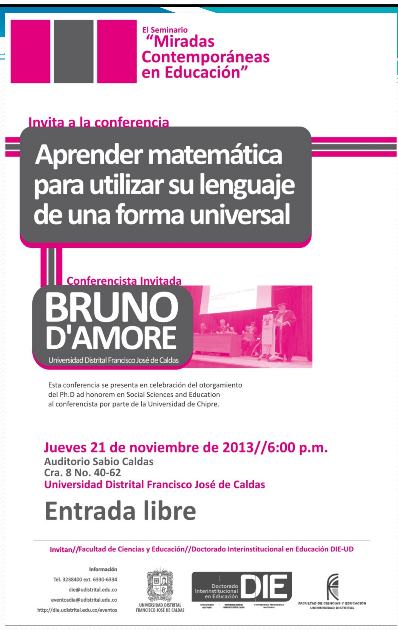


La semiótica para la didáctica: una exigencia emergente

Bruno D'Amore

PhD Mathematics Education
PhD Honoris Causa Universidad de Chipre
NRD Universidad de Bologna
MESCUD Universidad Distrital de Bogotá
GRADEM, Universidad de Barcelona, España
Sitios oficiales:
www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net/sitoufficialebm/index.php

Conferencia de Bruno D'Amore Univ. de los Andes 16 de noviembre de 2013

Las dificultades dentro del proceso de transformación semiótica

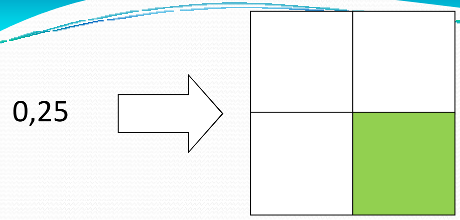
Conferencia de Bruno D'Amore Univ. de los Andes 16 de noviembre de 2013

Desde los primeros estudios de Raymond Duval sobre la semiótica en aula durante las clases de matemática, a finales de los ’80, fueron reconocidas por los investigadores y por los docentes más cercanos al mundo de la investigación las dificultades que encuentran los estudiantes cuando realizan transformaciones semióticas, en las actividades matemáticas.

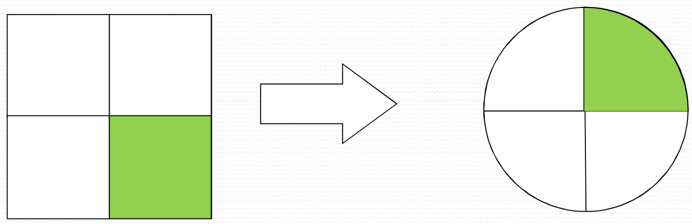
Inmediatamente nos dimos cuenta de que este tipo de análisis permitía entender unas dificultades de los estudiantes que, hasta poco antes, no se sabía ni siquiera cómo describir

Ahora, las primeras observaciones e investigaciones fueron realizadas sobre la transformación de conversión dado que, efectivamente, a primera vista, parecería que fuese más complejo, para un joven aprendiz, dominar registros diversos inmovilizando el objeto matemático.

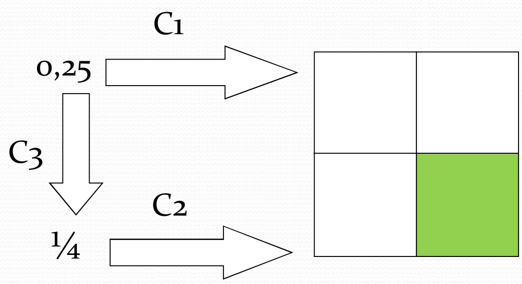
Por ejemplo, transformar la representación semiótica 0,25 en la coloración de la cuarta parte de una figura, no es del todo banal. Se debe pasar del registro de la escritura aritmética al registro de las figuras geométricas.



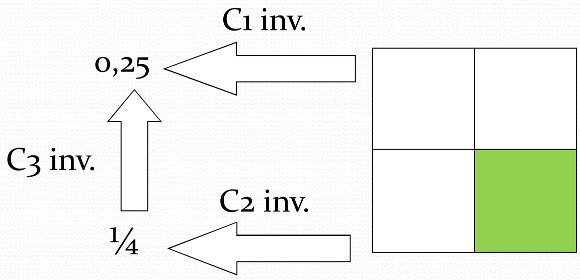
Mientras la transformación de tratamiento parecería mucho más simple:



Pero las pruebas hechas en aula muestran inmediatamente que, incluso para estudiantes muy jóvenes, de 4º o 5º primaria, era por el contrario mucho más fácil llegar a la figura cuadrada precedente a partir de ¼ que a partir de 0,25; y que resultaba más compleja la transformación que permite pasar de 0,25 a ¼ .



