

## Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno: Mediaciones con TIC

### *Specialized knowledge of the teacher who teaches the reflection of the trigonometric function sine: Mediations with ICT*

Iván Andrés Padilla-Escorcia<sup>a</sup>, Jenny Patricia Acevedo-Rincón<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Magister en Educación, iapadilla@mail.uniatlantico.edu.co, <https://orcid.org/0000-0003-1210-3712>, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia

<sup>b</sup>Doctora en Educación, pjacevedo@uninorte.edu.co, <https://orcid.org/0000-0003-3872-5130>, Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia

**Forma de citar:** Padilla-Escorcia, I.A., Acevedo-Rincón, J.P. (2021), Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno: Mediaciones con TIC. *Eco Matemático*, 12 (1), 93-106

Recibido: 25 Octubre de 2019

Aceptado: 07 Diciembre 2019

#### Palabras clave

Conocimiento especializado, conocimiento de los temas, conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, TIC, reflexión, función trigonométrica seno

**Resumen:** La implementación de las TIC en la enseñanza de las matemáticas ha tomado relevancia al día de hoy. Por tal motivo, la formación en este tipo de herramientas con la que cuente el profesorado que enseña esta área del conocimiento, es clave para términos de su efectividad en el aula de clase. De esta manera, el objetivo de esta investigación consiste en caracterizar el conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno mediante el uso de las TIC. La investigación se desarrolla mediante un enfoque cualitativo y diseño estudio de caso de tipo instrumental, que se aplica a un profesor de educación básica-secundaria que utiliza las TIC dentro sus prácticas pedagógicas, específicamente el software especializado GeoGebra. Como principales hallazgos se encontró evidencias de conocimiento del profesor acerca del conocimiento de los temas (KoT) y de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y relaciones que existen entre estos subdominios y categorías del MTSK, las cuales son necesarias en la aproximación del conocimiento que requiere el profesor para enseñar la reflexión de la función seno de manera efectiva utilizando las TIC.

\*Autor para correspondencia: [iapadilla@mail.uniatlantico.edu.co](mailto:iapadilla@mail.uniatlantico.edu.co)

DOI 10.22463/17948231.3072

2590-9215© 2017 Universidad Francisco de Paula Santander. Este es un artículo bajo la licencia CC BY 4.0

## Keywords

Specialized knowledge, knowledge of topics, knowledge of mathematics teaching, ICT, reflection, trigonometric function sine

**Abstract:** The implementation of ICT in the teaching of mathematics has become relevant today. For this reason, the training in this type of tools that the teachers who teach this area of knowledge have is key to its effectiveness in the classroom. In this way, the objective of this research is to characterize the specialized knowledge of the teacher who teaches the reflection of the trigonometric function sine through the use of ICT. The research is developed through a qualitative approach and an instrumental case study design, which is applied to a teacher of basic-secondary education who uses ICT within his pedagogical practices, specifically the specialized GeoGebra software. The main findings were evidences of the teacher's knowledge about the knowledge of the topics (KoT) and the teaching of mathematics (KMT) and the relationships that exist between these subdomains and categories of the MTSK, which are necessary in the knowledge approach It requires the teacher to teach sine function reflection effectively using ICT.

## Introducción

La inclusión de la Tecnología en los salones de clases, es al día de hoy un elemento fundamental en las prácticas profesionales de los educadores, su contribución en la planeación de clases dinámicas, participativas, creativas y cooperativas hacen de estas herramientas indispensables (Huda y Qohar, 2021; Zamora-Aray, Ramírez-Jiménez y Delgado-Navarro, 2020). Organismos internacionales como la Unesco (2017) y la OCDE (2019a) aseguran que dentro de las competencias de los profesionales del siglo XXI se encuentra el componente tecnológico. En ese orden de ideas la Educación Matemática no es la excepción, por lo tanto, que los profesores de matemáticas conozcan a profundidad herramientas y/o recursos tecnológicos que permitan enseñar de manera efectiva esta área del conocimiento, es necesario para la obtención de entornos más accesibles para los estudiantes (Stein *et al.*, 2020; Hernández-Sánchez, Borjón-Robles y Torres-Ibarra, 2016). Así, la inserción de las TIC de manera integral en los currículos de los programas que forman licenciados en matemáticas es clave en el fortalecimiento de los contenidos de la didáctica de los contenidos de un área que es compleja de enseñar (Cullen, Hertel y Nickels, 2020; Padilla-Escorcia y Conde-Carmona, 2020).

No obstante, en el contexto colombiano, lugar en que se desarrolla esta investigación, cualquier

profesional con formación a fin a las matemáticas puede asegurar una plaza docente en cualquier escuela del sector público (MEN, 2016). Selección que repercute en resultados a nivel nacional e internacional de pruebas estandarizadas como ICES [Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación] y PISA [programa internacional para la Evaluación de Estudiantes] que permiten evaluar las competencias de los estudiantes. Ejemplo de esto son los últimos resultados de los estudiantes en las Pruebas PISA, los cuales muestran que Colombia obtuvo un puntaje de 391 puntos, el cual dista del promedio de países de la OCDE (489), lo que es índice de que Colombia es el país con promedio más bajo de todos los pertenecientes a esta organización (OCDE, 2019b).

Ahora bien, se cree que, dado la diversidad de profesionales en las aulas de clase que enseñan matemáticas, es probable que no estén capacitados para saber qué competencias fortalecer con más profundidad en sus estudiantes o qué tipo de estrategias didácticas o pedagógicas contribuyen en la enseñanza de esta área (Padilla-Escorcia, 2020). Aparte de esto, los profesores que si tienen formación como licenciados en matemáticas y que por las características de los programas de donde son egresados se esperaría que tuvieran formación disciplinar y de tipo pedagógico, también han atravesado por momentos de formación solo de las matemáticas, en donde no se involucra la

formación didáctico-pedagógica, así como otros licenciados vivenciaron lo contrario con respecto a que el saber didáctico-pedagógico estaba por encima del saber disciplinar (Acevedo-Rincón y Flórez-Pabón, 2020).

