

1

Juan Luis Prieto G.
Rafael Enrique Gutiérrez Araujo
Irene Victoria Sánchez-N.
Stephanie Díaz-Urdaneta
Ivonne C. Sánchez-S.
Luis Andrés Castillo B.

CONTRIBUCIONES DE LA TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN AL ESTUDIO DEL APRENDIZAJE GEOMÉTRICO EN CONTEXTOS DE ELABORACIÓN DE SIMULADORES CON GEOGEBRA

INTRODUCCIÓN

En este capítulo describimos cómo la Asociación *Aprender em Red* ha venido utilizando principios proporcionados por la Teoría de la Objetivación - TO (RADFORD, 2020) para analizar el aprendizaje geométrico producido en contextos de Elaboración de Simuladores con GeoGebra (ESG), realizando el rol que juega el GeoGebra en la producción de este tipo de aprendizaje. Para ello, primeramente, discutimos cómo nos hemos aproximado a la TO y, en consecuencia, la hemos tomado como marco teórico idóneo para nuestros propósitos e intereses de investigación.

Con respeto a ello, en 2013 iniciamos en Venezuela un proyecto socioeducativo llamado Proyecto Club GeoGebra²⁶, orientado a alumnos de Educación Media²⁷ del Estado Zulia (oeste del país). Los *Clubes GeoGebra* se conciben como espacios no convencionales de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y de la Física, en que alumnos y profesores (tanto en servicio como en formación inicial) se dedican a elaborar, con el software GeoGebra, simuladores computacionales representando diferentes fenómenos naturales o artificiales de determinados aspectos de la realidad (PRIETO; GUTIÉRREZ, 2015; 2016; 2017). A medida que el proyecto avanzaba, íbamos reconociendo la ESG como un conjunto de actividades educativas no convencionales con potencial para conducir procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría entre profesores y alumnos participantes.

Este reconocimiento se consolidó en el desarrollo de una agenda de investigación acerca de la ESG (PRIETO; DÍAZ-URDANETA,

26 Para más información sobre el proyecto: <http://www.aprenderenred.com.ve/clubgeogebra>.

27 Nivel de enseñanza escolar equivalente a los Años Finales de la Enseñanza Fundamental (*Anos Finais do Ensino Fundamental*) y Enseñanza Secundaria (*Ensino Médio*) en Brasil.

2019), orientada por preguntas que abarcan diferentes aspectos de esa actividad: i) ¿En qué medida la matemática escolar interviene en la ESG? ii) ¿Cómo es la actividad matemática que sucede en la ESG? iii) ¿Qué y cómo se aprenden matemáticas durante la ESG? iv) ¿Cuáles otros conocimientos son manifestados en la ESG? v) ¿Cuáles saberes son movilizados por los profesores que participan del proyecto cuando conducen las experiencias de ESG de sus alumnos?

De todas esas preguntas que nos han ocupado, en la actualidad estamos realizando estudios enfocados en los procesos de *aprendizaje de las matemáticas* (especialmente en geometría) de los alumnos que participan en la ESG y en el rol que juega el profesor en esos procesos. Sin embargo, a pesar de que hemos realizado anteriormente algunos trabajos relacionados con el aprendizaje en situación de ESG (DÍAZ-URDANETA; PRIETO, 2016; SÁNCHEZ-S.; PRIETO, 2017), todo nuestro esfuerzo investigativo comenzó a tener sentido desde el momento en el cual asumimos el proceso de aprendizaje (el que también es un proceso de enseñanza) como el principal fenómeno de estudio, que podría guiar nuestra comprensión con relación al potencial de la ESG para el aprendizaje de la geometría escolar.

Señalamos que esa actitud con relación a ese enfoque de investigación fue inspirada en la aproximación que tuvimos con una perspectiva histórico-cultural del aprendizaje de las matemáticas, la cual revisamos en el próximo apartado.

UNA PERSPECTIVA TEÓRICA PARA INTERPRETAR EL APRENDIZAJE DE SABERES GEOMÉTRICOS

En el año 2017 fuimos invitados para participar de un seminario de investigación cuya temática era la introducción a la TO, teoría que

actualmente utilizamos como referencial en nuestra investigación. Esta teoría, inspirada en trabajos del filósofo alemán G. W. F. Hegel y su posterior desarrollo por K. Marx y otros filósofos de la tradición dialéctica, como L. Vygotsky y E. Iliénkov, propone un modo de entender el aprendizaje humano como un proceso colectivo, cultural e históricamente ubicado que señala el rol del trabajo social humano, el cuerpo, las emociones y el mundo material (RADFORD, 2018b). Esa manera de entender el aprendizaje se inscribe en una comprensión de la Educación Matemática como un esfuerzo:

[...] político, social, histórico y cultural dirigido a la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en discursos y prácticas matemáticas constituidas históricamente y culturalmente, y que contemplan e imaginan nuevas posibilidades de acción y pensamiento (RADFORD, 2018a, p. 73).

