Solución de modelos matemáticos, utilizando el software derive en aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden

Jhon Franklin Espinosa Castro[1]

Resumen

Con el continuo avance de las ciencias exactas, a través de la tecnología en diferentes contextos reales, se han utilizado modelos matemáticos representados por ecuaciones diferenciales que describen el fenómeno que se quiere analizar, y la solución ha permitido dar respuestas satisfactorias en el estudio y manipulación de variables. Por tal razón, se realizó el siguiente artículo, en el cual se explican diversas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden en biología, química, física y economía por medio del software matemático Derive, empleando dos tipos de metodología: aplicativa y explicativa.

Entre los temas tratados hay dos grupos; en el primero se encuentran: temperatura de un objeto al salir de un horno, crecimiento de una colonia bacteriana, carga e intensidad de corriente de un circuito RC, concentración de sal en un tanque con salmuera y saldo de una cuenta bancaria con interés continuo, los cuales se determinan con respecto al paso del tiempo; y en el segundo están: el ácido valproic en el cuerpo, contaminación del lago Michigan y datación de un fósil con carbono 14, en los cuales se halló un tiempo de acuerdo a los datos suministrados; debido a lo anterior, solo los ejercicios del primer grupo tienen gráficas, y son exponenciales. Por ultimo, se determinó que todos los ejercicios realizados tenían en común la intervención del tiempo. Además, se utilizó una constante adimensional dependiendo de la aplicación.

Palabras claves: *Modelo matemático, ecuación diferencial de primer orden, Derive.*

Abstract

With the continuous advance of the exact sciences, using technology in real contexts should use mathematical models represented by differential equations that describe the phenomenon that want to analyze, and the solution of this model can give satisfactory answers in the study and manipulation of variables. For this reason, the following article was performed, which explains the various applications of first order differential equations in biology, chemistry, physics and economics through mathematical software, using two types of methodology: applicative and explanatory .

Among the topics discussed there are two groups: in the first are: temperature of an object when goes out of an oven, a bacterial colony growth, charge and current of an

[1]Maestrante Universidad Nacional Experimental del Táchira – UNET. E-mail: jhon.espinosa@unet.edu.ve

RC circuit, concentration of salt in a brine tank and balance of a bank account with continuing interest, which are determined respect to time; and in the second are: valproic acid in the body, pollution of Lake Michigan and dating of a fossil with carbon-14, which found a time according to the data provided; due to the above, only the first group exercises have graphics, and are exponential. Finally, it was determined that all had in common exercises intervention time. Further, a dimensionless constant is used depending on the application

Keywords: *Mathematical model, first-order differential equation, Derive.*

Introducción

A medida que el mundo va evolucionando la ciencia también lo hace de manera rápida y progresiva, generando nuevas técnicas y tecnologías que van facilitando la comprensión de cada una de las incógnitas que se presentan en los diferentes campos de acción, una de las maneras de cuantificar y analizar cada uno de los sucesos es mediante el empleo de la matemática, ciencia exacta que por lo general presenta un alto grado de complejidad. Con el fin de simplificar estos procedimientos se ha utilizado el software matemático Derive siendo este un manipulador algebraico que realiza cálculos numéricos optimizando tiempo en el proceso analítico y gráfico.

Este software es un potente programa para el cálculo matemático avanzado [5], y no resulta complicado su manejo, por la gran cantidad de herramientas que ofrece y el uso de la sintaxis en la introducción de datos. Así mismo, el software es de licencia privada, pero no presenta ningún inconveniente utilizarlo en este artículo, ya que se esta empleando una versión demo para fines educativos y no comerciales.

Debido a la gran utilidad que se le puede dar a este tipo de herramienta, se ha empleado para la evaluación de diversos eventos en la naturaleza que se han tabulado y analizado de manera manual, dando la posibilidad de obtener resultados con un alto grado de exactitud en menor tiempo.