De la práctica escolar resulta que, en general, como mínimo para el caso precedente, la transformación de conversión C3 es relativamente compleja, la transformación de conversión C1 es mucho más compleja, mientras que C2 es mucho más accesible. ¿Y qué decir de las transformaciones inversas?



La experiencia didáctica dice que la transformación de conversión C3 inv. es un poco más compleja que la precedente C3; que la transformación de conversión C1 inv. es mucho más compleja que la C1; y que la C2 inv. es más o menos equivalente a la C2.

No está dicho que, entre transformaciones de conversión y sus inversas, exista una relación cognitiva.

Podemos decir lo mismo en relación con las transformaciones de tratamiento y sus inversas.

Estas revelaciones nos hacen pensar que una simple categorización no es posible y que nosotros docentes debemos estar siempre atentos. Pero sobre este argumento volveremos.

Conferencia de Bruno D'Amore Univ. de los Andes 16 de noviembre de 2013

Dos notas breves de profundización, destinadas a los más interesados, antes de proceder.

Una primera nota está relacionada con la lengua natural como registro.
Sin embargo, aun aceptando que la lengua natural sea un registro, se debe precisar en forma explícita que (a diferencia de lo que se podría considerar en modo ingenuo) se trata de un registro mucho más complejo que los otros normalmente propuestos y citados. En primer lugar, este registro permite unos funcionamientos discursivos (y por tanto tratamientos) muy heterogéneos. Existe entonces un funcionamiento espontáneo que es él de las conversaciones, narrativo, de las discusiones, de las argumentaciones y existe un funcionamiento especializado que se encuentra, por ejemplo, en el razonamiento deductivo en matemática, y que es del todo diverso.

Es por esto que Duval (1995, pp. 91 y sig.) distingue cuatro funciones discursivas que caracterizan todo registro que se llame "lengua":

- ✓función referencial (designación de objetos),
- ✓función apofántica (expresión de enunciados completos),
- ✓función de expansión discursiva (articulación de enunciados completos en una unidad coherente),
- ✓función de reflexividad discursiva (transformación de un enunciado completo en modalidad recurrente).

Una lengua, en esencia, a diferencia de los otros registros, es multifuncional (Duval, 1996).

Una segunda nota tiene que ver con el hecho de que si sea lícito o no considerar los contenidos de las representaciones aisladamente, sin especificar el registro de representación, es decir confundir las representaciones con sus contenidos.

Si bien en los ejemplos sucesivos, pero sólo con intención ilustrativa, esto sea propuesto, en realidad se debería siempre tender a presentar el sistema o los sistemas de signos que producen las representaciones y en los cuales estas funcionan como representaciones.

Esto es fácil para el sistema de escritura de los números, o para las figuras geométricas; pero lo es mucho menos para las escrituras algebraica y lógica.
La razón de esta diferencia es la siguiente.
El interés de un sistema semiótico en matemática es, básicamente, permitir un tratamiento (matemático) de las representaciones.
Es necesario por tanto presentarlo, cuando es posible, respecto al juego de transformaciones internas que éstas permiten.
Y, desde este punto de vista, el registro de la lengua natural y el de las figuras geométricas no permiten tratamientos técnicos, ni formales, es decir, transformables en algoritmos; en otras palabras, no son registros monofuncionales.

Un único signo (*representamen*) que admite componentes simbólicas diferentes del mismo objeto matemático obstaculiza la construcción cognitiva del objeto matemático: un ejemplo convincente

Otros estudios fueron hechos entre 1993 y 2001 en el ámbito de las investigaciones sobre el uso de la semiótica en didáctica de la matemática, por el NRD (Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática) del Departamento de Matemática de la Universidad de Bologna.
Uno de esos estudios estuvo relacionado con la interacción entre semiótica y significado, por ejemplo sobre la **relación de igualdad**, considerada accesible de ser propuesta incluso en la escuela primaria
(Camici et al., 2002; la descripción y los resultados de esta investigación pueden ser consultados en el sitio: www.dm.unibo.it/rsddm).