La idea de *creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos*, mencionada en la cita anterior, revela uno de los aspectos característicos de la TO: el aprendizaje no se trata sólo de *conocer*, sino de convertirse en *alguien*. Es decir que, para la TO, no es posible que el aprendizaje ocurra si aquel que aprende, más allá de conocer, no se *transforma* (RADFORD, 2017b). No obstante, una de las características fundamentales que definen a esta teoría y que la hacen diferente de otras perspectivas teóricas es la relación que la TO establece entre el profesor y el alumno, una relación ética marcada por la *labor conjunta* que ellos desarrollan. Para la TO, en la labor conjunta,

[...] los estudiantes no son reducidos a un papel de simples sujetos cognitivos. Ellos no aparecen como sujetos pasivos recibiendo saber o como sujetos autónomos que construyen su propio saber. En la misma línea, los profesores no son reducidos a un papel de agentes tecnológicos y burocráticos – guardianes y ejecutores del currículo. Ellos no aparecen como poseedores de saber que entregan o transmiten saber para los estudiantes directamente o a través de estrategias facilitadoras (RADFORD, 2017a, p. 252, nuestra traducción).

Así, en la labor conjunta de la clase, el aprendizaje y la enseñanza son consideradas

[...] no como dos actividades separadas, sino como una única y misma actividad: aquella en la cual profesores y estudiantes, a pesar de no hacer las mismas cosas, se empeñan en conjunto, intelectual y emocionalmente, para la producción de lo que llamamos, una obra común (RADFORD, 2017a, p. 252, nuestra traducción).

Como es posible percibir, en la TO son de importancia vital los *procesos* progresivos, personificados, simbólicos, materiales, discursivos, subversivos y afectivos de creación de nuevos individuos, con capacidad de pensar críticamente y posicionarse éticamente ante las cuestiones urgentes de sus comunidades y de su mundo (RADFORD, 2017a). Esos procesos surgen en la labor conjunta, en cuyo desarrollo los individuos se constituyen cuando se encuentran con el otro y con el mundo en las dimensiones conceptual, material y cultural (RADFORD, 2014). En ese sentido, en la TO

[...] los encuentros de los alumnos con el saber matemático históricamente constituido, materializado en la obra común de los profesores y de los estudiantes, son denominados *procesos de objetivación*. [...] Por medio de esos procesos sociales, materiales, encarnados y semióticos, los estudiantes y los profesores no solo crean y recrean saber, sino que ellos también se coproducen como sujetos en general y como sujetos de la educación, en particular. Más precisamente, ellos producen subjetividades; esto es, individuos singulares en formación. Es por eso que, a partir de esa perspectiva, los procesos de objetivación son al, mismo tiempo, los *procesos de subjetivación* (RADFORD, 2017a, p. 253, nuestra traducción, énfasis añadidos).

Por razones de espacio, en este texto solamente haremos referencia a los procesos de objetivación que caracterizan el aprendizaje de acuerdo con la TO, discutiendo cómo la hemos utilizado en nuestros estudios sobre el aprendizaje geométrico en contextos de ESG. En general, los procesos de objetivación son

[...] aquellos procesos sociales, colectivos de *toma de conciencia*: toma de conciencia progresiva y crítica, de un sistema de pensamiento y acción cultural e históricamente constituido, sistema que gradualmente notamos, y que al mismo tiempo dotamos de sentido. Los procesos de objetivación son aquellos procesos de notar algo culturalmente significativo, algo que se revela a la conciencia no pasivamente, sino por medio de la actividad corpórea, sensible, afectiva, emocional, artefactual y semiótica (RADFORD, 2020, p. 20, énfasis en el original).

Sobre esta definición, destacamos dos cuestiones. Por una parte, el sistema de pensamiento y acción codificado culturalmente es el *saber* (matemático, científico, artístico, pedagógico, etc.) en sí mismo, que se puede revelar a la conciencia de los individuos mediante su labor conjunta. Por otra parte, durante esa actividad, los profesores y alumnos recurren a *signos* (palabras, gestos, inscripciones de todo tipo, etc.) y *artefactos* (calculadora, computadora, software de aplicación, etc.) portadores de determinadas *conceptualidades* que afectan los significados producidos en el aula, “al sugerir formas definidas de acción y reflexión, y líneas potenciales de desarrollo cognitivo y social” (RADFORD, 2014, p. 414, nuestra traducción). En otras palabras, a través de la labor conjunta, los signos y artefactos culturales pueden revelar el contenido conceptual que la actividad humana ha depositado en ellos. Radford (2003) se refiere a esos signos y artefactos como *medios semióticos de objetivación*.

Tomando en cuenta el objetivo de este texto, en el apartado siguiente profundizamos el papel que juegan los medios semióticos debido a la importancia que éstos poseen en el desarrollo de la actividad matemática de la clase. Destacamos especialmente al *software* GeoGebra como *artefacto* principal de las actividades de ESG.

EL SOFTWARE GEOGEBRA COMO ARTEFACTO CULTURAL

En líneas generales, Martos y Martos (2014) definen artefacto como cualquier objeto que es producto del ingenio humano, sin características preestablecidas, producido para satisfacer las necesidades de determinada cultura humana. En el ámbito educativo y como parte de su trabajo profesional, los profesores utilizan una diversidad de artefactos en la actividad de la clase, entre los cuales es posible mencionar aquellos que han sido predominantes históricamente, como el papel, lápiz, libros, pizarras, entre otros. La función que poseen los artefactos en la actividad de la clase se orienta hacia la medición de la relación profesor-alumno o de la relación alumno-saber (RADFORD, 2020). Particularmente, en la mediación de la relación alumno-saber subyace una visión de la enseñanza y del aprendizaje que determina la manera cómo los individuos utilizan los artefactos en la actividad que ocurre en esos contextos (RICKENMANN, 2006).