En este artículo, se presenta la aplicación de este software en el estudio de las áreas de la biología, química, física y economía, permitiendo establecer ecuaciones diferenciales que contienen las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes; tomando en cuenta la clasificación de las ecuaciones diferenciales se hace necesario esclarecer que en este articulo se trabaja con las ecuaciones diferenciales de primer orden, que al ser establecidas en el programa, éste procede a darles solución con el método de separación de variables, el cual da la posibilidad de determinar los valores de las incógnitas a analizar y por lo tanto tabular los resultados con el fin de llevar a cabo un proceso analítico a partir del estudio de los gráficos obtenidos.

Materiales y Métodos

Con la finalidad de optimizar tiempo y procesos, se empleo como herramienta computacional el software matemático Derive. En este aspecto, se utilizaron dos tipos de metodología: aplicativa y explicativa, la primera, enfocándose en el empleo del programa como un mecanismo tecnológico, y la segunda, especificando la sintaxis de la función $p(x)$, $q(y)$ respectivamente, la asignación de las variables y la condiciones iniciales dadas, que se deben utilizar en la solución de los modelos matemáticos que definen la aplicación. Los ejercicios propuestos fueron extraídos de los siguientes libros: Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado [1], Ecuaciones diferenciales [2] y Cálculo aplicado [3].

Resultados y Discusión

A continuación, se establecen los enunciados de las aplicaciones analizadas, teniendo en cuenta la siguiente sintaxis generalizada que se debe digitar en el programa para cada ejercicio. Es decir, separable (p, q, x, y, x_0, y_0) que proporciona la solución del problema de valor inicial, donde se asume y' = p(x).q(y) para $y(x_0) = y_0$. Además, para cada aplicación la variable dependientes e independiente hacen referencia a x e y.

Para contextualizar el desarrollo de los siguientes ejercicios, se deben tener en cuenta los siguientes términos de acuerdo a cada aplicación:

- Circuito RC: Intensidad de corriente, capacidad, resistencia y fuerza electromotriz.
- Demografía: Constante de proporcionalidad y población inicial.
- Temperatura: Temperatura ambiente y constante de proporcionalidad (teniendo en cuenta el signo "-" por ser una aplicación de enfriamiento).
- Mezclas químicas: Salmuera, concentración inicial de sal, flujo entrante y flujo saliente.
- Economía: Tasa de interés continuo para un capital presente.
- Contaminación: Concentración inicial de contaminante, volumen y flujo de salida.
- Datación (C^{14}): Vida media del C^{14} y constante de decaimiento.
- Medicamentos: Vida media del medicamento, cantidad inicial del medicamento.

Problema 1. Al sacar un pastel de un horno, su temperatura es de 300°F, en un tiempo t = 0. A una temperatura ambiente de 70°F. Luego de tres minutos, su temperatura es de 200°F.

Hallar, a. ¿La ecuación que determina la temperatura en cualquier instante de tiempo t? y b. ¿La respectiva tabla y gráfica?

Modelo: dT/dt = k (T - 70); Asignación de variables: x = t = 0; y = T = 300.

#1: SEPARABLE(1, yk - 70k, x, y, 0, 300)
#2: SOLVE(SEPARABLE(1, yk-70k, x, y, 0, 300), y, Real)
#3: $y = 230e^{kx} + 70$

Utilizando la condición, x = 3, y = 200.

#4: $200 = 230e^{3k}+70$
#5: SOLVE($200 = 230e^{3k}+70$), k, Real)
#6: k = - 0.1901816194

Por lo tanto, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial, que determina la temperatura en cualquier instante de tiempo t es:

#7: $y = 230e^{-0,190181x}+70$

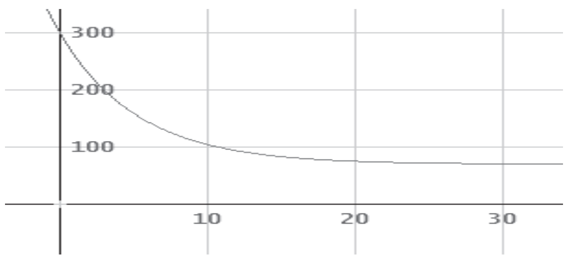
Para realizar la respetiva tabla, se tiene en cuenta la siguiente sintaxis.

