

# 5

Sergio Rubio-Pizzorno  
Gisela Montiel Espinosa

## ECOSSISTEMAS EDUCACIONAIS HÍBRIDOS NA PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DOI: 10.31560/pimentacultural/2020.472.118-157

## INTRODUÇÃO: UMA MUDANÇA ALÉM DO TECNOLÓGICO

É inegável que a tecnologia digital tem provocado grandes mudanças, ou uma verdadeira revolução, em diferentes âmbitos da vida pessoal, laboral e social. Castells (1999) começa seu livro *A era da Informação (La Era de la Información)* afirmando que a revolução da tecnologia da informação<sup>14</sup> penetrou todos os âmbitos da atividade humana, para em seguida acrescentar que esta revolução “está modificando a base material da sociedade em ritmo acelerado” (CASTELLS, 1999, p. 27). Por sua vez, Serres (2013) situa a revolução das novas tecnologias como uma das três revoluções principais na história da humanidade, após a criação da escrita e da invenção da imprensa, e reconhece que esta terceira revolução modificou, entre outras coisas, a maneira como a sociedade se articula e como se entende a educação. Cobo e Moravec (2011) caracterizam a mudança social na raiz desta revolução, descrevendo a transição entre paradigmas sociais, a partir do que eles chamam de sociedade 1.0, 2.0 e 3.0.

A sociedade 1.0 reflete as normas e práticas que prevaleceram desde a sociedade pré-industrial até a sociedade industrial. Por sua vez, a sociedade 2.0 faz referência a enormes transformações sociais que estão tendo lugar na sociedade atual e que encontram sua origem principalmente na mudança tecnológica. Por último, a sociedade 3.0 faz alusão à sociedade de nosso futuro mais imediato, para que se prognosticam enormes transformações que são produto da mudança tecnológica acelerada (COBO; MORAVEC, 2011, p. 48).

14 Na literatura empregam-se diferentes termos para se referir a um mesmo objeto, fenômeno ou era, de acordo com a ênfase de cada autora ou autor. Castells (1999) fala das *tecnologias da informação*, Serres (2013) das *novas tecnologias*, Cobo e Moravec (2011) usam as siglas TIC para se referir às *tecnologias de informação e comunicação*. Neste capítulo é usado o termo *tecnologias digital* para referenciar a todas elas de maneira global.

Significa que, antes de as tecnologias digitais aparecerem no panorama humano, a sociedade se caracterizava por se desenvolver em uma materialidade análoga, por uma ordem hierárquica, uma relação mecânica entre diferentes localizações geográficas e uma visão de mundo determinista. Após sua aparição, o paradigma social tem uma virada para a materialidade digital, no sentido de relações *heterárquicas* de poder entre as pessoas, a uma relação holográfica entre partes diferentes e uma visão indeterminada de mundo. Na atualidade, vivemos em transição entre a sociedade 2.0 e a 3.0. Ela se desenvolve em uma materialidade além do físico e do digital, ou seja, constituída por espaços de diversas naturezas, na ordem entre os sujeitos é intencionada ou auto-organizada, as relações entre diferentes partes são sinérgicas e a visão de mundo é planejada.

## O OFICIAL E O NÃO OFICIAL

É possível reconhecer que a aparição das tecnologias digitais não apenas provocou uma mudança material, também uma no nível social, ou seja, a tecnologia é uma construção de nossas sociedades e mantém uma relação mutuamente constitutiva com elas. Entretanto, essa mudança social não se produziu de maneira uniforme e padronizada, ao contrário: ocorreu de forma heterogênea e diversa, de acordo com o grau de poder dos grupos sociais.

Rubio-Pizzorno (2018) faz uma distinção a respeito dessa mudança social distinguindo dois âmbitos, o *oficial* e o *não oficial*, em que o oficial é identificado como “as instituições, centros de ensino ou outras instancias que exercem certa autoridade sobre os membros ou conjunto da sociedade, nação, Estado ou entidades territoriais” (RUBIO-PIZZORNO, 2018, p. 3), e o não oficial é relacionado com a

proliferação e expansão da Internet como ferramenta emancipadora. Suas dinâmicas têm se modificado em:

Um nível de democratização social e abertura para a livre disponibilidade da informação, [...] motivados pela possibilidade que este âmbito dá às pessoas de incidir em mudanças locais, pessoais e coletivas, com efeitos e resultados instantâneos ou em curto prazo (RUBIO-PIZZORNO, 2018, p. 3).

Desta forma, se estabelece uma distinção entre o oficial, como as instituições dominantes em nossas sociedades; e o não oficial, como as organizações preocupadas com as reais necessidades das pessoas e suas comunidades.