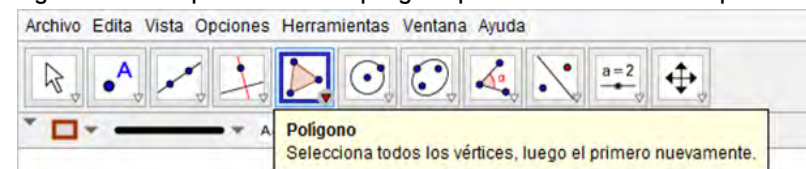
En lo que respecta a la actividad de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se destaca una visión histórico-cultural de aprendizaje que concibe los artefactos como partes constitutivas e intrínsecas del pensamiento, y no como simples ayudas (RADFORD, 2006). De esa manera, la forma cómo los alumnos hacen de los saberes matemáticos objetos de su conciencia está íntimamente ligada con los artefactos utilizados, de allí que surja la idea de que esas herramientas cambian y transforman la forma en la que se aprende (BORBA; VILLARREAL, 2005; HOYLES, 2018; VILLARREAL, 2012).

Un tipo de artefacto que ha sido utilizado desde hace más de tres décadas, en el campo de la Educación Matemática, son los Artefactos Digitales - AD, los cuales se caracterizan por su producción artificial e intelectual, así como la posibilidad de interacción con el

usuario. Un AD que desde su origen fue pensado para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es el GeoGebra (HOHENWARTER, 2017), un software de matemática dinámica que ha sido ampliamente incorporado tanto en las actividades matemáticas de la clase como en actividades de investigación, quizás por su valor pragmático (ARTIGUE, 2002). Con respecto a ese software, el estudio de Sánchez-S. y Prieto (2019) muestra que el GeoGebra posee una variedad de herramientas (de construcción y medida) y funcionalidades, que son portadoras de conceptualidades que revelan los saberes matemáticos y geométricos que han sido constituidos por la humanidad a lo largo de la historia. Así, podemos afirmar que el GeoGebra es un artefacto cultural con inteligencia histórica en él incorporada (RADFORD, 2006).

Por ejemplo, pensemos en dibujar un rectángulo en la aplicación *Geometría* del software GeoGebra. La herramienta *Polígono* sugiere al usuario una forma de construcción de esa figura para la cual se debe informar al software cuáles son los vértices que le definen (Figura 1). De esta manera, la herramienta *Polígono* es portadora de una conceptualidad particular, que es posible materializar en la construcción del rectángulo. Además de ello, tal y como sugiere la Figura 1, cada herramienta y funcionalidad del GeoGebra posee determinadas demandas en la forma de condiciones que el usuario debe proporcionar al software, condiciones que, señalamos, no son neutras ni ingenuas, pero son parte fundamental del saber matemático depositado en esas herramientas (SANDOVAL; MORENO-ARMELLA, 2012).

Figura 1 – Conceptualización del polígono por la herramienta correspondiente



Fuente: Elaboración propia.

De lo anterior, asumimos que el uso deliberado de las herramientas y funcionalidades del GeoGebra puede afectar el significado de los contenidos conceptuales que portan esos recursos en el desarrollo de la labor conjunta en la clase. Así, por la importancia que la TO concede al trabajo con artefactos, se puede concluir que la cultura material interviene en los procesos de objetivación y ayuda a que éstos puedan materializarse. Sin embargo, debido a que los artefactos (como el software GeoGebra) no pueden revelar por sí mismos la conceptualidad que el trabajo humano ha depositado en ellos, es necesario que la cultura intelectual y material sea integrada a la labor conjunta que profesores y alumnos despliegan en la clase, con la intención de hacer aparente los saberes que portan los artefactos utilizados.

UN EJEMPLO DE PROCESOS DE OBJETIVACIÓN EN LA ESG

Para ilustrar la manera en la que la conceptualidad que portan algunas herramientas de construcción del GeoGebra puede revelarse a la conciencia, discutimos brevemente el episodio²⁸ de un profesor (João) y dos alumnos (Simão y Edmilson) que, en el contexto de una experiencia de ESG, buscan comprender la técnica de construcción de un círculo con el GeoGebra (Tabla 1), utilizada por estos alumnos anteriormente. En ese contexto se revelan procesos de objetivación producidos durante el trabajo práctico de comunicación, que giran alrededor de una manera geométrica de entender la rotación

²⁸ Por episodio nos referimos a un fragmento de la actividad en el que se revela un proceso de objetivación. El episodio presentado en este trabajo está compuesto por una secuencia de líneas indicadas por números, y que contienen las frases de los participantes en la actividad e imágenes que complementan los signos evocados por ellos. Las líneas del episodio reportado van desde la 40 hasta la 58.

(conceptualidad) que se encuentra incrustada en la herramienta del GeoGebra *Rotación*.