#8: TABLE($y = 230e^{-0,190181x}+70$, x, 0, 50, 10)

Tabla 1. Temperatura

x	y
0	300
10	104.3385733
20	75.12668529
30	70.7654046
40	70.11427348
50	70.01706081

Como se observa en la tabla 1. A medida que aumenta el tiempo, la temperatura que proporciona el pastel se aproxima a la temperatura ambiente de 70°F, por enfriamiento.



Gráfica 1. Temperatura

Como se observa en la gráfica 1. Se establece un decrecimiento exponencial para la temperatura del pastel, y se aproxima a un valor constante de **70°F.**

1. Se realizara un respectivo análisis de una colonia de bacterias, que crecen en cultivo a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Inicialmente hay 300 colonias de bacterias en el cultivo y en un tiempo de 2 horas el número ha crecido un 20%.

Hallar, a. ¿La ecuación que determina la población en cualquier instante de tiempo t? y b. ¿La respectiva tabla y gráfica?

Modelo: dP/dt = kP; Asignación de variables: x = t = 0; y = p = 300.

#1: SEPARABLE(1, yk, x, y, 0, 300)
#2: SOLVE(SEPARABLE(1, yk, x, y, 0, 300), y, Real)
#3: $y = 300e^{kx}$

Utilizando la condición, x = 2, y = 360.

#4: $360 = 300e^{2k}$
#5: SOLVE($360=300e^{2k}$), k, Real)
#6: k = 0.09116077839

Por lo tanto, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial, que determina la población en cualquier instante de tiempo t es:

#7: $y = 360e^{0.09116077839x}$

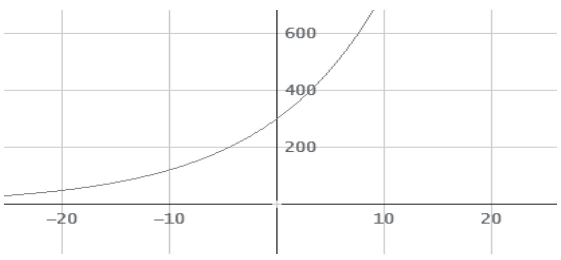
Para realizar la respetiva tabla, se tiene en cuenta la siguiente sintaxis.

TABLE($y = 360e^{0.09116077839x}$, x, 0, 5, 1)

Tabla 2. Demografía de Bacterias

x	y
0	300
1	328.6335345
2	360
3	394.3602413
4	432
5	473.23222896

Como se observa en la tabla 2. La colonia de bacterias aumenta la cantidad inicial, con respecto al tiempo.



Gráfica 2. Demografía De Bacterias

Como se observa en la gráfica 2. Se establece un crecimiento exponencial de la colonia.

Problema 2. Se aplica una fuerza electromotriz de 100V en circuito en serie RC, donde el valor de la resistencia es 200Ω y una capacitancia de 0,0001F. Hallar, la función que establece carga y la intensidad de la corriente para .

Modelo: dq/dt = 0.5-50q; Asignación de variables: x = t = 0: y = q = 0.

#1: SEPARABLE (1, 0.5-50y, x, y, 0, 0)

#2: SOLVE (SEPARABLE (1, 0.5-50y, x, y, 0, 0), y, Real)

Por lo tanto, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial que determina la carga en cualquier instante de tiempo t es:

#3: $y = \frac{1}{100} - \frac{e^{-50x}}{100}$.

Ahora, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial, que determina la intensidad de la corriente en cualquier instante de tiempo t. Se debe realizar la derivada de la función de la carga.

#4: $\frac{1}{100} - \frac{e^{-50x}}{100}$

#5: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{100} - \frac{e^{-50x}}{100}\right)$

#6: $\frac{e^{-50x}}{2}$

Luego, y = y'

#7: $y = \frac{e^{-50x}}{2}$

Para realizar la respetiva tabla, se tiene en cuenta la siguiente sintaxis.