Somada a esta distinção, Stacey e Hinchliff Pearson (2017) falam da maneira em que historicamente são administrados os recursos e compartilhadas as riquezas, que tem sido realizada por três entes: os comuns<sup>15</sup>, o Estado e o mercado. Os comuns referem-se aos bens e recursos administrados e gerenciados de forma coletiva, ou como propôs Rowe (2013, p. 14),

Os comuns incluem todo nosso sistema de suporte vital, tanto natural como social. O ar e os oceanos, a rede de espécies, a natureza selvagem e a corrente de água - todas são partes do comum. Também o são o idioma e o conhecimento, as calçadas e as praças públicas, as histórias infantis e os processos democráticos. Algumas porções dos comuns são presentes da natureza, outras são produto do esforço humano. Algumas são novas, como a Internet; outras são antigas como a terra e a caligrafia.

15 Os *comuns* (*los comunes*) é o termo de que há consenso para se referir a *the commons*, na tradução para o espanhol do livro *Made With Creative Commons*, de Stacey e Hinchliff Pearson (2017). Para verificar a reflexão sobre as diferentes traduções e interpretações do termo *the commons* para o espanhol, recomenda-se verificar o anexo *A tradução de The Commons* (*La traducción de The Commons*) na obra de Stacey e Hinchliff Pearson (2019, p. 17), cuja versão em pdf está disponível de maneira aberta, em espanhol, em: [http://ru.iiec.unam.mx/4749/12/hecho\\_con\\_cc.pdf](http://ru.iiec.unam.mx/4749/12/hecho_con_cc.pdf)

Fundamentado nas contribuições de Rubio-Pizzorno (2018) e de Stacey e Hinchliff Pearson (2017), o presente capítulo considera o âmbito *oficial* como aquele representado pelo Estado e pelo mercado, preocupados em atender as necessidades institucionais e corporativas, e que, além disso, atualmente são as formas dominantes em nossas sociedades, inclusive sendo, às vezes, difícil determinar os limites entre um e outro. Por outro lado, o *não oficial* se refere ao âmbito representado pelos *comuns*, relacionado com a possibilidade que as pessoas e suas comunidades têm de materializar as soluções para seus problemas, em que o uso e desenvolvimento de tecnologia digital e aberta desempenham papel fundamental.

Como exemplo da distinção, a leitora ou o leitor pode pensar nas comunidades de *hackers*<sup>16</sup> como grupos sociais que se organizam de maneira não oficial, e nas corporações tecnológicas que realizam desenvolvimentos, principalmente de forma privativa e privada, como organizações oficiais. É importante destacar que, mesmo que ambas produzam tecnologia digital, elas são diferentes em seu propósito e na forma de desenvolvimento: umas de maneira aberta; e outras, fechada.

Para ilustrar a diferença entre software livre e privativo como construções do âmbito não oficial e oficial, respectivamente, tanto na tecnologia quanto em sua produção, pode-se recorrer à metáfora de um prato de comida e sua receita:

O software privativo permite que se coma o prato da comida já cozida, mas proíbe de conhecer os ingredientes e suas quantidades para prepará-la em casa. O software livre tem a receita à disposição de todo mundo (código fonte). Assim, qualquer pessoa pode replicar a receita ou pode modificá-la, incorporando novos ingredientes próprios de uma região para

<sup>16</sup> Para mais informações sobre a comunidade de *hackers*, seu funcionamento, propósitos, ética e diferença dos piratas de informática ou os criminosos cibernéticos, recomenda-se verificar os textos *Ética Hacker, segurança e vigilância (Ética Hacker, Seguridad Y Vigilancia)* de Soria Guzmán (2016), e *Meu nome é Kohfam. identidade de um hacker: uma aproximação antropológica (Me llamo Kohfam. Identidad de un hacker: una aproximación antropológica)*, de Contreras (2003).

dar-lhe um novo sabor e, em seguida, compartilhar essa nova receita com o mundo inteiro (GARCÍA GAGO *et al.*, 2020).

Em educação matemática existem exemplos desses tipos de software, como o Cabri e o GeoGebra, sendo o primeiro um software privativo, desenvolvido por um número limitado de pessoas (CABRI, 2017), e o segundo, um *software* livre, o que implica que é uma comunidade aberta que desenvolve o software<sup>17</sup>, e não há cobrança monetária pelo seu uso (RUBIO-PIZZORRO, 2020).

## MUDANÇAS PROVOCADOS PELA REVOLUÇÃO DA TECNOLOGIA DIGITAL

Depois de reconhecer que as mudanças tecnológicas têm seu impacto na sociedade, e que elas ocorrem de maneira diferente nos âmbitos oficial e não oficial, é importante localizar os tipos de mudanças provocadas pela revolução da tecnologia digital em tais âmbitos.