Tabla 1 - Técnica de construcción del círculo aplicada por los alumnos

Pasos	Acciones
1. Determinar el centro del círculo	<ol style="list-style-type: none"> 1. Fue trazada una recta a paralela al eje x por el punto C. 2. Fue rotada la recta a con centro en C, con un ángulo de 42.6° y en sentido antihorario, obteniendo la recta a'. 3. Fue creado el deslizador α, con valores mínimo y máximo de 0° y 65°, respectivamente. 4. Fue rotada la recta a' con centro en C, con un ángulo α y en sentido horario, obteniendo la recta a''. 5. Fue trazada una circunferencia centrada en C y de radio $21*k$, obteniendo la circunferencia b. 6. Fue interceptada la recta a'' y la circunferencia b, obteniendo el punto D, centro del círculo.
2. Definir el radio del círculo	<ol style="list-style-type: none"> 1. Fue tomada la medida k como el radio del círculo.
3. Trazar la circunferencia del círculo	<ol style="list-style-type: none"> 1. Fue trazada la circunferencia del círculo, centrada en D y de radio igual a k, obteniendo la curva d.
4. Ilustrar el círculo	<ol style="list-style-type: none"> 1. Fue modificada la opacidad de la circunferencia del círculo para ilustrar la región interna.

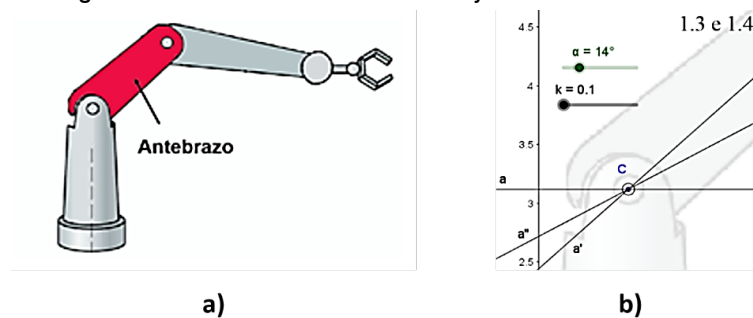
Fuente: Elaboración propia.

Para usar la herramienta *Rotación* es necesario comunicar al software los tres elementos (condiciones) característicos de esa transformación geométrica: *objeto a rotar*, *centro de rotación* y *amplitud del ángulo*. Sobre la amplitud del ángulo, su valor es insertado por medio de un campo de entrada que aparece después de haber seleccionado los otros elementos. La amplitud del ángulo se puede expresar como medida (número) o como variable (letra), según sea definida su construcción. Para cualquier opción, las formas de expresar la amplitud del ángulo llevan a maneras diferentes de entender esa transformación en el software GeoGebra.

En el caso que describimos aquí, determinados procesos de objetivación ocurrieron cuando João, Simão y Edmilson discutieron las acciones de la técnica de construcción del círculo que involucraron el uso de la herramienta *Rotación* (acciones 1.2 y 1.4, Tabla 1), revelándose progresivamente la conceptualidad del artefacto. Específicamente, *describimos la forma cómo ellos tomaron conciencia de la idea de rotación con un ángulo expresado como variable.*

Existen dos formas en las que una variable puede representar la amplitud del ángulo de una rotación con el GeoGebra. La primera de ellas ocurre cuando la variable expresa el valor de un ángulo construido previamente en la interfaz del software. La segunda, cuando la variable expresa un rango de medidas angulares representado por un *deslizador*. Identificamos esa segunda forma de representación en nuestro episodio, cuando los alumnos, motivados por la necesidad de representar el movimiento del antebrazo del brazo robótico ilustrado en la Figura 2a, desarrollaron las acciones 1.2 y 1.4. de la técnica (Figura 2b).

Figura 2 - Antebrazo del brazo robótico y rotación de la recta a'



Fuente: Elaboración propia.

Debido a que la técnica de construcción fue aplicada mucho antes de la reunión entre João, Simão y Edmilson, los alumnos olvidaron que habían aplicado la rotación (acción 1.4, Tabla 1). Cuando

comunicaron a João²⁹ cómo representaron el antebrazo del brazo robótico en el GeoGebra, vincularon erróneamente el deslizador α (acción 1.3) a la rotación de la recta a (acción 1.2) y no a la recta a' , como realmente fue realizado. Con la finalidad de aclarar esta cuestión, discutimos a continuación, por medio de análisis de extractos de las frases de los participantes (seleccionadas de las transcripciones de grabaciones de vídeo de la reunión), cómo Simão y Edmilson tomaron conciencia tanto de la existencia de la rotación de la acción 1.4, como de la conceptualización de ese objeto geométrico presente en la herramienta *Rotación*, con un ángulo expresado como variable vinculada a un deslizador.