#8: TABLE$\left(y = \frac{1}{100} - \frac{e^{-50x}}{100}, x, 0, 0.5, 0.1\right)$

Tabla 3. Circuito RC, Valores de Carga

x	y
0.0	0
0.1	0.00993262053
0.2	0.009999546
03	0.00999999694
0.4	0.01
0.5	0.01

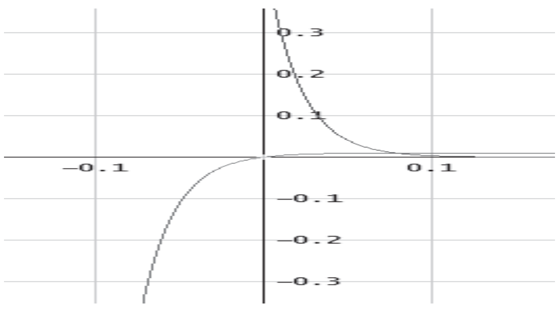
Como se observa en la tabla 3. A medida que aumenta el tiempo, el valor de la carga se aproxima al valor 0.01, con una variación mínima en los decimales para t ≥ 4, el valor es casi constante.

#9: TABLE $\left(y = \frac{e^{-50x}}{2}, x, 0, 0.5, 0.1\right)$

Tabla 4. Circuito RC, Valores de Intensidad de la Corriente

x	y
0.0	0.5
0.1	0.003
0.2	2.269 x 10^{-5}
0.3	1.529 x 10^{-7}
0.4	1.030 x 10^{-9}
0.5	6.943 x 10^{-12}

Como se observa en la tabla 4. A medida que aumenta el tiempo, el valor de la intensidad de la corriente se aproxima al valor 0 con una variación mínima en los decimales. Es decir, el valor es casi constante.



Gráfica 3. Gráfica Circuito RC

Como se observa en la gráfica 3. Se establece un crecimiento en q(t) y decrecimiento en i(t) exponencial para t ≥ 0.

Problema 3. Un tanque mezclador contiene 300 galones de salmuera (sal disuelta en agua). Otra solución se bombea al tanque a razón de 3 galones por minuto, la concentración de sal en este efluente es de 2 libras por galón. La solución bien agitada se desaloja a la misma razón. Si a $A(t)$, denota la cantidad de sal medida en libras en el tanque en un tiempo. Encuentre. ¿La cantidad de sal en el tanque en cualquier instante de tiempo t? Si había 50 libras de sal disueltas en los 300 galones iniciales.

Modelo: dA/dt = 6 - A/100; Asignación de variables: x = t = 0; y = A = 50.

#1: SEPARABLE $\left(1, 6-\frac{y}{100}, x, y, 0, 50\right)$
#2:SOLVE
$\left(\text{SEPARABLE } \left(1, 6-\frac{y}{100}, x, y, 0, 50\right), y, \text{Real}\right)$

Por lo tanto, la solución particular o específica, de la ecuación diferencial, que determina la cantidad de sal en cualquier instante de tiempo t es:

#3: $y = 600–550e^{-0.01x}$

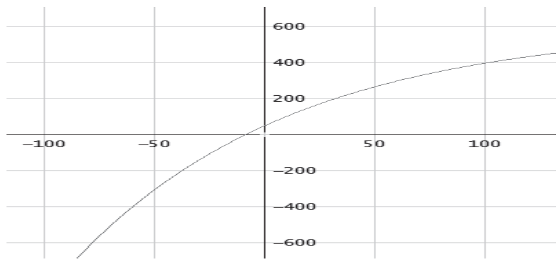
Para realizar la respetiva tabla, se tiene en cuenta la siguiente sintaxis.

#4: TABLE ($y = 600\text{-}550e^{-0.01x}$, x, 0, 5, 1)

Tabla 5. Mezclas Químicas.

x	y
0	50
1	55.47259143
2	60.89072968
3	66.25495654
4	71.56580846
5	76.82381652

Como se observa en la tabla 5. Se establece un crecimiento en la salmuera.



Gráfica 4. Mezclas Químicas

Como se observa en la gráfica 4. Se establece un crecimiento exponencial en la mezcla química de salmuera para t ≥ 0.

Problema 4. Una cuenta bancaria gana interés continuamente a razón de 5% del saldo corriente por año. Suponga que el depósito inicial es de $1000 y que no hacen otros depósitos ni retiros. Hallar a. ¿La ecuación que determina la el saldo de la cuenta en cualquier instante de tiempo t?

Modelo: ds/dt = 0.05s; Asignación de variables: x = t = 0; y = s = 1000.