Es muy conocido que el adulto competente piensa en la igualdad (=) dada en un conjunto I como a una relación binaria de equivalencia, por tanto: reflexiva, simétrica y transitiva (desde un punto de vista estructuralista se usa escribir, en modo elegante y compacto, pero incomprensible a la mayoría: $= \subseteq I^2$).

Pero hoy sabemos muy bien que el niño pequeño piensa no en un **significado relacional**, sino en un **signo de procedimiento** (da, es etc.).

Esto explica varios significados que el estudiante asigna impropiamente al signo (*representamen*) "=" y por tanto al objeto matemático "igualdad";
en otras palabras, el *representamen* "=" genera interpretantes (en el sentido de Peirce) diferentes según el *conocimiento colateral* en juego (véase el parágrafo 1.11.), a pesar de la componente simbólica (relación binaria de equivalencia) conferida a él por el sistema semiótico que lo produce, en relación con el objeto matemático "igualdad".

Ejemplos.

a)

7+3=10 es una escritura considerada lícita por los niños, pero 10=7+3 no lo es.

Esto se debe a que la primera es interpretada como *7 más 3* ***da*** *10*; y este significado no es compatible con la escritura 10=7+3 porque «10, por sí sólo, no da nada; si lo escribes al revés, entonces sí»; la cuestión es generalizada y se encuentra también en la escuela media (6° y 7° grado).

b)

8+2=7+3 no es considerada correcta, por qué «8+2 no da 7»;

aquí la cuestión se complica desde el punto de vista semiótico porque algunos signos no están escritos, por ejemplo aquellos que indican la fuerza cohesiva de las operaciones o de las relaciones, no siempre hechas explicitas a los niños.

El adulto competente interpreta 8+2=7+3 como (8+2)=(7+3), sin necesidad de paréntesis, dando a la operación + una fuerza más cohesiva que a la relación =; mientras que el niño lee de izquierda a derecha, así como le fue enseñado, dando más cohesión, más importancia a este verso de lectura e interpreta por tanto como: [(8+2)=7] y no sabe cómo explicarse la aparición de aquel +3.

Este hecho es documentado tanto por nuestra investigación como por la investigación internacional y lo veremos en acción incluso después; esto está siempre presente en la escuela primaria y tiende a desaparecer en los primeros años de la secundaria.

Pero el problema se presenta de nuevo en los últimos años de la secundaria.

c)
Consideremos el siguiente ejercicio cuya resolución trae a colación dos operaciones:
Una señora compra 3 cajas de colores; cada caja contiene 12 colores; cada color cuesta € 1,5. ¿Cuánto gasta en total?

Resolución esperada:
$12 \times 3 = 36$
$36 \times 1{,}5 = 54$.

Resolución en ocasiones propuesta por los estudiantes:
$12 \times 3 = 36 \times 1{,}5 = 54$.

En la segunda resolución, = es interpretado en sentido de procedimiento; si fuese posible interpretarlo como relación, por la propiedad transitiva tendríamos que $12 \times 3 = 54$; si se enfrenta al niño con esta incoherencia que el adulto reconoce, el niño ni siquiera la entiende

(y, en cualquier caso, el estudiante en general es fatalmente indiferente a nuestra intensión de hacerle ver incoherencias; véase D'Amore, Martini, 1997, 1998).

Todo lo que estamos señalando no tiene que ver sólo con estudiantes de primaria, sino también con los de secundaria.
Esto explica el por qué el estudiante en la secundaria considera (en ocasiones) necesario hacer los siguientes pasajes en algebra:

$-5+3=x-7$

$-x-5+3=-7$

$x+5-3=7$

para poder proceder en el cálculo, en lugar de escribir inmediatamente:

$x-7=-5+3$

aprovechando el hecho de que la igualdad es simétrica, o, de hecho, sin ni siquiera cambiar los términos de cada uno de los miembro:

$-2=x-7$

$-2+7=x$

$+5=x$.

Lo cual explica porque, cuando el estudiante llega a la escritura:

$5=x$

no se siente autorizado a pensar que los cálculos han terminado y que la solución es +5, sino que se siente en el deber de escribir:

$+5-x=0$ y después $-x=-5$ terminando con $x=+5$

que tenía ya a disposición

(entre otras cosas, con estos pasajes inútiles, el riesgo de cometer un error o de confundirse es muy grande y siempre está latente, especialmente cuando aparece o en el primero o en segundo miembro de la igualdad).

d)
Aún más, el sentido de la igualdad se pierde en situaciones como la siguiente, experimentada por nosotros en la escuela primaria y secundaria:

Escribir en el recuadro el número que hace verdadera la igualdad:

11-6=□-11.
La respuesta obvia es 16, en cuanto 11-6=16-11. Pero las respuestas de los niños y de los jóvenes se dividen principalmente entre «5» y «6».

