



Reflexión sobre algunos conceptos clave de la investigación en Educación Matemática: didáctica, concepto, competencia, esquema y situación.

Reflection on some key concepts of research in Mathematics Education: didactics, concept, competence, scheme and situation.

Reflexão sobre alguns conceitos-chave da pesquisa em Educação Matemática: didática, conceito, competência, esquema e situação.

Bruno D'Amore^{a*}, Martha Isabel Fandiño Pinilla^b

^{a*}Doctor en Educación Matemática, Universidad Di Bologna. Bogotá, Colombia 

^bDoctora en Educación Matemática, Universidad Di Bologna. Bogotá, Colombia 

Forma de citar: D'Amore, B., Fandiño, M. (2016). Reflexión sobre algunos conceptos clave de la investigación en Educación Matemática: didáctica, concepto, competencia, esquema y situación. Encuentro internacional en educación matemática ISSN 2539-1885. La educación matemática como herramienta en el desempeño profesional docente. Cúcuta, Colombia 61 - 67.

Resumen: La Educación Matemática, como campo disciplinario para la producción de conocimientos en torno a los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, se consolida cada vez más en el ámbito internacional. Múltiples son los estudios que se llevan a cabo en los diferentes países; esto ha generado el uso con diferentes significados de varias expresiones, tales como Didáctica, Concepto, Competencia, Esquema, Situación, entre otros. En este breve ensayo, el autor lleva a cabo algunas reflexiones que pretenden clarificar, desde cierta perspectiva, los significados de estos términos clave que aparecen a menudo en los textos que se ocupan de la investigación en Educación Matemática.

Palabras clave

Didáctica de la matemática, concepto, competencia, esquema, situación.

Abstract: Mathematics Education, as a disciplinary field for the production of knowledge around the teaching-learning processes of Mathematics, is increasingly consolidated in the international arena. There are multiple studies that are carried out in different countries; this has generated the use with different meanings of several expressions, such as Didactics, Concept, Competence, Scheme, Situation, among others. In this brief essay, the author carries out some reflections that seek to clarify, from a certain perspective, the meanings of these key terms that often appear in the texts that deal with research in Mathematics Education.

Key words

Mathematics didactics, concept, competence, scheme, situation.

Resumo: A Educação Matemática, como campo disciplinar para a produção de conhecimento em torno dos processos de ensino-aprendizagem da Matemática, está cada vez mais consolidada na arena internacional. Existem vários estudos que são realizados em diferentes países; Isso gerou o uso de diferentes significados de várias expressões, como Didática, Conceito, Competência, Esquema, Situação, entre outros. Neste breve ensaio, o autor realiza algumas reflexões que procuram esclarecer, de certa perspectiva, os significados desses termos fundamentais que geralmente aparecem nos textos que lidam com a pesquisa em Educação Matemática.

Palavras-chave:

Didática de matemática, conceito, competência, esquema, situação.

* Autor para correspondencia bruno.damore@unibo.it

Introducción

La amplitud que ha alcanzado la investigación en Educación Matemática en el ámbito internacional ha traído consigo el uso polisémico de algunas expresiones que, con frecuencia, aparecen en los reportes de investigación, con lo cual se dificulta la necesaria coordinación teórica que resulta necesaria para el avance de la Educación Matemática como campo disciplinario; este breve ensayo pretende ofrecer algunas ideas que permitan aclarar el significado de ciertos términos que habitualmente aparecen en los artículos que circulan en las revistas (journal for research) específicamente dedicada a la publicación de estudios relativos a la formación matemática de las personas en diferentes comunidades. Los términos a considerar son los siguientes: Didáctica, Concepto, Competencia, Esquema y Situación Didáctica.

Didáctica

Se puede entender por didáctica disciplinar el estudio de los procesos de transmisión y de apropiación de los saberes y del saber-hacer en relación con lo que estos procesos tienen de específico respecto a un contenido, teniendo en cuenta, entre otros, algunos de los siguientes factores.