#1: SEPARABLE (1, 0.05y, x, y, 0, 1000)

#2: SOLVE (SEPARABLE (1, 0.05y, x, y, 0, 1000), y, Real)

Por lo tanto, la solución particular o específica de la ecuación diferencial. Que determina el saldo de la cuenta en cualquier instante de tiempo t es:

#3: $y = 1000\ e^{0.05\ x}$

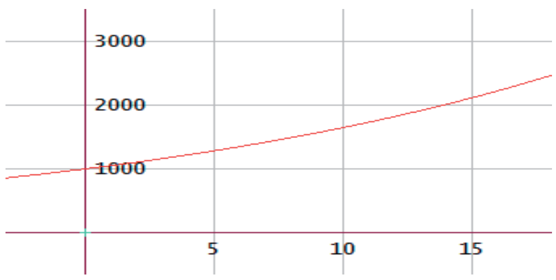
Para realizar la respetiva tabla, se tiene en cuenta la siguiente sintaxis.

#4: TABLE ($y = 1000\ e^{0.05\ x}$, x, 0, 5, 1)

Tabla 6. Interés Continúo

x	y
0	1000
1	1051.271096
2	1051.271096
3	1161.834242
4	1221.402758
5	1284.025416

Como se observa en la tabla 6. Se establece un crecimiento en el saldo del capital para una tasa de interés que se efectúa continuamente.



Gráfica 5. Interés Continúo.

Como se observa en la gráfica 5. Se establece un crecimiento exponencial en el saldo del capital debido al interés continuo, para $t \geq 0$.

Problema 5. El ácido valproic es un medicamento que se emplea para controlar la epilepsia; su vida media en el cuerpo humano es de unas 15 horas. Hallar ¿A qué hora quedará 10% de la dosis original?

Modelo: dQ/dt = - KQ; Asignación de variables: x = t = 0; y = Q = q. Donde q representa cantidad inicial del medicamento.

#1: SEPARABLE (1, -yk, x, y, 0, q)

#2: SOLVE (SEPARABLE (1, -yk, x, y, 0, q), y, Real)

#3: $y = qe^{-k\ x}$

Como la vida media es de 15 horas, sabemos que la cantidad restante Q = 0.5q cuando

t = 15 horas.

#4: $0.5q = qe^{-15k}$

#5: SOLVE ($0.5q = qe^{-15k}$, k, Real)

#6: k = 0.04620981203

Remplazando en #3

#7: $y = qe^{-0.04620981203\ x}$

Utilizando la condición, y = 0.10q. Es decir, 10% de la dosis original.

#8: $0.1q = qe^{-0.04620981203\ x}$

#9: SOLVE ($0.1q = qe^{-0.04620981203x}$, x, Real)

#10: x = 49.82892142

Aproximadamente, en un tiempo de 50 horas.

Problema 6. ¿Cuánto tiempo tardara para que el 90% de la contaminación sea eliminada del lago Michigan? Suponiendo que no se viertan más contaminantes.

Modelo: dQ/dt = -rQ/v; Asignación de variables: x = t = 0; y = Q = q. Donde q representa cantidad inicial de contaminación r/v =0.03224489796

#1: SEPARABLE $\left(1, -\frac{r\,y}{v}, x, y, 0, q\right)$

#2: SOLVE $\left(\text{SEPARABLE}\left(1, -\frac{r\,y}{v}, x, y, 0, q\right), y, \text{real}\right)$

#3: $y = qe^{-\frac{r.\ x}{v}}$

Remplazando el valor de r/v= 0.0322 en #3

#4: $y = qe^{-0.0322\ x}$

Cuando el 90% de la contaminación se haya eliminado del lago, resta un 10% de contaminación. Es decir, y = 0.1q.

#5: $0.1q = qe^{-0.0322\ x}$

#6: SOLVE ($0.1q = q\ e^{-0.0322x}$, x, real)

#7: x = 71.50885381

Solución: aproximadamente: 72 años

Se analizó un hueso fosilizado y se encontró que contenía la milésima parte de la cantidad original de C- 14. Determine la edad del fósil.

Modelo: dA/dt = kA; Asignación de variables: x = t = 0; y = A = a. Donde a representa la cantidad inicial de C^{14}.

