centrales en relación con la integración de calculadoras simbólicas, los fenómenos didácticos en ambientes de álgebra computacional y la génesis instrumental.

– *Fenómenos didácticos en ambientes de álgebra computacional.*

La introducción de los ambientes informáticos conduce al estudio de las restricciones y fenómenos didácticos ligados a los saberes matemáticos (trans-

posición computacional). Estas restricciones tienen dos niveles: la representación y tratamiento interno de los saberes en la máquina y la representación y tratamiento en la interfaz. Este trabajo analítico de identificación de las restricciones es fundamental para comprender las funcionalidades del saber puesto en juego en el software (Artigue, 1997), y por otra parte, el conocimiento y prevención de los fenómenos didácticos puede generar situaciones que promuevan las actividades transformacionales como las presentadas por Mounier y Aldon (1996; citado por Lagrange, 2000).

Algunos fenómenos didácticos desde un CAS han sido identificados por Artigue (1997) y por Trouche (2005) como:

- El fenómeno de pseudotransparencia que es el conflicto que se genera entre lo que se ingresa y lo que se ve en la interfaz del software. Son los cambios que ocurren en las maneras de representar los objetos (desde lo interno y la interfaz). Contrariamente a lo que podría pensar, estos desfases perturban más el funcionamiento didáctico que lo que parece.
- El fenómeno de doble referencia: se relaciona con la doble interpretación de un problema, dependiendo del ambiente de trabajo, por ejemplo, el tratamiento en lápiz/papel y un CAS de las actividades de factorización de los polinomios propuestas por Mounier y Aldon (1996; citado por Lagrange, 2000) muestran resultados diferentes que conllevan a la confrontación de las técnicas usadas en cada ambiente.

Los fenómenos didácticos generalmente han surgido en experimentos de bastante tiempo, donde los estudiantes tienen calculadoras a su disposición (tanto en la escuela como en casa). Este parámetro es importante, porque los estudiantes se apropian del manejo de la calculadora y logran obtener un dominio de las técnicas que requieren para realizar las tareas (Trouche, 2005).

En cuanto a la integración de CAS es imposible eludir los fenómenos didácticos que se ligan a los procesos mencionados. Sin embargo, es necesario que el docente los conozca y determine las condiciones favorables para volverlos productivos.

– *La génesis instrumental*

La génesis instrumental es un proceso de construcción de un instrumento por un sujeto, que va desde la utilización de un artefacto a la construcción de esquemas para realizar un tipo de tarea. Un artefacto puede ser material

o abstracto, ayuda o sustenta toda actividad humana al hacer un tipo de tarea (las calculadoras o un algoritmo para hallar la solución de una ecuación cuadrática son artefactos), mientras que el instrumento es lo que el sujeto construye desde el artefacto (Trouche, 2005).

Es necesario aclarar que los instrumentos no le están dados al sujeto desde un primer momento; este los elabora a través de actividades de génesis instrumental, en el proceso de instrumentalización y de instrumentación. El proceso de instrumentalización está dirigido hacia el artefacto como: selección, agrupación, descubrimiento, producción e institución de funciones, usos desviados, atribución de propiedades, personalización, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento.

El proceso de instrumentación está relacionado con el sujeto, en donde se da la emergencia y la evolución de los esquemas de utilización: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación, y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos (Rabardel, s. f.).

Logros y dificultades evidenciadas

Algunas dificultades surgieron en los diseños de las situaciones didácticas porque se dejaron de considerar algunos aspectos a priori que solo en la práctica se evidenciaron. Algunos relacionados con la estructura de las preguntas, el tipo de variables, los conocimientos previos, entre otros. Esto determina que los diseños se nutren cada vez que se confrontan con la práctica.

Por ejemplo, en todas las preguntas los estudiantes hacen uso de la lengua natural. Si bien, los estudiantes se arriesgan a hablar y escribir de las matemáticas, esta tarea no es fácil, porque necesitan de una lengua natural especializada.

A diferencia de otras investigaciones, en el desarrollo de las tareas se necesita que los estudiantes previamente hayan trabajado las técnicas L/P porque el propósito es usarlas para entender o poder usar las técnicas CAS que son nuevas para ellos. No se descarta que en el uso de ambas, se dé mutuamente una mejoría, en algunos episodios se observa cómo los estudiantes rectifican sus resultados en L/P al ver los resultados de aplicar una técnica CAS. De alguna manera la complementariedad de ambas técnicas lleva al surgimiento de una explicación teórica que da cuenta, en parte, de qué es lo que hace esta técnica y para qué sirve, esto propende al mejoramiento del uso de las técnicas (ver tabla 1).

Tabla 1. Diálogo: 30 de junio de 2009 en t1: [13: 33 a 13:42 min.] y t2: [0:00 a 3:00 min.] en relación a la situación 1.