En contraste con lo anterior, por más de 3 décadas distintos modelos han sido abordados en la educación matemática con el objetivo de caracterizar el conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas. Así, Shulman (1986) se considera el precursor de estos estudios, ya que a pesar que no explícitamente estaba dirigido a profesores de matemáticas, este profundizó que el conocimiento de un profesor que enseña un área del conocimiento en general se desprende en tres componentes: Subject Matter (conocimiento de la materia), Pedagogical Content Knowledge (conocimiento didáctico-pedagógico) y Curricular Knowledge (conocimiento curricular) y que estos conocimientos lo hacen diferenciar de cualquier otro profesional no licenciado. De manera que, se puede caracterizar el conocimiento propio en la labor de enseñanza. En ese sentido y basado en los apartados de Shulman (1986), teorías propias de la educación matemática, surgieron con el objetivo de profesionalizar el rol del profesor de matemática como actor de la enseñanza. Es así como: Ball, Thames y Phelps (2008) con el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching (el conocimiento matemático para la enseñanza)*; Rowland et al. (2009) con la teoría *The Knowledge Quartet* (el cuarteto del conocimiento) y Fennema y Franke (1992) con el modelo conocimiento del profesor son algunos de los modelos más relevantes que han estudiado a profundidad el conocimiento del profesor de matemática y cuyos objetivos comunes estaba enmarcado en comprender la naturaleza del conocimiento matemático para establecer mecanismos de tipo operativo que permitieran identificar elementos claves de análisis en lo referente al conocimiento del profesor de matemáticas (Escudero y Carrillo, 2020).

No obstante, es la propuesta de Carrillo et al. (2018) la que reúne varios elementos de los modelos anteriores, y define de manera explícita el conocimiento matemático y didáctico-pedagógico del contenido con el que debe contar un profesor que enseñe matemáticas en cualquier nivel académico. Denominado el modelo MTSK (conocimiento especializado del profesor de matemáticas), el cual cuenta con elementos suficientes de tipo matemático y didáctico-pedagógico que permiten analizar la práctica de un profesor que enseña matemáticas escolares utilizando las TIC de manera efectiva, debido al conocimiento que requiere éste de los contenidos que enseña para poder aplicarlos utilizando la tecnología en el salón de clases. En ese orden, el objetivo de esta investigación está enfocado en caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno mediado por las TIC y que se sustenta en el modelo MTSK que se describe a continuación.

### Marco Teórico

Esta investigación está sustentada en el modelo MTSK (Carrillo et al., 2013; Carrillo et al., 2018) el cual comprende dos dominios: conocimiento matemático (MK) y el conocimiento didáctico-pedagógico (PCK) del profesor que enseña matemáticas. El MK, se define como una red de conocimiento estructurado de reglas que permite al profesor comprender los fundamentos de las matemáticas a partir de sus conjeturas y la de los estudiantes; por su parte el PCK, se concibe como un conjunto de conocimientos, destrezas y habilidades que posee el profesor de matemáticas y que están conectados con su práctica de aula como actividad en determinado contenido específico de esta área del conocimiento (Depaepe et al., 2013; Escudero y Carrillo, 2020). Así mismo, cada uno de estos dominios se desprende en tres subdominios de conocimiento, como se observa en la Figura 1. Del lado izquierdo se ubican los subdominios correspondientes al MK, estos son: KoT (conocimiento de los temas), KSM (conocimiento de las estructuras matemáticas) y

KPM (conocimiento de las prácticas matemáticas). En cuanto al PCK, sus subdominios se ubican en la parte derecha del modelo, estos son: KFLM (conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas), KMT (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas) y KMLS (conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas), finalmente en el centro del modelo se ubican las concepciones y creencias del profesor y que giran en torno a su experiencia y vivencias con respecto a cómo se lleva a cabo la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

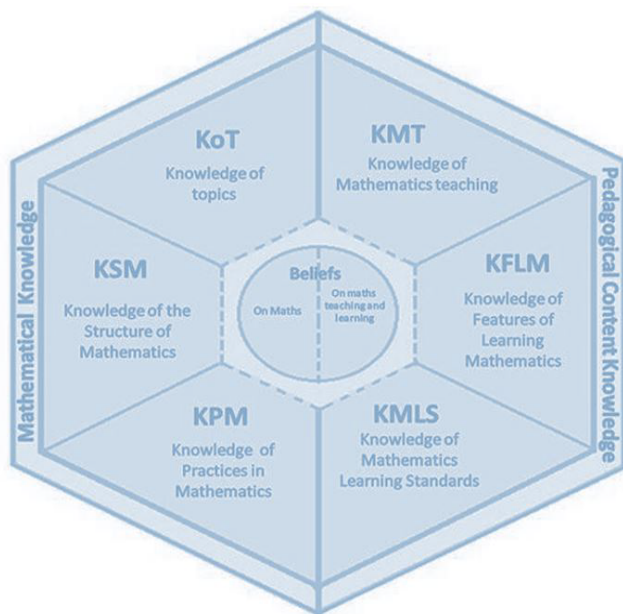


Figura 1. Modelo del conocimiento especializado del profesor (MTSK)

Fuente. Carrillo et al (2018)

### Subdominios del modelo MTSK

Dentro del dominio del conocimiento de las matemáticas, se tiene el KoT, que se define como el conocimiento del profesor de manera fundamentada acerca de los contenidos de las matemáticas que enseña. Este conocimiento es superior al conocimiento que se espera adquieran los estudiantes, y de acuerdo a Flores et al (2014) incluye el conocimiento acerca de definiciones, procedimientos, propiedades, registros de representación y relaciones fenomenológicas. El

KSM se concibe como el conocimiento del profesor para establecer relaciones interconceptuales e intraconceptuales entre contenidos de las matemáticas, bien sea del mismo nivel académico en el que se desarrolle el contenido o de niveles inferiores o superiores, esto para poder simplificar o amplificar la complejidad de los mismos. Por su parte, el KPM se define como el conocimiento del profesor para saber demostrar, hacer deducciones e inducciones, justificar, validar, modelar y proceder en matemáticas (Delgado y Zakaryan, 2019), así mismo, se considera dentro de este subdominio, el fomento a la notación formal dentro de las matemáticas por parte del profesor (Padilla-Escorcía y Acevedo-Rincón, 2020).