#1: SEPERABLE (1, yk, x, y, 0, a)

#2: SOLVE (SEPARABLE (1, yk, x, y, 0, a), y, Real)

#3: $y = ae^{k\ x}$

Para calcular el valor de la constante de decaimiento, se debe tener en cuenta la siguiente condición, de que 0.5a = A(5600). Porque, la vida media es el valor que corresponde en tiempo t, A(t) = 0.5 a, para una cantidad inicial.

#4: $0.5a = ae^{5600k}$

#5: SOLVE ($0.5a = ae^{5600k}$, k, Real)

#6: k = - 0.0001237762822

Reemplazando en #3

#7: $y = ae^{-0,000123\ x}$

Utilizando la condición, y = 0,001a que representa la milésima parte de la cantidad original de C – 14.

#8: $0.001a = ae^{-0,000123\ x}$

#9: SOLVE ($0.001a = ae^{-0,000123\ x}$, x, Real)

#10: x = 56160,61201

Aproximadamente, 56000 años

Conclusiones

De acuerdo al artículo realizado, se evidencia que asignando correctamente la sintaxis para funciones p(x), q(y), la asignación de las variables y la condición inicial dada en el programa, se obtiene la función particular o especifica de la ecuación diferencial, y así, se realizan descripciones detalladas de la trayectoria de la función en cualquier intervalo de tiempo t, por medio del gráfico.

Al utilizar el software Derive 6.1 en la solución de las aplicaciones propuestas, cada una tiene un modelo propio, que describe el comportamiento de una variable dependiente e independiente, así mismo, las condiciones se analizan con respecto a un tiempo $t \geq 0$; Por otra parte, algunas necesitan el ingreso de una constante adimensional (demografía, temperatura, economía, contaminación, administración de medicamentos y datación), y otras no (circuito RC y mezclas químicas).

El aprendizaje que proporciona la utilización de esta herramienta en los estudiantes de ecuaciones diferenciales en diferentes áreas del conocimiento a nivel universitario, es innovador, debido a que se puede determinar si su proceso analítico es correcto o no, y visual, por la sintaxis y las modificaciones que se pueden hacer en él, en la posibilidad de resolver problemas más reales, por la facilidad en el manejo de sus interfaces en los procesos analíticos y gráficos.

Por lo tanto, la incorporación de nuevas tecnologías en la matemática (ecuaciones diferenciales), enriquece los ambientes de aprendizaje de los alumnos, la transformación de las prácticas educativas, las estructuras curriculares y la capacidad para investigar, crear y adaptarse a requerimientos, como también el desarrollo de habilidades en el avance técnico, tecnológico y científico.

Agradecimientos

Helen Tatiana Hernández Jáuregui, Luz Karime Torres Carvajal, Yeily Adriana Rangel Basto, Diego Javier Cuellar García, Luz Francy Yáñez Meneses. Además, a los estudiantes del semillero de investigación matematic, las personas que apoyan mi trabajo y estudios.

Bibliografía

[1] G. ZILL, Dennis. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. 7 ª edición. Internacional Thomson Learning. México, DF. 2002. p. 22, 98, 99 – 101, 106.

[2] COSTA, Bronson. Ecuaciones diferenciales. 3ª edición. McGraw-Hill Interamericana. México, DF. 2008. p. 68.

[3] H. HALLETT, Deborah. M. GLEASON, Andrew. Cálculo aplicado. 1ª edición. Compañía editorial continental. México, DF. 1999. p. 464 – 467.

[4] SÁNCHEZ RUIZ, Luis M. LEGUA FERNÁNDEZ, Matilde P., MORAÑO, José Antonio. Matemáticas con Derive. Editorial Universidad Politécnica de Valencia. Departamento de matemáticas aplicada. 1ª edición. Pdf. p. 225 – 226, 233 – 234.

[5] Derive. Disponible en http: //es.wikipedia.org/wiki/Derive. Consulta 01/09/2011

[6] Modelo matemático. Disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_matem%C3

%A1tico. Consulta 01/09/2011

[7] Derive 6.1 demo disponible en http://www.austromath.at/daten/derive/derivedemo.htm. Consulta 01/09/2011