Quien da la respuesta 5 la justifica afirmando
«porque 11-6 da 5»,
ignorando y no entendiendo la función de "aquel raro -11 que aparece a la derecha" (lo cual es explícitamente denunciado por los estudiantes).

Quien da la respuesta 6 deja entrever una especie de simetría del signo =:
«de una parte aparece 11-6 y de la otra 6-11»;
algún alumno de escuela secundaria da como respuesta incluso -6, pero después no sabe muy bien como regularse con el signo menos que aparece adelante de 11.

Ahora bien, todas estas actitudes, señaladas por la investigación como errores, misconcepciones o malentendidos, hoy son más fácilmente analizables, gracias a los instrumentos que nos ofrece la investigación que engloba la semiótica.

Existe una disociación entre el significado que un adulto asigna al objeto de saber matemático (relacional) “igualdad” y aquel que le atribuye, en la praxis, el estudiante.
El objeto matemático “igualdad” es por lo general asociado a un único *representamen,* es decir a representaciones semióticas con un único contenido (en todos los registros semióticos posibles), es decir: =.

Pero = tiene tantos significados (interpretantes) diferentes que no son reconocidos por los estudiantes e incluso algunos docentes confiesan no haberlo pensado antes; para nosotros, todo esto se debe a un limitado número de *representamen* o (contenidos) de representaciones semióticas, utilizadas usualmente para designar un mismo objeto matemático frente a un exceso de significados semánticos (interpretantes).

Dicho en otras palabras, el objeto matemático es uno sólo, y el decir “igual” entre números, entre operaciones, entre figuras, entre medidas (expresadas en la misma unidad de medida), entre conjuntos, debería permitir captar antes, y construir después, todos los significados diversos que constituyen el objeto (o los diversos interpretantes en relación con el objeto); en caso contrario, esos significados quedarían fuera de alcance.

¿Qué significa, por ejemplo, el signo (*representamen*) = en cada uno de los siguientes casos? Éste asume o genera significados (interpretantes) muy diferentes entre ellos para poder entrar en el juego semiótico y permitir una correcta construcción cognitiva:

A = {a, b, c}: "está formado por"

$\overline{AB}$ = 5 cm: "mide"

x = -3: "tiene el valor"

$y = f(x)$: "y es la ordenada obtenida a partir de la abscisa x usando f"

AB = CD: "coincide" o "es superponible"

$A_T = \frac{b \times h}{2}$: "se calcula haciendo"

3×5 = 15 : "es igual", "da" o "da como resultado"

$\vec{u} = \vec{v}$ "misma dirección, mismo verso, mismo módulo"

Y existen muchos otros, tantos otros significados (interpretantes) del signo (*representamen*) = que se usan en la escuela.

Repetimos: el objeto matemático es el mismo, las facetas de significado son tantas y todas diversas, pero **todas juntas contribuyen, o deberían contribuir, a dar un sentido general a la idea de igualdad**.
La univocidad del signo (*representamen*) usado para todos estos significados no ayuda al estudiante en la construcción cognitiva correcta de este objeto matemático.
Para ayudar en la construcción cognitiva correcta de un objeto matemático *sirven*, y no es algo opcional, más de un *representamen* o representación semiótica para indicar las varias componentes conceptuales del objeto.

Si no queremos crear signos matemáticos diversos de aquellos ya conocidos, y no lamentarnos después si el niño escribe: $12\times3=36\times1,5=54$, o no admite la escritura $10=7+3$;
por lo menos deberíamos avisar a los estudiantes, alertarlos, discutir con ellos de estos problemas en todos los niveles escolares, no fingir que el problema no existe, no esconderlo.

Si el estudiante cae en estas interpretaciones erróneas, recordemos que la causa somos nosotros, con nuestro *proteccionismo semiótico*.

Lo tratado acá solo es una muy pequeña parte del contenido del texto:

Conferencia de Bruno D'Amore Univ. de los Andes 16 de noviembre de 2013