1. Una amplia descripción del término didáctica incluye tanto la didáctica de las disciplinas (como, por ejemplo, la didáctica de la matemática) como la didáctica profesional (como, por ejemplo, la que se tiene en los cursos de formación profesional o específica de un determinado aprendizaje frente a situaciones muy particulares como: formación al interno de una empresa, enseñanza - aprendizaje de un trabajo artesanal, explicación acerca del funcionamiento de una máquina, aprendizaje deportivo etc.).

2. Un elemento importante, pero muy pocas veces analizado, es la duración del proceso de transmisión; en un proceso como el escolar, cuyo resultado positivo o negativo se mide en años, esta duración tiene una especificidad diversa de aquella de una simple comunicación sobre la realización de un hecho, por ejemplo la comunicación de un profesional a un aprendiz. El factor “duración del proceso de enseñanza-aprendizaje” con frecuencia no es evidenciado en los estudios ni en las investigaciones.

3. Es de gran importancia la situación en la cual se realiza el proceso, tanto de poder afirmar que la situación determina el proceso (para bien o paramal). Antes de continuar, deseamos evidenciar como la especificación del contenido diferencia netamente y sin alguna posible confusión a la didáctica con respecto a la psicología. La psicología del aprendizaje se desarrolla según modelos diversos: el behaviorismo, el cognitivismo, el modelo de aprendizaje por intuición o insight, por imitación o imitación social y el conexionismo. La psicología del aprendizaje estudia temas diferentes a los de la didáctica, por ejemplo, los mecanismos de atención, aspecto que la didáctica no trata (mejor: no tiene los instrumentos para hacerlo).

Volvamos al discurso precedente. ¿Qué diferencia se presenta entre la didáctica de una disciplina y la didáctica profesional? Consideramos que son los procesos de conceptualización los que hacen la diferencia: la didáctica de una disciplina hace referencia a la epistemología de dicha disciplina, en el sentido que no es posible pensar una didáctica de la disciplina *d* que no haga referencia no sólo a *d*, sino también a la epistemología de *d*.

En el caso particular de la matemática, podemos señalar como mínimo 5 aspectos específicos de su aprendizaje (Fandiño Pinilla, 2008):

1. Aprendizaje conceptual;
2. Aprendizaje algorítmico;
3. Aprendizaje estratégico (ej.: la resolución de problemas);
4. Aprendizaje comunicativo;
5. Aprendizaje semiótico (ej.: gestión de las representaciones y de las transformaciones de tratamiento y de conversión).
6. Todo profesional del proceso de enseñanza - aprendizaje a largo tiempo, por ejemplo escolar, puede confirmar que esta división específica tiene no sólo una valencia teórica, sino también y en particular un sentido empírico, de gran interés: los problemas que los estudiantes encuentran en un campo conceptual son diferentes de aquellos que encuentran en otro, diferentes son también los problemas de conceptualización; y así se puede continuar.

Todo este discurso parece no tener analogías con el aprendizaje exclusivamente profesional.

Por lo tanto, es incorrecto pensar al estudiante dentro de la escuela como un aprendiz de fábrica; los procesos son indiscutiblemente muy diferentes.

También la idea de evaluación de una competencia debe ser revisada críticamente; al ex-aprendiz se le puede proponer una prueba práctica de evaluación de la competencia alcanzada una vez terminado su adiestramiento, al neófito del salto de altura se le puede proponer que intente superar la pértiga colocada a 2 m de altura; en esta situación, supera la pértiga o no lo hace.

Evaluar las competencias de un estudiante en aula es mucho más complejo, consideramos además que es imposible hacerlo con un test (como lo demuestra el fracaso de esta idea de evaluación en muchos de los países en donde se trató de implementar). Esto explica el hecho de cómo el vasto y prolongado debate sobre la evaluación de las competencias en educación se haya siempre complejizado y que sea tan difícil definir lo en términos claros y unívocos; se comprende igualmente por qué para los profesores no es muy fácil hacer suyo este discurso.