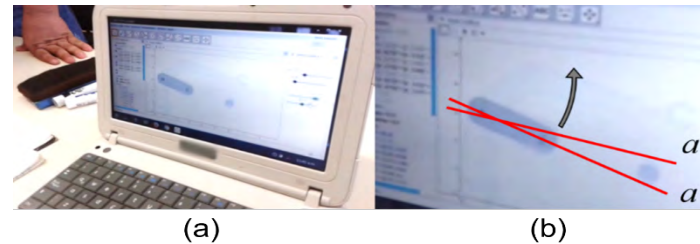
EL RECONOCIMIENTO DE LA ACCIÓN 1.4 DE LA TÉCNICA

La acción 1.4 de la técnica comenzó a ser reconocida cuando João tomó conciencia de la existencia, en el dibujo dinámico³⁰ de la recta a'' , ignorada por él hasta aquel momento, con comportamiento distinto a la recta a' (acción 1.2), indicada por Edmilson y Simão. En un principio, los alumnos habían declarado que la recta a' fue rotada en sentido antihorario con una amplitud del ángulo definida por el deslizador α . Esto reveló una contradicción cuando compararon con el dibujo dinámico, porque para ciertos valores del deslizador, la recta a' presentaba coeficiente angular negativo (Figura 3); sin embargo, la amplitud del ángulo de la rotación α variaba entre 0° (posición horizontal) y 65° , en sentido antihorario.

29 En el momento de la reunión, João realizaba una visita al Club GeoGebra en el que Simão y Edmilson participaban. El propósito de la visita de João, como director del proyecto, era conocer y monitorear el trabajo que hasta entonces estaban realizando los alumnos del club.

30 Para efectos de la investigación, el dibujo dinámico es la representación obtenida en la interfaz del GeoGebra que modela las formas y movimientos del antebrazo del brazo robótico.

Figura 3 - Coeficiente angular negativo de la recta a' para ciertos valores de α



Fuente: Elaboración propia.

Los alumnos presentaron dificultades para reconocer esa contradicción solamente observando el dibujo dinámico. Por lo tanto, João produjo otra representación de las acciones descritas por Simão y Edmilson, en la que integró el dibujo en papel al repertorio de recursos semióticos utilizados. Para ello, el profesor desarrolló un discurso oral en el que utilizó el lápiz para indicar, sobre el dibujo en papel, cada uno de los elementos necesarios para la aplicación de la rotación en el caso de la acción 1.2, hasta llegar el momento de interpretar la amplitud del ángulo de rotación en el software GeoGebra (extractos 40 y 41). Su intención fue que los alumnos interpretaran los efectos que deberían producirse cuando la acción 1.2 fuese definida, en función de una amplitud del ángulo de rotación expresada como variable (α) y no como medida, sobre el dibujo dinámico. A partir de la interpretación realizada sobre el dibujo en el papel, João llamó la atención de los alumnos para observar el dibujo dinámico y comparar el comportamiento de la recta a' , comparando la interpretación expresada por Edmilson en su discurso con el comportamiento observado en el ordenador (extracto 42).

40. João: *Después, ustedes me dicen que dibujaron esta recta de aquí [señala con el lápiz la recta a' (Figura 4)]. ¿Por qué esta recta es importante? Me imagino que es importante porque aquí va a estar el otro punto... la otra circunferencia que ustedes van a dibujar, o el otro círculo, creo. Ajá, pero ¿cómo dibujé esta recta? Ustedes me dijeron "rotando ésta" [se refiere a la recta a]. Bueno, si la roto, yo les entiendo. Pero si ustedes la rotan me deben decir [...].*

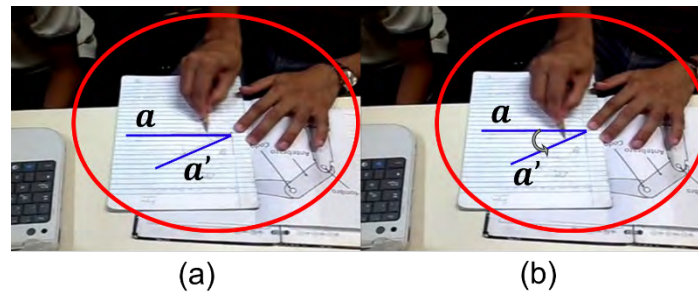
Figura 4 - João señala los elementos necesarios para aplicar la rotación en el GeoGebra



Fuente: Elaboración propia.

41. João: *Esto es lo que quiero hacerles ver. ¿Cuál es el ángulo aquí? [refiriéndose al dibujo en papel] Ustedes me dijeron: “No profe, el ángulo no es fijo. El ángulo es un deslizador. Usamos un deslizador porque, si lo manipulamos, vamos a lograr que la recta baje y suba, baje y suba, y eso nos conviene”. Yo les entiendo. Pero si voy a rotar esto [señala con el lápiz la recta a sobre el dibujo (Figura 5a), desplazando la mano de izquierda a derecha] con respecto [...] en este sentido, en el sentido antihorario, un ángulo, esta recta [a] se mueve desde acá y va a llegar hasta aquí [señala la rotación de la recta a en el papel, usando la punta del lápiz (Figura 5b). No va a bajar [posarse por debajo del eje x]. Pero yo ahí [refiriéndose a la Vista Gráfica del GeoGebra] estoy viendo que [la recta] baja.*

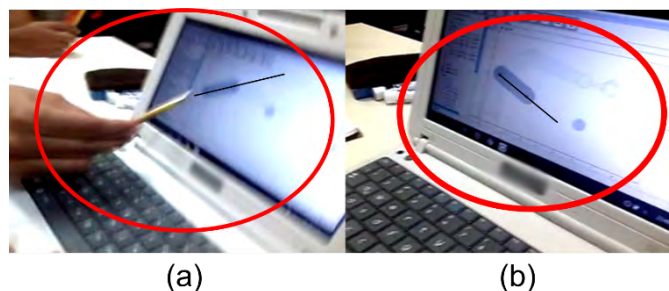
Figura 5 - João explica a los alumnos la contradicción de lo que fue expresado por ellos



Fuente: Elaboración propia.