Ahora bien, en cuanto al conocimiento didáctico – pedagógico, se tiene el KFLM, que se define como el conocimiento del profesor acerca de las motivaciones que emergen en el aprendizaje de los estudiantes, así como los obstáculos que conllevan a las dificultades en su aprendizaje, basado en su experiencia y en teorías institucionalizadas de la educación matemática. El KMT, se concibe como el conocimiento del profesor acerca del potencial que le ofrecen recursos materiales y virtuales aplicados en la enseñanza de las matemáticas, además, corresponde al conocimiento de actividades, ejemplos y estrategias utilizadas en la enseñanza y sustentadas en su experiencia o en investigaciones derivadas de la educación matemática (Liñan, 2017). Por su parte, el KMLS, consiste en el conocimiento del profesor acerca de lo que se espera aprenda un estudiante de acuerdo a su nivel de escolaridad, así como el nivel con el que deben profundizarse cada uno de los contenidos que comprende el currículo.

En ese sentido, este marco se considera relevante dentro del contexto de esta investigación, ya que se espera que el conocimiento especializado del profesor para enseñar la reflexión de la función trigonométrica seno de manera efectiva mediada por las TIC, se evidencie en los subdominios del modelo MTSK.

## Metodología

Esta investigación se lleva a cabo bajo un enfoque cualitativo y diseño estudio de caso de tipo de instrumental (Stake, 2010), ya que a través del estudio de una situación puntual, se pretende comprender, interpretar, analizar y caracterizar el conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno de manera efectiva utilizando las TIC. Las técnicas de recolección de la información utilizadas en esta investigación son: *el cuestionario al profesor*, que tuvo como objetivo conocer de la experiencia de este enseñando matemáticas por medio de recursos y/o herramientas tecnológicas, aparte, que tuviera un acercamiento con el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas y la *observación no participante*, que se desarrollaron en la modalidad remota (11) y presencial (2) al profesor participante. Para términos de este artículo de investigación, se seleccionó un episodio de clase, en el cual el profesor profundizó más en la enseñanza de la función trigonométrica seno y sus propiedades en el software GeoGebra. La selección del caso se basó en los criterios de selección de Silverman (2008), con respecto a que el participante tuviera las características de objeto de estudio del investigador, que en este caso consistían en que el profesor tuviera experiencia enseñando matemáticas utilizando las TIC, particularmente GeoGebra en los grados de secundaria. Así, se eligió a Pablo (nombre ficticio), cuya experiencia estaba en el grado décimo enseñando matemáticas por tres años.

El instrumento de análisis que se utiliza para el análisis de los datos en esta investigación, corresponde a la constitución de una tabla de indicadores de conocimiento del profesor que son una adaptación de los propuestos por Carrillo et al. (2018) y Padilla-Escorcía (2020). Estos indicadores están enfocados en el conocimiento del profesor acerca de la reflexión de la función trigonométrica seno en GeoGebra. Visto esto, desde los subdominios de Conocimiento de los temas y conocimiento de la enseñanza de las matemáticas

y sus respectivas categorías. A su vez, mediante un análisis de contenido a los extractos de un episodio seleccionado de las unidades de información observadas y de la entrevista semiestructurada al profesor, se organizan los datos en categorías, para hacer revisión de las mismas hasta que se sature la información (Krippendorff, 2009; Carter, 2020), ya que al episodio seleccionado se le realizó una transcripción literal de la filmación observada en clases (Cayo y Contreras, 2020) con el propósito de identificar extractos que permitieran visualizar evidencias e indicios de los conocimientos de los temas y de la enseñanza de las matemáticas.

En línea con lo anterior, las siguientes tablas, muestran los indicadores de conocimiento evidenciados del profesor sobre la reflexión de la función trigonométrica seno utilizando GeoGebra con su respectivo dominio, subdominio, categoría y descripción del KoT y KMT

Tabla 1. Indicadores de conocimiento del KoT

Dominio	Subdominio	Categoría	Descriptor
MK	KoT	CC1. Conocimiento de las definiciones	DC1. Saber la definición de la función trigonométrica seno para su representación dinámica usando las TIC (GeoGebra).
		CC2. Conocimiento de los registros de representación	DC2. Representar la función trigonométrica seno y sus propiedades en cada uno de sus registros (gráfico, numérico, algebraico, pictórico y de lenguaje natural).
		CC3. Conocimiento de las propiedades y fundamentos	DC3. Aplicar las propiedades de la función trigonométrica seno en su representación dinámica mediante el uso de las TIC (GeoGebra).

Nota: la Tabla 1 muestra los indicadores del subdominio KoT con sus respectivos descriptores. La sigla CC, hace referencia a la categoría de conocimiento del contenido y la sigla DC corresponde al descriptor del contenido, estos se enumeran con ese orden hasta el número 3.

Tabla 2. Indicadores de conocimiento del KMT

Dominio	Subdominio	Categoría	Descriptor
PCK	KMT	(CE1). Conocimiento de la potencialidad del recurso material y/o virtual en la enseñanza de las matemáticas.	(DE1). Saber la efectividad de herramientas TIC en la representación dinámica de la función trigonométrica seno y sus propiedades.
		(CE2). Conocimiento de tareas, estrategias, ejemplos y actividades que ayudan a la enseñanza de contenidos de matemáticas.	(DE2). Saber de la variedad de ejemplos, ejercicios, tareas y actividades que se pueden realizar con herramientas y/o recursos TIC y que ayudan en la representación dinámica de la función trigonométrica seno y sus propiedades.