Procesos cognitivos y esquemas

Los procesos cognitivos organizan la actividad y su funcionamiento en situaciones; esto quiere decir que la conducta, la representación y las competencias definen y determinan el desarrollo de las formas de organización de la actividad de un sujeto en el curso de su experiencia.

Por tanto, los procesos cognitivos no están relacionados únicamente con el funcionamiento en situaciones, sino también con el desarrollo, es decir la evolución, de las competencias y de sus relaciones en el curso de la experiencia.

Estamos aceptando el Piaget de los primeros estudios: conocimiento y adaptación. ¿Pero, quién se adapta y a qué se adapta? Quienes se adaptan no son sólo los seres humanos en cuanto tales, sino también los esquemas, es decir las formas explícitas de organización de la actividad: los esquemas se adaptan a las situaciones para alcanzar el conocimiento (o una meta auspiciada).

O, mejor: los seres humanos adaptan sus esquemas para apropiarse de un conocimiento.

Mejor aún: el ser humano se apropia de un conocimiento sabiendo adaptar sus esquemas a una nueva situación que le permite aprender. El novicio que hace el salto en alto decide cambiar de entrenador, eligiendo una persona competente quien le enseñará cómo cambiar sus esquemas: carrera, despegue, rotación, elevación, arqueo, extensión de las piernas mientras cae, tensión en la caída. La modificación de los esquemas puede ser deliberada, es decir, fruto de una elección consciente, o no. (Gérard Vergnaud hizo hace algunos años en este sentido el ejemplo del salto con garrocha opértiga). Por tanto, resulta fundamental evidenciar las parejas: situación - esquema, aspecto que ni Piaget, ni Vygotsky hicieron, mientras que esto sí aparece en la obra de Vergnaud (distribuida en diversos textos entre finales de los '80 y finales de los '90).

Dicha relación es fundamentalmente dialéctica: no existe esquema sin situación; igualmente, no hay situación sin esquema. Porque es el esquema el que permite identificar una situación como parte de una cierta clase de situaciones, en cuanto un esquema se dirige efectivamente siempre a una clase de situaciones, dadas u naturaleza general y no unívoca. Es por esto que el esquema es un hecho universal, pero en evolución posible. El aprendizaje necesita de una situación, la cual se organiza en esquemas de aprendizaje y modalidad (por ejemplo, la teoría de las situaciones de Guy Brousseau); a veces, los esquemas son buscados; a veces, son inherentes en la ejecución y en el proceso; a veces son el fruto de ingenierías (Brousseau,2008).

Competencia

Desde siempre de forma obvia y, recientemente de manera obstinada y tal vez exagerada, se hace referencia a la competencia. Aquí nos referimos a la acepción dada en D'Amore, Godino y Fandiño Pinilla (2008). Si la competencia es considerada como un hecho evaluable, entonces debe ser medible y por tanto tiene sentido hablar del valor de una competencia y por tanto dar un orden de mayor a menor competencia; podrían tener sentido afirmaciones como las siguientes:

1. A es más competente de B en el campo X si puede hacer algo en X que B no puede hacer;
2. A exhibe más competencia en el campo X en el tiempo t' que no en el tiempo $t(t < t')$ si A puede hacer algo en X en el tiempo t' que no podía hacer en el tiempo t ;
3. A es más competente que otros si se comporta de una mejor forma o de forma más eficaz: más rápida, con mayor compatibilidad que la forma de hacer de terceros;
4. A es más competente que otros si dispone de un repertorio de procesos alternativos que le permitan adaptar su comportamiento a los diversos casos que se le puedan presentar y que los otros no alcanzan;
5. A es más competente de B si él es más eficaz frente a una situación, respecto de cuanto lo pueda ser B.

En este repertorio (ciertamente no exhaustivo) de casos, se esconde la idea de medida de una competencia.