42. João: Aquí [en la pantalla del ordenador] [...] yo me imagino la recta que está aquí [señalando con el lápiz el dibujo dinámico en la Vista Gráfica del GeoGebra (Figura 6a)]. Fíjense, allí [la recta] llega a ser horizontal, pero después baja (Figura 6b). ¿Qué pasó allí? ¿Cómo era la cuestión [la construcción]? Porque yo no la entendí. ¿No te acuerdas Simão de lo que hiciste?

Figura 6 - Uso del dibujo dinámico para ilustrar la contradicción discutida



Fuente: Elaboración propia.

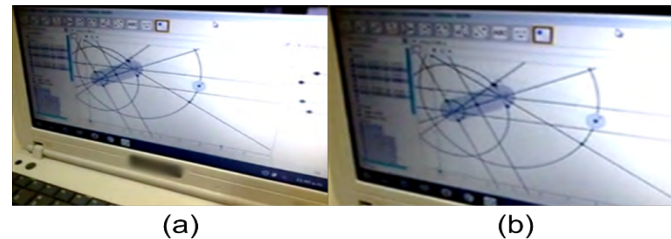
Ese uso coordinado de palabras, gestos e inscripciones, tanto en el papel como en el software, dio la oportunidad de reconocer la existencia de a'' como una segunda recta presente en la construcción (y que también fue rotada, además de a'), en el momento en que Edmilson, por voluntad propia, decidió utilizar la herramienta *Mostrar/ocultar objeto* para dejar visibles todos los objetos construidos hasta el momento (extracto 43). Esa decisión de mostrar todos los elementos de la construcción revela que el alumno empezó a dudar de su discurso (extracto 44), dando posibilidad a João de intervenir (extracto 47). Es importante señalar que, cuando Edmilson hizo uso de la herramienta mencionada, el deslizador tenía valor de 0° ; consecuentemente, las rectas a' y a'' se encontraban superpuestas y no era posible distinguirlas.

Por ese motivo, João solicitó a Simão que cambiase el valor del deslizador para visualizar mejor las dos rectas, ya que todos los objetos construidos estaban visibles en la pantalla del ordenador (extracto 47). Esa estrategia fue potenciada por el profesor, cuando

sugirió el uso de la opción *Animación* del GeoGebra sobre el deslizador α (extractos 48, 49 y 50). Activar esa opción generó la posibilidad para los alumnos de no sólo confirmar la existencia de la recta a'' en el dibujo dinámico (como destacó Simão en el extracto 51), sino también de poder reconocer que fue esa recta la que fue rotada, con un ángulo expresado como variable, y no la recta a' , tal como João enfatizó y como Edmilson reafirmó (extractos 52, 54 y 55), lo que hace evidente la toma de conciencia de la acción 1.4 de la técnica.

- 43. Simão:** *Ubicamos un... [se queda pensativo mientras Edmilson activa la herramienta Mostrar/ocultar objeto].*
- 44. Edmilson:** *A ver, ¿esta recta [se refiere a la recta que sirve de referencia a la rotación], de quién es prima [homóloga]?*
- 47. João:** *[Simão], mueve el deslizador de ángulo por favor. Quiero ver lo que pasa con este deslizador... Ahí [en esa posición] está bien. ¿Ves? Eso es lo que está pasando, me lo temía. Lo que estoy viendo ahí ahorita [en este instante], no lo veía cuando estaba en cero. ¿Qué veo de especial? [dirigiendo la pregunta a los jóvenes]. Ya entendí lo que este chamo [Simão] hizo, con solo mirar eso [refiriéndose al dibujo dinámico en la Vista Gráfica (Figura 7)].*

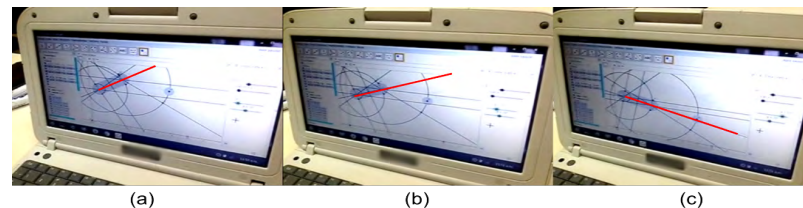
Figura 7 - Confirmación de la existencia de la recta a'' y el origen de su rotación



Fuente: Elaboración propia.

- 48. João:** *[Simão], activa animación a eso [se refiere al deslizador]. Al deslizador.*
- 49. Simão:** *¿Aquí?*
- 50. João:** *Ajá. Animación. Miren... Miren.*
- 51. Simão:** *Es como otra recta. Como si hubiera otra recta allí [se refiere a la recta a'' , la cual se mueve a medida que el deslizador toma valores distintos (Figura 8)].*

Figura 8 - Comportamiento de la recta a'' en la pantalla del ordenador



Fuente: Elaboración propia (2010).