Nota: la Tabla 2 muestra los indicadores del subdominio KMT y sus respectivos descriptores. La sigla CE, hace referencia a la categoría de conocimiento de la enseñanza este y la sigla DE corresponde al descriptor de la enseñanza, estos se enumeran con ese orden hasta el número 2

## Resultados

En este episodio se muestran indicios de conocimiento del profesor del KoT, específicamente de las categorías de definiciones (CC1), propiedades (CC3) y registros de representación (CC2) en la representación dinámica de la función trigonométrica  $\sin x$  en GeoGebra; de la misma manera se observan acercamientos de conocimiento del profesor acerca del potencial que le ofrece el material virtual GeoGebra para la enseñanza del contenido a la reflexión de las funciones trigonométricas (seno) (CE1) y ejemplos para la enseñanza que facilitan la enseñanza del contenido (CE2) antes en mención, como se muestra a continuación:

**Pablo** Vamos ahora a ver la reflexión de la función seno y una reflexión de dicha misma función. Recuerdan ¿cómo hacer la reflexión de  $\sin x$ ?

**Estudiante B** ¿No era con el no sé qué adelante?

**Estudiante H** Con el  $-1$

**Pablo** Exacto

**Estudiante B** El número de adelante, el coeficiente

**Pablo** Si, sen x, miren acá por favor, algo que tienen allá visualizado, el dominio de esta función es:

**Estudiante B** Todos los reales

**Pablo** ¿Y su rango?

**Grupo** De menos uno a uno

**Pablo** Por favor necesito ahora esta función:  $y = -\text{sen}x$

**Estudiante B** Ah esa es la reflexión

**Pablo** Para que podamos calcular el dominio y rango

**Estudiante B** Pero, ¿nada más la pongo en la entrada?

**Pablo** Si, por favor, oculten lo otro que tienen ahí.

**Pablo** ¿Ya lo hicieron?

**Grupo** Sí

**Estudiante B** La verde no se me quita del ejercicio anterior

**Pablo** Dale en objeto visible, selecciona los puntos y los borras con control

**Estudiante B** ¡Uf!, pero son un pocotón

**Pablo** Ok, ¿esa es la función?

**Estudiante B** Sí

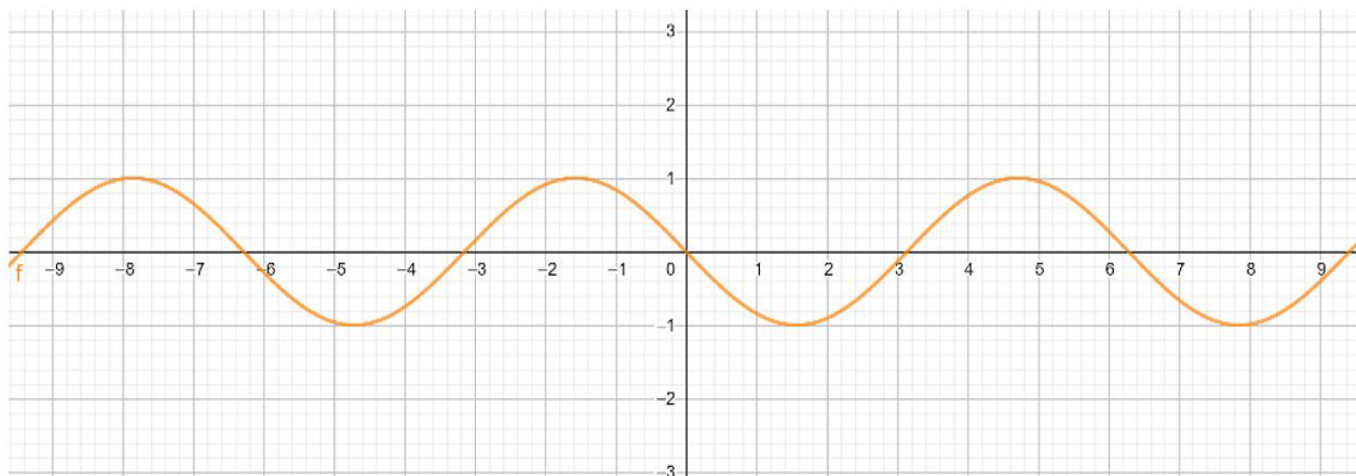


Figura 2. Gráfica de la reflexión de la función Sen x en el software Geogebra

**Pablo** Hazle Zoom por favor, pregunta: ¿se mantiene el dominio y el rango?, ¿el periodo? [Pausa] estudiante B, explícame por favor

**Estudiante B** Sí se mantiene, el rango sigue siendo de menos uno a uno, el dominio sigue siendo

todos los reales porque es infinito hacia todos los grados y el periodo sigue siendo de  $2\pi$ .

**Pablo** Ahora bien, ¿qué número se colocó delante de la función sen x?

**Grupo** Menos uno

**Pablo** ¿Y el menos uno es un número qué?

**Estudiante I** No, no, literal no

**Estudiante C** Negativo

**Pablo** ¿Por qué razón? ¿Qué la diferencia?

**Estudiante B** ¿Natural?

**Estudiante I** Si fuera la función seno esto tendría que estar hacia acá, es como si hubiera hecho una reflexión del eje x, si entiendes, tendría que estar subiendo hacia acá

**Estudiante** ¿Negativo?

**Pablo** Si, los naturales son los positivos

**Pablo** No, no entiendo, explícame que entienda. Mira, ¿ahora qué pasó ahí?

**Estudiante B** Ah ok

**Pablo** Un número entero

**Estudiante I** ¡Aja! Esa es

**Pablo** Ahora, escriban un número delante del seno, una fracción

**Pablo** Una célula

**Estudiante C** ¿Una fracción negativa?

**Estudiante I** ¡Aja! No te estoy diciendo, es como si hubieras hecho una reflexión del eje x porque quedó por acá abajo y la otra por arriba