Pero el concepto de competencia no es, por sí mismo, científico; para una sistemática presentación se necesita analizar una actividad específica, lo cual significa hacer referencia a gestos, razonamientos, operaciones científicas y técnicas, motivaciones, voliciones, empeño, deseo, afectividad, ... elementos éstos que no siempre se prestan a ser medidos con eficacia, simplicidad y objetivamente. Sirve un concepto fuerte para designar las formas de organización de la actividad en situación, y en esto nos ayuda el concepto de esquema elaborado al interior de la Teoría de los Campos Conceptuales desarrollada por Gérard Vergnaud (Vergnaud, 1990).

Esquemas y campos conceptuales

En forma sucinta:

1. un esquema es una totalidad dinámica funcional;
2. un esquema es una organización invariante de la actividad para una clase definida de situaciones;
3. un esquema implica cuatro categorías de componentes: un objetivo (o más de uno), unos sub-objetivos y anticipaciones; reglas de acción, de toma de informaciones y de control; invariantes operatorios (conceptos y teoremas en acto); posibilidad de inferencia;

4. un esquema es una función que tiene en cuenta el pasar del tiempo dado que toma los valores de entrada y proporciona los de salida en un espacio temporalizado; para entender bien este punto se requiere pensar en un esquema evolutivo. Por su naturaleza, el esquema es la expresión circunscrita y final de una generalización.

La idea general de la cual se está tomando todo esto proviene, sustancialmente, de Immanuel Kant, pero quien no logra establecer una relación entre esquemas y conceptos en su reciprocidad; esto se alcanza sólo con la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990), la cual nació precisamente ante la necesidad de teorizar el lento proceso de construcción – apropiación de los esquemas y de los conceptos.

En dicha teoría, son esenciales dos los elementos evidenciados por Vergnaud:

1. concepto en acto: concepto considerado como pertinente, como válido, en una determinada situación, descrito por un cierto esquema o por una interferencia entre esquemas;
2. teorema en acto: proposición del tipo “si A entonces B” considerada verdadera en una determinada situación, pero generalizable en un dominio de situaciones hasta en una situación no contextual.

Concepto

Un concepto es al mismo tiempo:

1. Un conjunto de situaciones (aquellas que dan sentido al concepto),
2. un conjunto de invariantes operatorias (es decir de conceptos y de teoremas en acto que organizan los esquemas, los tratamientos de estas informaciones) y
3. un conjunto de representaciones simbólicas y lingüísticas que permiten expresar los objetos y las relaciones presentes en las situaciones concernientes, eventualmente, las relaciones que estas tienen con las características de los esquemas.

Existen dos acepciones (como mínimo) de concepto: concepción cuando se habla de un sujeto; más propiamente concepto, aquel elaborado por la cultura.

En ambos casos, no se puede entender el desarrollo de un concepto sin insertarlo en un sistema y verse obligado a estudiar este sistema, el campo conceptual, para poderse apropiarse del concepto. Un campo conceptual es por tanto, al mismo tiempo, un conjunto de situaciones (mejor: de tipologías de situaciones) y un conjunto de conceptos, conjunto en el cual no todas las propiedades se desarrollan en el mismo tiempo en el curso de la experiencia y del aprendizaje.

Pero existe siempre una diferencia (mínima) entre la forma operativa del conocimiento, aquella que se usa en la acción, y la forma predicativa del conocimiento, hecha de palabras y de enunciados.

El trabajo del didáctico no es de trabajar sobre el conocimiento del sujeto que aprende, sino sobre las condiciones creadas por las situaciones puestas en acción en la situación de aprendizaje obviamente teniendo muy bien presente los esquemas y la adaptación.

El esquema, nos enseña Vergnaud, es una totalidad dinámica funcional, cuya funcionalidad es relativa precisamente a esta totalidad en su entereza, por tanto, no aquella relativa a uno o a otro de sus componentes. Sin embargo, el análisis de las componentes del esquema es tan esencial como el análisis del esquema en su entereza, cuando se quiere analizar la eficacia de un esquema. Es el recurrente debate entre holístico y constitutivo. Quien practica el salto en alto puede ser patrón absoluto de cada una de las componentes esquemáticas de la acción deportiva, pero perder de vista la sucesión en su totalidad.

¿Cuáles son los elementos que caracterizan un esquema, y cuáles son sus componentes?