- 52. João:** *Exacto, fíjate cómo se mueve esa recta nueva [se refiere a a'']... Porque, realmente, el deslizador no está vinculado con esta recta que ustedes dibujaron aquí [refiriéndose a la recta a'] sino con otra [se refiere a a''].*
- 54. Edmilson:** *Al parecer, esa recta [refiriéndose a a'] se dibujó con un ángulo fijo [se refiere al ángulo de $42,6^\circ$], y después... [en ese momento, el alumno fue interrumpido por João].*
- 55. João:** *Y a partir de ésta [refiriéndose a la recta a'], ustedes dibujan la otra recta [la recta a''].*

En ese momento, además de reconocer la existencia de la recta a'' en la construcción, los alumnos tomaron conciencia del ángulo de rotación que Simão utilizó para ejecutar la acción 1.2. En otras palabras, el extracto 54 revela que los alumnos reconocen que la recta a' fue rotada con un ángulo fijo de $42,6^\circ$.

EL RECONOCIMIENTO DE LA CONCEPTUALIDAD DE LA ROTACIÓN APLICADA A LA RECTA a''

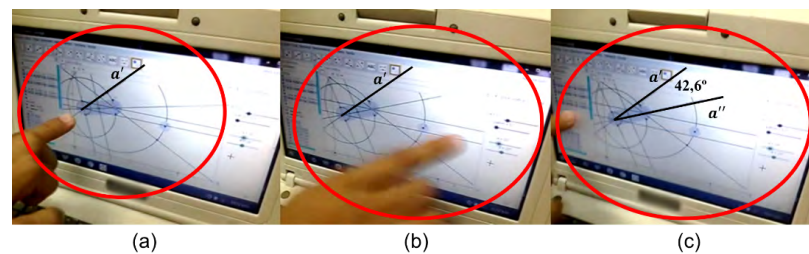
Después de reconocer la existencia de la recta a'' en el dibujo dinámico, aquella que fue obtenida con una amplitud del ángulo de rotación expresada como variable (α), se desplegó un proceso de significación de la rotación aplicada a esa recta, según la conceptualidad de la cual es portadora la herramienta *Rotación*. En ese

proceso, solamente João intervino para finalizar la reunión de trabajo con los alumnos. En ese sentido, João procedió de manera similar a las intervenciones anteriores, buscando interpretar lo que implicó la acción 1.4 de la técnica. En su interpretación, João produjo un discurso que, por medio de la combinación de palabras, gestos y dibujos, se refirió tanto al objeto a rotar como a la amplitud del ángulo de rotación.

Con respecto al objeto a rotar, se destaca que ese elemento corresponde a a' y no a la recta a (extracto 57). Acerca de la amplitud del ángulo de rotación, João interpretó el rango de valores que definen a α , con énfasis en el valor máximo del deslizador. Después de concluir que ese valor es el doble del ángulo usado en la acción 1.2 de la técnica, el profesor justificó esa afirmación volviendo al dibujo en papel. En aquel momento, él intentó mostrar el conjunto de posiciones posibles de la recta a'' , desde una posición inicial (la ocupada por a' en el dibujo) hasta una posición final (ocupada por la recta que es simétrica a a'' , con respecto al eje de simetría a), de acuerdo con lo observado en la pantalla del ordenador (extracto 58).

57. João: *Y después que él [Simão] creó esta recta [refiriéndose a a' (Figura 9a)], la rota. Pero no rota la [recta] horizontal, rota ésta [señala la recta a' (Figura 9b)]. Y la rota por un ángulo que, me imagino, tendrá una medida máxima igual al doble del ángulo que tenía al principio [se refiere al ángulo de $42,6^\circ$ (Figura 9c)].*

Figura 9 - Interpretación de la acción 1.4 en la pantalla del ordenador



Fuente: Elaboración propia.

58. João: *¿Por qué el doble? Porque si ésta mide 41 [señalando con el lápiz el ángulo de $42,6^\circ$ sobre el papel] y por aquí, abajo [se refiere al espacio por debajo de la recta a] hay 41° más, [el ángulo α] llegará hasta 82° . Me imagino que lo hiciste así [dirigiéndose a Simão].*

CONCLUSIONES

En este texto presentamos cómo hemos utilizado algunos principios teóricos de la TO para analizar el aprendizaje geométrico producido en contextos de ESG. Específicamente, describimos la forma en la que dos alumnos de Educación Media tomaron conciencia de la idea de rotación (conceptualidad de la cual es portadora la herramienta *Rotación* del GeoGebra) mientras comunicaban la técnica de construcción de un círculo. Para ello, colocamos la atención en la labor conjunta desplegada por estos alumnos y su profesor, en la cual una variedad de medios semióticos (signos y artefactos) marcaron los procesos de objetivación reportados.

En la descripción del episodio, el software GeoGebra se constituyó en parte consubstancial de la labor conjunta de los alumnos y el profesor, y consecuentemente, jugó un rol fundamental en el aprendizaje geométrico reportado. Esto se pudo observar en la manera cómo la conceptualidad incrustada en la herramienta *Rotación* afectó los significados de los alumnos con relación a la transformación abordada, puesto que tal conceptualidad sugirió líneas potenciales de reflexión y acción sobre la rotación como objeto geométrico (RADFORD, 2014).