**Estudiante B** Menos un medio

**Estudiante H** ¿Cómo es que se llama eso?

**Pablo** OK, ¿quién fue el eje de simetría ahí?

**Pablo** Número racional

**Estudiante I** X

**Pablo** Pero antes una pregunta, Estudiante I, ¿esa es la función seno pero literal, literal?

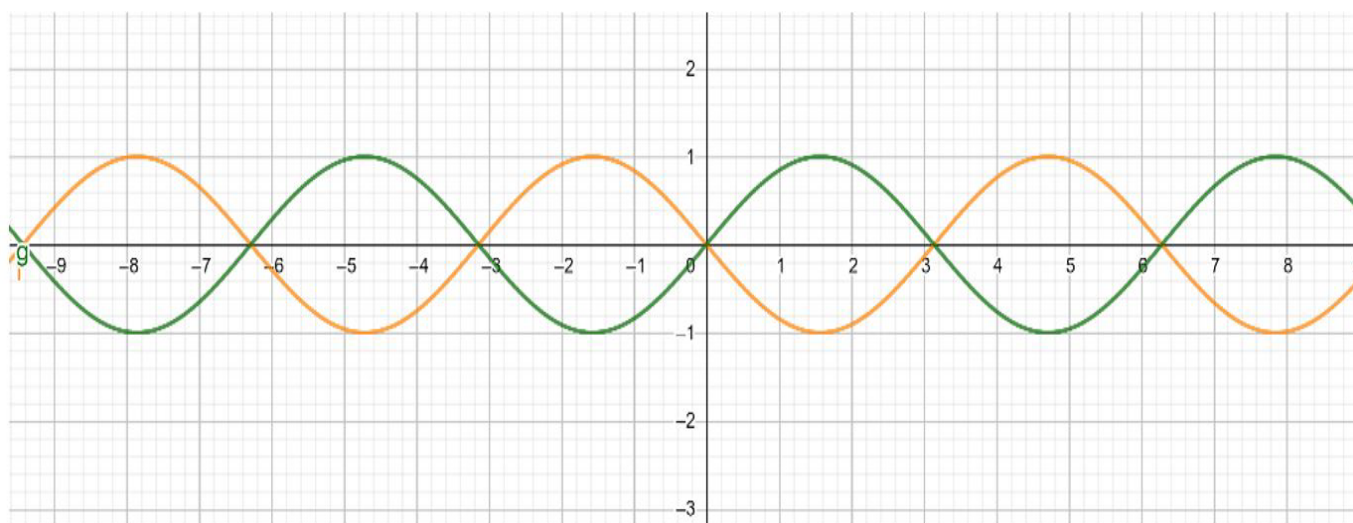


Figura 3. Gráfica de la función  $\text{Sen } x$  y su reflexión  $-\text{Sen } x$  (forma de célula) mediante el software Geogebra



En este apartado se evidencian indicios de conocimiento de Pablo acerca de las definiciones de los contenidos que enseña, categoría del KoT. Puntualmente de la reflexión de la función seno. Realiza preguntas inducidas a sus estudiantes como esta: *¿cómo hacer la reflexión de  $\text{sen } x$ ?*, de manera que a partir de la representación dinámica de la reflexión de la función seno, los estudiantes analicen que es el signo que antecede a la función, la constante o valor real que determina la reflexión de dicha función, en el caso de la función *seno*  $x$ , reflexión es  $-\text{sen } x$ . Así mismo, es interesante, que es el propio estudiante H, quién confirma la definición antes en mención, lo que se intuye se da de manera fluida (respuesta del estudiante) dado la buena formulación de las preguntas que realiza Pablo. Aparte, el conocimiento del profesor sobre la categoría de definiciones se hace aún más evidente, cuando este formula preguntas a los estudiantes cómo: *¿cuál es el dominio y rango de la función reflexión de seno  $x$ ? ¿Se mantiene el dominio y el rango de la función reflexión con respecto a la función seno  $x$ ?, ¿el período?*, que se intuye realiza para que los estudiantes analicen las distintas variaciones que pudieran surgir en estos conceptos, lo cual está alineado con el DC1 de la Tabla 1 con respecto a que el profesor de matemáticas debe saber la definición de la función trigonométrica seno para su representación dinámica usando las TIC (GeoGebra), ya que se constató que Pablo sabe que antes de hacer el proceso de reflexión de la función, es necesario considerar el signo de la función a la cual se le va a realizar este proceso, para luego analizar su comportamiento analítico en el plano, en este caso de la función seno; así mismo, el conocimiento de Pablo de algunas propiedades de la reflexión de la función seno ( $-\text{sen } x$ ), como es el dominio y rango. Al afirmar que la función reflexión no sufre modificaciones en las propiedades antes mencionadas, sin embargo, invita a que sean los propios estudiantes quienes lo verifiquen mediante la observación de la gráfica.

En línea con el mismo subdominio de conocimiento (KoT), se evidencia que Pablo no solamente conoce de las definiciones de los conceptos matemáticos, sino también de las propiedades de esos conceptos. Se evidenció que Pablo sabe que dentro de la función seno, existen propiedades que la componen y caracterizan, como son: el rango, dominio y período, y es por esa razón que indaga acerca de estas propiedades, utilizando la representación dinámica de la función reflexión del seno (Figura 2) en GeoGebra como medio, lo que a su vez guarda relación con el DC3 de la Tabla 1, debido a que Pablo aplica las propiedades de la función trigonométrica *seno* (dominio y rango) para llevar a cabo la representación dinámica de esta en GeoGebra. Lo que también se alinea con el conocimiento del profesor acerca de la categoría de registros de representación (KoT), específicamente del registro gráfico y de notación, puesto que, Pablo utiliza GeoGebra en la representación de la función *seno* al hacer afirmaciones de que  $y = -\text{sen } x$  es la reflexión de *seno*  $x$ , lo que evidencia acercamientos de conocimiento para representar la función trigonométrica seno y sus propiedades en cada uno de sus registros (DC2). Se considera que son solamente acercamientos, dado que un momento puntual del episodio un estudiante afirmó que el período de la función  $-\text{sen } x$ , es de  $2\pi$  lo cual matemáticamente no es correcto, ya que lo correcto es afirmar que el período de la función es de 0 a  $2\pi$ . Se cree que Pablo desaprovechó una buena oportunidad para evidenciar conocimiento no solamente del KoT con respecto a que sabe de la notación matemática de los contenidos que enseña, sino también del KMT para identificar en qué momento brindarle una ayuda a un estudiante que está cometiendo un error conceptual.