En primer lugar, el objetivo por el cual está constituido, generalmente con sub objetivos: cuál es la intención que lleva a constituirlo o a idear lo o a ponerlo en acción, en términos de motivación, interés, objetivo, necesidad.

Existen además las componente generativas, es decir las reglas a seguir, las informaciones de tener presente, todo lo relacionado con el control. En todo esto tiene una importancia muy grande la componente temporal. Además de estas componentes [reglas de acción, puestas en evidencia en el trabajo clásico y pionero de Allen Newell y Herbert Simon, creadores en 1956 del LogicTheory Machine y en 1957 del General ProblemSolver (GPS), existen otras componentes no observables con inferencias internas y el papel de la memoria, más o menos explícitas y voluntarias (y así, volvemos a tocar la psicología).

Finalmente volvemos a las componentes de los invariantes operatorios de Vergnaud, los conceptos en acto y los teoremas en acto, ya mencionados; estos constituyen las componentes epistémicas en juego junto con las propiedades individuales, las relaciones y las transformaciones, no sólo las observables, sino también las semióticas y las explícitas. Los invariantes operatorios ponen en juego las informaciones y las inferencias, con una función de conceptualización y de deducción, como categorías conceptuales.

Como última componente del esquema, se impone la inferencia misma, indispensable para la teoría, gracias a las regulaciones locales, a los ajustamientos, a los controles, dado que no se tienen acciones totalmente automáticas, por lo menos en el aprendizaje. La acción de adaptabilidad de los esquemas es esencial.

Las reglas de acción, de asunción de información y de control son la traducción pragmática de los teoremas en acto de Vergnaud; estas interpretan el hecho que las variantes de una situación pueden en general asumir otros valores y los sujetos están en grado de adaptarse a estos valores.

El esquema estructura una actividad, en sus dos componentes esenciales:

1. la sistematicidad, que es extrínseca a las reglas unívocas a las cuales son sujetas las actividades (por ejemplo los algoritmos aritméticos);
2. la contingencia, porque las reglas a las cuales obedece un esquema deben tener presente las diversas situaciones de acción o de interpretación al cual el esquema se encuentra de frente (digamos así: regla de oportunidad).

La idea de esquema aporta una respuesta teórica de gran interés a la psicología cognitiva aun quedando en gran medida externa; por ejemplo, la cuestión de la adaptación a situaciones nuevas, por tanto la resolución de problemas, está muy bien teorizada en la idea de esquema, precisamente gracias a las cuatro componentes que hemos analizado. Pero esto no implica, como muchos desearían, como fue auspiciado ingenuamente hasta hace pocos años, como estúpidamente algunos, aún hoy, sostienen y auspician, la degeneración de situaciones de resolución de problemas en situaciones de algoritmización de hipotéticos pasajes (véase una nota firmemente crítica en: Brousseau, D'Amore, 2008).

La situación

Un esquema se dirige siempre hacia una situación caracterizada por un objetivo esperado, o por más de uno, por ejemplo un problema que debe ser resuelto, en su complejidad epistémica y cognitiva, así como puesta en marcha en campo de competencia. Los dos conceptos de esquema y de situación están estrechamente relacionados el uno con el otro. Por tanto, incluso en una situación específica y no sólo en general. Las ideas de objetivo, regla, conceptualización e inferencia son esenciales y estrechamente relacionadas.

Estas intervienen en la determinación de una ingeniería de situaciones didácticas en general, aún más en el caso muy difundido, cuando el docente se encuentra frente a más de un estudiante; en este caso, el proceso de interacción entre sujetos puede ocupar un papel decisivo, de hecho mucho más decisivo que en los procesos de comprensión (D'Amore, 2005).

Generalmente en una situación se evidencian dos términos relativos a los sujetos en juego, y con diversas modalidades: experiencia y aprendizaje. Sobre la base de algunos presupuestos, el aprendizaje hace parte de la experiencia, pero no necesariamente viceversa, para lo cual entre los dos hay una especie de dependencia causal.