<p>Tarea. La expresión dada es $2x(x-1) + (3x(1-x))$, pero al ingresarla en la calculadora y dar [ENTER] de la aplicación Home de la Calculadora se obtiene $-x(x-1)$, ¿qué fue lo que realizó la calculadora?</p>
<p>Juan: la séptima tampoco sé.</p> <p>Olga: parece que se hubieran reunido términos semejantes</p> <p>Juan: parece que 3 o 2 hubiesen sido negativos, y que $3x$ y $2x$ nos quedará menos una x.</p> <p>Juan: ahora no sé, parece que la calculadora lo hizo mal (no dudan de sus procedimientos L/P si no de los resultados de la calculadora). Si multiplico los paréntesis y luego los sumo, multiplico esto por esto (señala en la calculadora los términos que se multiplican). Esto da $3x-2x$. Espérate un segundo (escribe el procedimiento en su hoja de respuestas, realiza los productos indicados). Esto más esto da $-6x$ y esto más esto da $-6x$, entonces da cero (parece que realizó de manera incorrecta el producto porque todos los términos son lineales).</p> <p>María: menos de dónde sale.</p> <p>Juan: sabes qué, espérate. Tal vez multiplicó solamente uno. Puedo haber hecho esto. Multiplicó esto por esto. Ya sé, multiplicó un solo paréntesis, se reúne aquí y queda $(x-1)$ por $2x$ más $3x$ porque $-4x$ y da $2x$ negativo (borra lo que escribió $2x + 3x$) luego escribe $(x-1)(3x-2x)$ y esto aquí da menos uno, digo da uno. Algo da negativo por ahí, una mayor tiene que dar negativo, para que dé menos x. No sé el proceso.</p>
<p>Análisis:</p> <p>Juan ha escrito en su hoja de respuesta el siguiente procedimiento para mirar qué es lo que ha hecho la calculadora y escribir la explicación en la columna C de la tabla de la situación 1.</p> $2x(x-1) + (3x(1-x))$ $2x(x-1) + 3x-4x$ $(x-1)3x-2x$ <p>En un inicio del diálogo, Juan efectúa los dos productos y esto lo habría llevado a la siguiente expresión $2x^2 - 2x + 3x - 3x^2 = -x^2 + x$ y al tomar la expresión reducida y al sacar como factor común habían obtenido la respuesta dada por la calculadora. Pero el argumento se desvía porque han efectuado incorrectamente los productos, al realizar la multiplicación de $(3x(1-x))$ obtienen $3x-4x$, esto nos indica que efectuaron una suma entre $3x$ y x, y no una multiplicación. También reducen $2x$ con $-4x$ y deberían multiplicar $2x$ con $(x-1)$.</p> <p>Al revisarse su hoja de respuesta la justificación que dan es la siguiente: "se <i>invertieron los signos en el segundo paréntesis y se unió términos semejantes</i>". Parece que al final lograron encontrar el procedimiento solicitado porque la descripción se relaciona con la aplicación de una técnica de factorización (factor común por agrupación de términos). Sin embargo, no se muestra el procedimiento de factorización en las pregunta 1.2.b. o 1.2.e.</p>

En cuanto a las técnicas L/P, las de mayor dificultad son las relacionadas con la factorización de polinomios, y la ejecución de una regla vinculada a la forma de la expresión algebraica; muchos estudiantes no distinguían qué técnica seleccionar y cómo usarla, mientras que para realizar los gráficos

en L/P no tuvieron inconvenientes en determinar algunas variables visuales que facilitaban hacer un dibujo semejante al obtenido en la calculadora simbólica.

REFLEXIÓN FINAL

Finalmente, estas experiencias han permitido refutar algunas afirmaciones que niegan la posibilidad de trabajo complementario de las calculadoras simbólicas y Lápiz/Papel, los vínculos conceptuales de la factorización de polinomios con otros conceptos y la importancia del trabajo técnico para el desarrollo de la conceptualización. Se hace la invitación, para que los profesores en ejercicio y con acceso con las calculadoras simbólicas hagan uso del sistema de álgebra computacional (CAS) y generen nuevas situaciones de aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (1997). Le logiciel «Derive» comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (2), pp. 133-169.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución y su relación con el conocimiento. En: M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 61-96). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Mejía, M. (2004). *Análisis didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas*. (Tesis de pregrado no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Mejía, M. (2011). *La factorización de polinomios de una variable real en un ambiente de Lápiz/Papel (L/P) y Álgebra Computacional (CAS)*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Tecnología informática: innovación en el currículo de matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media*. Bogotá, Colombia: Enlace Editores.
- Lagrange, J-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43 (1), pp. 1-30.

- Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (ed.), *The didactical Challenge of symbolic Calculator* (pp. 137- 162). New York, E.U.A: Springer.
- Rabardel, P. (s.f). Los hombres y las tecnologías II. *Perspectiva cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (M. Aslanides, Trad.) (Trabajo original publicado en 1995).