Ahora bien, en cuanto al dominio de conocimiento didáctico-Pedagógico, Pablo muestra conocimiento acerca de la categoría ejemplos para la enseñanza (KMT), ya que a través de la representación dinámica de la función seno y su reflexión en GeoGebra de manera simultánea, como se observa en la Figura 3. Propone que los estudiantes

identifiquen las variaciones y comportamientos en el plano cartesiano de cada una de estas funciones. Es interesante que el estudiante B responde las preguntas que Pablo formula, manteniéndose la misma secuencia en el transcurrir de la clase con respecto a que Pablo induce a que los estudiantes respondan. A su vez, esto se alinea con DE2, ya que el profesor sabe de variedad de ejemplos que se pueden realizar con herramientas y/o recursos TIC que ayudan en la representación dinámica de la función trigonométrica seno y sus propiedades. Aparte, se intuye que Pablo sabe que la mejor manera de analizar el comportamiento gráfico de dos funciones y sus propiedades es ejemplificando las mismas mediante un software como GeoGebra, que dada su funcionalidad permite un análisis profundo de lo que ocurre en el plano cartesiano.

En ese orden, Pablo también evidencia conocimiento de la categoría de potencial del material virtual, en este caso del software especializado GeoGebra, debido a que sabe que utilizando los comandos de este, se puede llevar a cabo la representación gráfica y dinámica de las funciones  $\sin x$  y de  $-\sin x$  (reflexión de  $\sin x$ ). Como se observa en la Figura 3, en donde utiliza la opción de colores del software para diferenciar las funciones, en este caso en color verde ( $\sin x$ ) y en naranja ( $-\sin x$ ), para con ello realizar análisis de las dos gráficas, mediante preguntas como: *¿ahora qué pasó ahí?*, que facilitan el análisis e introducción a nuevos conceptos con objetivo de estudio en la clase, ya que al observar las gráficas en GeoGebra un estudiante aseguró que al estar la gráfica de color verde por encima de la gráfica en color naranja, es índice de que se realizó una reflexión a lo largo del eje  $x$ . Afirmación que es oportuna para que Pablo pregunte a sus estudiantes acerca de *¿cuál es el eje de simetría?* Contenido que es un derivado de la reflexión de funciones en el plano cartesiano, y que se percibe quiere que los estudiantes identifiquen aún si profundizar mucho sobre el mismo, mediante las gráficas en GeoGebra. Lo cual a su vez está alineado con el DE1 que hace referencia a que un

profesor de matemáticas debe saber la efectividad de herramientas TIC en la representación dinámica de la función trigonométrica seno y sus propiedades, y que Pablo evidencia a cabalidad, debido a que este sabe lo que software puede ofrecerle para la enseñanza de los contenidos. Un ejemplo de esto son los ejercicios que plantea en clase y que permiten hacer análisis de tipo gráfico, que es una de las mayores funcionalidades de este software para la enseñanza. Ahora bien, es curioso que en la figura que representa las gráficas de estas dos funciones de manera simultánea, Pablo conoce de ejemplos para la enseñanza (KMT) para relacionar la célula como elemento del medio que se asemeja al modelado de las gráficas en el software.

### Análisis y Discusiones

En el episodio seleccionado para este artículo de investigación, los subdominios del MTSK en los cuales más se evidenció conocimiento del profesor para la enseñanza de la reflexión de la función trigonométrica  $\sin x$  mediante el software GeoGebra de manera efectiva fueron el KoT y el KMT. Así, se tiene que de acuerdo con lo observado Pablo muestra dominio e indicios de conocimiento en algunos de los indicadores del MTSK propuestos en la Tabla 1 y 2. Del KoT, se muestran acercamientos de CC1 (Conocimiento de las definiciones), debido a esto, se le facilita representar la función  $-\sin x$  en GeoGebra y a partir de esta analizar visualmente el comportamiento de esta gráfica en cuanto a su dominio, rango, y período, además de comparaciones entre estos elementos con respecto a la función  $\sin x$  que constituye al concepto de reflexión y que se percibe que Pablo conoce a manera general, es decir adaptado a cualquier tipo de función.

Esto a su vez, está muy relacionado con CC3 (Conocimiento de las propiedades y fundamentos), ya que para poder realizar análisis comparativos entre la funciones  $\sin x$  y  $-\sin x$  es clave que el profesor conozca del dominio, rango y período de la función original, en este caso propiedades de la función  $y = \sin x$  para poder centrar la mirada en las

variaciones, cambios y/o similitudes que sufre esta cuando se le realiza su reflexión en el plano ( $-sen x$ ). Lo cual es interesante, ya que relaciona indicadores de dos categorías del mismo subdominio del modelo, en este caso del conocimiento de los temas y que ambas son necesarias y complementarias dentro del conocimiento del profesor en la enseñanza de la reflexión de la función  $seno x$ .