Pero, se pueden encontrar ejemplos en los cuales la experiencia comporta aprendizaje, gracias a situaciones en las cuales la experiencia se desarrolla. Obviamente, en este caso debemos generalizar y no pensar sólo en el ambiente escolar.

Por tanto, el aprendizaje comparte con la experiencia algunos puntos cruciales:

1. la duración temporal, la cual puede ser variable;
2. los diversos registros y las diversas modalidades puestas en campo en las situaciones: registros técnicos, lingüísticos, gestuales, sociales y afectivos;
3. los papeles en juego y por tanto el sentido que los diferentes sujetos asumen;
4. los roles de los instrumentos en juego.

Todos concordamos en que la experiencia tiene una enorme variedad de modalidades de expresión, mientras que parece no será sí para el aprendizaje; pero la teoría de los campos conceptuales revalúa estas ideas, dado que muestra cómo un mismo concepto se desarrolla a través de situaciones diversas y variadas, dado que el mismo concepto es puesto en relación en más de una forma y en más de un nivel con conceptos y enunciados considerados verdaderos (teoremas en acto), junto con representaciones lingüísticas y simbólicas; además se desarrolla junto con otros conceptos creando, precisamente, sistemas conceptuales.

Sobre el plano teórico, situaciones y esquemas forman una pareja indisoluble; las situaciones ofrecen ocasiones para dar sentido a las actividades y a los conceptos, pero no son estas mismas el sentido. El sentido es el esquema, decía agudamente Piaget. Pero la realidad está hecha de objetos y de relaciones: se trata siempre de dar un sentido a dichos objetos y a dichas relaciones, a través del filtro de las situaciones, de sus interpretaciones, de su realidad.

Generalmente, en las situaciones didácticas, aquello a lo cual se asiste es, por el contrario, precisamente a una pérdida del sentido dado a los objetos y a sus relaciones (Brousseau, D'Amore, 2008).

La representación

El concepto de representación involucra algunos puntos importantes: la percepción, los sistemas significantes - significado, la conceptualización (en acto), el esquema.

Percibir significa hacerse preguntas en relación con los objetos reales, sus propiedades y sus relaciones observables, identificables y separables es decir distinguibles. La distancia que hay entre percibir y representar está en el hecho que la representación se ocupa también de los objetos, propiedades y relaciones no observables directamente.

Tampoco es una componente esencial. La percepción no es un hecho desprovisto de necesidades culturales dado que estos requieren de experiencia y de cultura. La lengua materna y las otras formas simbólicas desarrolladas por la sociedad para comunicar y representar constituyen sistemas de significantes y de significados; estos contribuyen notablemente al funcionamiento de la representación.

Poder hacer uso de palabras para identificar objetos y sus relaciones, proporciona a los conceptos un estatus cognitivo decisivo; la representación por tanto no es sólo la explicación de algo al interior de un léxico o, más en general, de un sistema semiótico.

Existen invariantes explícitas e implícitas que deben tener en cuenta la comunicabilidad, pero también la posibilidad de explicitación que lleva a una estabilidad necesaria para la representación misma. Los invariantes operatorios son los componentes principales de la conceptualización: en las actividades tose formany es en el curso de la actividad que producen sus efectos, esenciales para la percepción especialmente en lo relacionado con la información específica para la acción. Tienen un papel igualmente importante las inferencias que siempre han sido privilegiadas como objeto de estudio desde Aristóteles y Kant, hasta el primer Wittgenstein.

Los esquemas constituyen una componente absolutamente esencial de la representación, dado que esta es una actividad y por tanto un esquema puede en su curso tomar forma y actuar como es en la posibilidad de mayor significado.

Es más, el esquema constituye en el ámbito de la representación la componente más significativa.

La representación puede ser pensada como la reorganización de esquemas.

Toda teoría de la representación pone en juego, por su misma existencia, un flujo de consciencia, una toma de conciencia pero también procesos inconscientes. Sin el flujo de consciencia (percepción e imaginación), el ser humano no estaría en grado de representar si sabría reflexionar sobre lo que es la representación.