Para finalizar, señalamos también el hecho de que el software haya sido utilizado con diferentes propósitos a lo largo del episodio reportado. Uno de los propósitos de uso fue ampliar el *dominio de funcionamiento del dibujo geométrico* (en la forma de un dibujo dinámico). En efecto,

tratándose de un trabajo de construcción realizado en un software de matemática dinámica como el GeoGebra, el dibujo en papel se mostró insuficiente para legitimar algunas acciones de la técnica aplicada. Así, como resultado de esa ampliación, fue posible que los alumnos visualizasen los efectos de haber vinculado el deslizador a la rotación aplicada en la acción 1.2 de la técnica.

Otro propósito de uso del software, vinculado al anterior, está relacionado con las posibilidades de visualización que el GeoGebra ofrece. Así, gracias a la manipulación del dibujo dinámico, fue posible visualizar las diferencias entre los comportamientos de las rectas a' y a'' , mientras la opción *Animación* del software estaba activada.

Este tipo de investigación nos ha permitido tomar conciencia sobre la forma en la que ocurren los procesos de objetivación en actividades propias de elaboración de simuladores con el software GeoGebra. Sin embargo, consideramos que aún es necesario contar con más investigaciones que analicen los procesos de subjetivación que alumnos y profesores desarrollan cuando se comprometen intelectual, emocional y éticamente en la producción de dibujos dinámicos con el software GeoGebra y en la comunicación de las técnicas de construcción que son producidas y utilizadas para tal fin.

REFERENCIAS

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v. 7, n. 3, p. 245–274, 2002.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer, 2005. v. 39.

- DÍAZ-URDANETA, S.; PRIETO, J. L. Visualización en la simulación con GeoGebra. Una experiencia de reorganización del conocimiento matemático. In: SERRES, Y.; MARTÍNEZ, A.; INOJOSA, M.; GÓMEZ, N. (Orgs.). *Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática*. Barquisimeto, Venezuela: ASOVEMAT, 2016, p. 445-453.
- HOHEMWATER, M. The journey of GeoGebra from desktop computers to smartphone. Madrid: S. *Madrileña Emma Castelnuovo*, 2017. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=aKxvIahIKW8>. Accedido a: 24 oct. 2019.
- HOYLES, C. Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education*, v. 20, n. 3, p. 209-228, 2018.
- MARTOS, E.; MARTOS, A. E. Artefactos culturales y alfabetización en la era digital: discusiones conceptuales y praxis educativa. *Teoría de la educación. Revista Interuniversitaria*, v. 26, n. 1, p. 119-135, 2014.
- PRIETO, J. L.; DÍAZ-URDANETA, S. Un itinerario de investigación alrededor de la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, v. 32, n. 1, p. 685-691, 2019.
- PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. E. (Comps.). *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo: Aprender en Red, 2015.
- PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. E. (Comps.). *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. 2. ed. Maracaibo: Aprender en Red, 2016.
- PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. E. (Comps.). *Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. 3. ed. Maracaibo: Aprender en Red, 2017.
- RADFORD, L. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v. 9, n. especial, p. 103-129, 2006.
- RADFORD, L. On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, v. 85, p. 405-422, 2014.
- RADFORD, L. A Teoria da Objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em educação matemática. In: MORETTI, V. D.; CEDRO, W. L. (Orgs.). *Educação Matemática e a teoria histórico-cultural*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2017a, p. 229-261.
- RADFORD, L. Ser, subjetividad y alienación. In: D'AMORE, B.; RADFORD, L. (Orgs.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017b, p. 139-165.

RADFORD, L. Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la Teoría de la Objetivación. *PNA. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, v. 12, n. 2, 61-80, 2018a.

RADFORD, L. Conferencia Dr. Luis Radford. 2018b (37m38s). Santiago: *Aprender en Red*. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=Age-EmXa_LI. Accedido a: 06 dic. 2018b.

RADFORD, L. Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In: TAKECO-GOBARA, S.; RADFORD, L. (Orgs.). *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática*. São Paulo, Brasil: Livraria da Física, 2020, p. 15-42.

RICKENMANN, R. El rol de los artefactos culturales en la estructuración y gestión de secuencias de enseñanza-aprendizaje. In *Conférence invitée, Actes du 1er simposio internacional de educación y formación docente*, Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia, 2006, p. 1-21.

SÁNCHEZ-S., I. C.; PRIETO, J. L. El uso experimental del GeoGebra en un contexto de formación docente en matemática. In: ROSAS, A. M. (Org.). *Avances en Matemática Educativa: Tecnología para la educación*, 4 ed. Ciudad de México: Lectorum, 2017, p. 38-51.

SÁNCHEZ-S., I. C.; PRIETO, J. L. Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *PNA. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, v. 14, n. 1, p. 55-83, 2019.

SANDOVAL, I.; MORENO-ARMELLA, L. Tecnología digital y cognición matemática: Retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, v. 14, n. 1, p. 21-29, 2012.

VILLARREAL, M. E. Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia*, v. 3, n. 5, p. 73-94, 2012.