De igual manera, en cuanto a CC2 (Conocimiento de los registros de representación) se encontró como indicio de conocimiento de Pablo, el buen uso de la notación formal al saber que la reflexión de la función  $seno x$  esta definida como  $y = -sen x$ , conocimiento que es interesante y que a su vez guarda relación como el fomento al uso del lenguaje formal dentro de las matemáticas, categoría del KPM, que a pesar que no se profundiza en esta investigación, enmarca la relación que se da entre estos dos subdominios del modelo, ya que se requiere saber la forma en cómo se escriben matemáticamente elementos como la reflexión de una función para poder fomentar en clase a que este lenguaje sea utilizado. Ahora, en cuanto al anterior indicador visto desde el registro gráfico, se evidenció que Pablo sabe que mediante GeoGebra puede hacer la representación de la función trigonométrica seno y su reflexión, además, visualizar e interactuar con ambas gráficas de manera simultánea. Lo que enmarca la conexión que existe entre CC1, CC2 y CC3 con respecto a que para que sea efectivo el análisis gráfico que el profesor hace de la función  $sen x$  de manera paralela con  $-sen x$ , es importante que este sepa el concepto de reflexión y de las propiedades que componen a la función  $seno$  como: dominio, rango, traslación y período. En ese sentido, es interesante la conexión que existe entre 3 categorías del KoT y de cómo se vio anteriormente entre una categoría del KPM y otra del KoT, pertenecientes todas a un mismo dominio de conocimiento (MK) del MTSK y que son esenciales en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Por otra parte, en cuanto al KMT, se evidencian indicios significativos de conocimiento en algunos de los indicadores diseñados para analizar el conocimiento especializado del profesor. Así, se tiene que en CE1 (Conocimiento de la potencialidad del recurso material y/o virtual en la enseñanza de las matemáticas), Pablo mostró saber que la utilidad de GeoGebra como software especializado de las matemáticas permitía de manera simultánea el análisis de las funciones  $seno x$  y  $-sen x$ , puntualmente en elementos como el dominio, rango y período, ya que a través de la observación, Pablo les pidió a los estudiantes que encontraran la diferencia entre las funciones, apoyados a su vez en el comando colores que ofrece el software y que permite diferenciar a cada función graficada, como se observa en la figura 3. Lo cual se confirma con lo respondido por Pablo en el cuestionario previo a las unidades de información hechas a Pablo, en donde afirmó que dentro de los potenciales de GeoGebra en la enseñanza de las funciones trigonométricas está que de manera inmediata se pueden realizar variaciones en las propiedades de las funciones como dominio y rango, ya que de manera dinámica el software grafica cualquier tipo de función de manera momentánea, por lo que los análisis son más rápidos y precisos, siendo un ejemplo de lo que afirma la Figura 3.

Ahora bien, ante las preguntas de tipo inducido que Pablo propone a los estudiantes de acuerdo a la observación de las gráficas que se muestran en la Figura 3 acerca de las variaciones en las propiedades de seno. El estudiante B respondió de manera correcta a partir de la orientación que previamente Pablo le dio lo siguiente: “*en la reflexión de la función seno, el rango sigue siendo de menos uno a uno, el dominio sigue siendo todos los reales porque es infinito hacia todos los grados y el periodo sigue siendo de  $2\pi$* ” esto enmarca una vez más la relación entre dos indicadores del MTSK, en este caso de subdominios de dominios diferentes del modelo, ya que para “*saber la efectividad de herramientas TIC en la representación dinámica de*

la función trigonométrica seno y sus propiedades (DE1)”) es necesario saber de las definiciones y propiedades que componen a la función seno (KoT) de modo que puedan ser representados y analizadas gráficamente mediante el modelado de  $\sin x$  y  $-\sin x$  en GeoGebra. Lo anterior demuestra la versatilidad del modelo MTSK ya que permite establecer relaciones entre subdominios del MK y del PCK, permitiendo así explorar en profundidad el conocimiento especializado del profesor no solo desde lo matemático, sino desde lo didáctico-pedagógico en la enseñanza de la reflexión de la función *seno* utilizando las TIC de manera efectiva.

Siguiendo con la línea anterior, se tiene que de CE2 (conocimiento de tareas, estrategias, ejemplos y actividades que ayudan a la enseñanza de contenidos de matemáticas., inmerso dentro del subdominio del KMT, se evidencia en la práctica del profesor, ya que este sabe identificar que a través de la representación de funciones particulares como:  $\sin x$  y  $-\sin x$  en GeoGebra, se pueden llevar a cabo análisis del concepto de reflexión de una función, puesto que este indaga sobre las propiedades de la función estudiada ( $\sin x$ ), como el dominio y rango a partir de su reflexión en el plano. Así, es interesante la relación que existe entre CE2 con CE1 del KMT e indicadores del KoT propuestos en la Tabla 1 como CC1 y CC3. Esto pues, se considera relevante que el profesor sepa las ventajas que le permite GeoGebra para ejemplificar contenidos de las matemáticas que enseña utilizando este software. En los hallazgos de esta investigación, se observó la posibilidad de interacción de dos o más funciones de manera simultánea, lo cual es índice de relaciones que se dan dentro del MTSK, en este caso de dos categorías que forman el KMT. Ahora, el indicador antes estudiado (CE2), guarda relación también con los indicadores del KoT, ya que para ejemplificar un contenido de las matemáticas escolares, es necesario saber de la definición y propiedades que componen este, y que se muestra en este episodio de análisis, cuando Pablo al modelar la gráfica en GeoGebra, de la función  $y=-\sin x$ , les pregunta a

los estudiantes: ¿*esa es la función seno pero literal, literal?*, pregunta inductiva que se intuye busca que los estudiantes identifiquen el concepto de reflexión de una función, como se observa en la Figura 2 y que es muestra del conocimiento del profesor acerca de este concepto.

Del mismo modo, se encontró relaciones entre el CC3 (conocimiento de las propiedades y fundamentos) con CE2 (conocimiento de tareas, estrategias, ejemplos y actividades que ayudan a la enseñanza de contenidos de matemáticas) ya que es necesario que el profesor sepa de las propiedades de la función *seno*, como lo son el dominio, rango y período para poder analizar las mismas a través de la ejemplificación de la función y su reflexión en GeoGebra, lo que se evidencia en este episodio con preguntas que realiza Pablo acerca de las variaciones que sufre la función posterior a su reflexión y que se ven plasmadas de manera gráfica en la Figura 3. Por lo que este episodio de análisis da cuenta de las múltiples relaciones que se puedan dar entre categorías de un mismo subdominio, subdominios del mismo dominio y subdominios de diferentes dominios del MTSK.

No obstante, se considera que a manera de verificación del conocimiento de sus estudiantes, Pablo pudo proponer otro tipo de ejemplos que relacionar a la función seno, e indagar por su respectiva reflexión, esto es funciones de la forma  $\sin x$ ,  $\sin(x+h)$ ,  $\sin(x-h)$ ,  $\sin(x+h)$ , entre otras. Aparte, con este tipo de funciones pudo haber llegado a una mayor generalización de la reflexión vista desde la función trigonométrica *seno*.