No debemos olvidar la dualidad (siempre presente): consciente / inconsciente, relacionada con los invariantes operatorios y que permite la concientización como momento clave de la conceptualización, es decir, la identificación de los objetos y delos proceso de la realidad, observables y no.

Esto explica por qué se tiende hoy a mezclar y no más a jerarquizar el cognitivo y el meta-cognitivo.

Referencias

- Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica edepistemologia de lla matematica*. Bologna: Pitagora.
- Brosseau, G. & D'Amore, B., (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attivita didattica, dall'empirico al didattico. En : B. D'Amore, S. Sbaragli (editores)(2008). *Didattica de lla matematica e azionid'aula*. Actas del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matematica, Castel San Pietro Terme, 7-8-9 noviembre 2008. Bologna; Pitagora. Pagg. 3-14.
- D'Amore, B. (2008). Prefacio al libro: Brosseau G. (2008). *Ingegneriadidatticaed epistemologia dellamatematica*. Editor Bruno D'Amore. Bologna: Pitagora. Pagg. VII- XII.
- D'Amore, B.(2005).Pratiche e metapratiche nell 'attività matematica de lla classe intesa come società. Alcuni element irilevanti de lla didattica de lla matemática interpretati in chiave sociológica.La matematica e la suadidattica, 19(3), 325-336.
- D'Amore, B., Godino, D. J. & Fandiño Pinilla, M.I. (2008). *Competencias y matemática*. Bogotá: Magisterio
- Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplicias petti dell' apprendimento de lla matematica*. Trento: Erickson. [Versión en idioma español 2010, Bogotá: Magisterio].
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactiques des mathématiques*,10 (10), 133-169.

- Goldin, G., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. . *Theories of mathematical learning*, 397-430.
- Gutiérrez, J. (2014). Las matemáticas en Ingeniería: todo un reto pedagógico. *Innovación, Ingeniería y Desarrollo*, 1(1), 75-80.
- Haghverdi, M., Semnani, A., & Seifi, M. (2012). The relationship between different kinds of students' errors and the knowledge required to solve mathematics word problems. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26(42B), 649-666.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. Cuarta Edición. México: McGraw-Hill .
- Martínez, M. (2009). *Nuevos paradigmas en la investigación*. Venezuela: Alfa .
- Mathematics, N. C. (2000). *Estándares Curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Obtenido de http://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf
- Mayer, R. (1986). *Thinking, Problem Solving, Cognition*. Barcelona: (Trad. Graziella Baravella). (1a ed.). Barcelona: Ediciones Paidós. (Original publicado en 1983).
- Mayer, R., Lewis, A., & Hegarty, M. (1992). Mathematical misunderstandings: Qualitative reasoning about quantitative problems. *Advances in psychology*, 91,, 137-153.
- Muir, T., Beswick, K., & Williamson, J. (2008). "I'm not very good at solving problems": An exploration of students' problem solving behaviours. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27(3), 228-241.
- Nagle, R., Saff, E., & Snider, A. (2001). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación .
- Polya, G. (2005). *Polya, G. (2005). Cómo plantear y resolver problemas*. (reimp. XVII). . Mexico: (Trad. Zagazagoitia) Mexico: Editorial Trillas. (Original publicado en 1965).
- Sabbagh, S. (2008). Solución de problemas aritméticos redactados y control inhibitorio cognitivo. *Universitas Psychologica*, 7 (1), 217-229 .
- Santos, L. (07 de Marzo de 2008). *La Resolución de problemas: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica*. Obtenido de *Memorias de seminario de Resolución de Problemas: 30 años después del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*:<http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf>
- Shonenfeld, A. (1980). Enseñanza de habilidades para resolver problemas. *he American Mathematical Monthly* , 87 (10), 794-805.
- Wright, J. (2014). *An investigation of factors affecting student performance in algebraic word problem solutions*. Obtenido de *Available from ProQuest Dissertations & ThesesA&I*: <http://search.proquest.com/docview/1630101245?accountid=43636>.