## Conclusiones

En este estudio se evidenciaron significativamente dos subdominios que componen al modelo MTSK en la práctica del profesor participante. Estos son el KoT y el KMT y algunas de las categorías que los componen, como: definiciones, registros de representación, propiedades, potencialidad del recurso y conocimiento de ejemplos,

actividades, tareas y estrategias mediante el uso de las TIC (GeoGebra) en la enseñanza de la reflexión de la función trigonométrica seno. Se comprobó que es necesario que el profesor de matemáticas conozca a profundidad los fundamentos teóricos de los contenidos que enseña, para plasmarlos de manera efectiva utilizando GeoGebra, la cual es una herramienta cuyo potencial está caracterizado en la visualización y dinamización de los contenidos de la matemática. Así mismo, se evidenció relaciones entre el conocimiento matemático y didáctico-pedagógico, las cuales cobran importancia en búsqueda del conocimiento especializado en la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel de escolaridad. De esta manera, es relevante los indicadores propuestos en esta investigación dentro de la formación del profesorado de matemáticas que pretenda enseñar contenidos de las matemáticas utilizando GeoGebra, Matlab, Geo TIC, Cabri y otro tipo de software especializado en el campo de la educación matemática.

### Agradecimientos

A MinCiencias y su convocatoria 809 formación del capital humano en el Atlántico-Colombia por permitir desarrollar de manera exitosa esta investigación gracias a su apoyo financiero para la realización de los estudios de maestría del primer autor.

### Referencias

- Acevedo-Rincón, J., y Flórez-Pabón, C. (2020). Matemáticas, Tecnología y Formación STEM. Congreso Iberoamericano de Educación Emergente CIED, 156 – 164
- Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389 - 407
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, M., y Muñoz, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 236-253, DOI: 10.1080/014794802.2018.1479981
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Muñoz, M. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics. In Proceedings of the CERME, 8, 2985-2994
- Carter, S. (2020). Case Study Method and Research Design: Flexibility or Availability for the Novice Researcher? En H. van Rensburg & S. O'Neil (Eds.), *Inclusive Theory and Practice in Special Education* (pp. 301-326). Hershey, Pennsylvania: IGI-Global. 10.4018/978-1-7998-2901-0.ch015
- Cayo, H., y Contreras, L. (2020). Algunos elementos claves del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la gestión de las relaciones área-perímetro. *Educación Matemática*, 32(2), 39-68. DOI: 10.24844/EM3202.02
- Cullen, C., Hertel, J., y Nickels, M. (2020). The roles of Technology in Mathematics Education. *The Educational Forum*, 84(2), 166- 178. <https://doi.org/10.1080/00131725.2020.1698683>
- Delgado, R., y Zakaryan, D. (2019). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1 – 21
- Depaepe, F., Verschaffel, L., y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 34, 12 – 25. DOI: 10.1016/j.tate.2013.03.001
- Escudero, D., y Carrillo, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación Matemática*, 32(2), 1-38. DOI: 10.24844/EM3202.01
- Fennema, E., y Franke, L. (1992). Teacher's Knowledge and its impact. In D.A. Grows (Ed). *Handbook of research on mathematics teaching*

- and learning*, 147 – 164
- Flores, E., Escudero, D., Montes, M., Aguilar, A., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. *Publisher Universidad de Huelva Publicaciones*, 57 -72
- Hernández-Sánchez, J., Borjón-Robles, E., y Torres-Ibarra, M. (2016). Dimensiones de la tecnología en la formación inicial de profesores de matemáticas: un estudio desde el currículum oficial. *Eco Matemático*. 7(1), 6–19. DOI: <https://doi.org/10.22463/17948231.1008>
- Huda, R., y Qohar, A. (2021). Student Activeness and Understanding in Mathematics Learning Using GeoGebra Application on the Trigonometry Radio Topic. *AIP Conference Proceedings* 2330, 040034 (2021); <https://doi.org/10.1063/5.0043140>
- Krippendorff, K. (2013). *Content Analysis: an introduction to its methodology*. Thousand Oaks: Sage
- Liñan, M. (2017). *Conocimiento especializado en Geometría en un aula de 5º de primaria*. Universidad de Huelva, Departamento de Didácticas Integradas.
- MEN. (2016). *Resolución 15683*. Bogotá: MEN
- OCDE (2019a). *Estrategias de Competencia de la OCDE 2019. Competencias para construir un futuro mejor*. Ed. 21 Fundación Santillana: OCDE
- OCDE (2019b). *Programme for International Students Assessment (PISA) Results from PISA 2018*, Publishing in Paris. <https://doi.org/10.1787/acd78851-en>
- Padilla-Escorcía, I. (2020). *Una caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para el uso efectivo de las TIC en la enseñanza*. [Tesis de Maestría en Educación de la Universidad del Norte-Colombia]
- Padilla-Escorcía, I., y Acevedo – Rincón, J. (2020). El Conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas: Mediaciones con TIC para las funciones trigonométricas. *Série Educar Matemática*, 43, 109 – 118. DOI: 10.36 229/978-65-86127-63-8
- Padilla-Escorcía, I., y Conde-Carmona, R. (2020). Uso y formación en TIC en profesores de matemáticas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (60), 116-136. <https://www.doi.org/10.35575/rvucn.n60a7>
- Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2009). Elementary Teacher’s Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 255 - 281
- Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *American Educational Research Association*, 4 – 14
- Silverman, D. (2008). *Doing qualitative research (2nd edition)*. Thousand Oaks: Sage Publication.
- Stake, R. (2010). *Qualitative research. Studying how things work*. The Guilford Press. New York - London
- Stein, H., Gurevich, I., y Gorev, D. (2020). Integration of technology by novice mathematics teachers – what facilitates such integration and what makes it difficult? *Education and Information Technologies*, 25(1), 141 -161. <https://doi.org/10.1007/s10639-019-09950-y>
- UNESCO. (2017). *E2030: Educación y Habilidades para el Siglo XXI*. Santiago de Chile. UNESCO
- Zamora-Aray, J., Ramirez-Jiménez, J., y Delgado-Navarro, F. (2020). Uso de herramientas tecnológicas y su impacto en el rendimiento en el curso de Cálculo II de la Universidad Nacional. *Eco Matemático*, 11(1), 6-17. <http://dx.doi.org/10.1016/j.eq>