Em termos oficiais, a mudança de paradigma da sociedade 1.0 para a 2.0 já foi mencionada. No nível educacional, Freiman (2014) identifica que, em sua maioria, os órgãos oficiais se preocupam em incorporar a tecnologia considerando suas necessidades institucionais, ao invés de atender a necessidades educacionais das pessoas. Por outro lado, em termos do âmbito não oficial, em um nível social se reconhece a emergência do paradigma cultural do *copia e cola*, aludindo à “característica de misturar e reutilizar informação que já existe para dar lugar a significados tão exclusivos e pessoais quanto os das obras originais nas quais se embasam” (COBO; MORAVEC, 2011, p. 51). No nível educacional, existe um movimento espontâneo em

<sup>17</sup> A leitora ou o leitor pode aprofundar conhecimentos sobre as características do software livre GeoGebra e suas implicações sociais na seção 2.1.3.3. *Construção social do GeoGebra (Construcción social de GeoGebra)*, de Rubio-Pizzorno (2018, pp. 53 - 65), apenas em espanhol.

que as pessoas procuram atender suas necessidades educacionais pessoais e coletivas usando tecnologias digitais, sem a necessidade de passar por um filtro oficial (CONTRERAS, 2003). Por exemplo se pode citar o desenvolvimento do software livre GeoGebra e todos os recursos educacionais abertos que se constroem e compartilham em seu repositório<sup>18</sup>, os quais são criados e compartilhados de maneira aberta pelos membros da comunidade; existe o movimento dos EduTubers, criadores de conteúdo educacional em formato vídeo, que são compartilhados de maneira gratuita no YouTube<sup>19</sup>.

De maneira evidente, é possível reconhecer uma diferença nos efeitos da revolução da tecnologia digital nos âmbitos oficial e não oficial (ver Figura 1), em que no primeiro existe uma preocupação com o benefício econômico e as necessidades institucionais e corporativas; e o segundo se desenvolve de maneira comunitária e aberta, com uma marcada tendência coletiva e colaborativa que permeia todo este âmbito.

**Figura 1 – Mudanças produto de revolução da tecnologia digital nos âmbitos oficial e não oficial**



Fonte: Adaptado de Rubio-Pizzorno (2018).

<sup>18</sup> Visite o repositório do GeoGebra intitulado *Materiais Didáticos (Recursos para el aula)*: [geogebra.org/materials](https://www.geogebra.org/materials).

<sup>19</sup> Para saber mais sobre o movimento dos EduTubers, recomenda-se ouvir o episódio 8 do podcast *Aula Aberta (Aula Abierta)*, apenas em espanhol: <https://open.spotify.com/episode/6kToPSL8texSQRBHcn98jR>

Dados os interesses dos autores do presente capítulo, seguiu-se focalizando a pesquisa até os efeitos da revolução da tecnologia digital na Matemática Educacional, especialmente na possibilidade de indagar a maneira como os aspectos sociais, culturais, coletivos e colaborativos incidem sobre o fenômeno de aprender e ensinar matemática. Desta maneira e com base no exposto nesta seção, propõem-se as seguintes perguntas para guiar a configuração do marco teórico da presente pesquisa:

1. Como a sociedade se organiza para construir conhecimento aproveitando a tecnologia digital?
2. Quais conteúdos de matemática e como eles são aprendidos na Era Digital?

Nas próximas seções, as ideias que permitem abordar essas perguntas são desenvolvidas.

## PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA EDUCACIONAL - METODOLOGIA

A pergunta *como a sociedade se organiza para construir conhecimento aproveitando a tecnologia digital?* traz, de maneira implícita, a identificação de um objeto de estudo que transcende a Matemática Educacional. Este objeto se relaciona diretamente com aspectos de organização social e construção de conhecimento usando tecnologia digital, e por esta razão foi necessário buscar explicações em disciplinas como a sociologia e a antropologia para, então, articulá-las com aspectos da matemática educacional que permitiram abordar o fenômeno de maneira mais robusta. O propósito foi responder a um cenário mais próximo da realidade e menos artificial em termos educacionais.



Para desenvolver essa articulação de diferentes disciplinas e organizar suas contribuições, embasamo-nos na proposta sobre *produção de conhecimento em matemática educacional* de Lerman (2000), na qual emprega a ideia de *recontextualização* (Bernstein, 1996 *apud* Lerman, 2000), referida ao processo de adoção de marcos teóricos dentro de um campo. Esse processo ocorre em movimento e adaptação de ideais entre os seguintes níveis de conhecimento:

- **Nível 1:** Disciplinas circundantes ou que servem de fundamento para a matemática educacional, tais como psicologia, sociologia, filosofia, antropologia e matemática;
- **Nível 2:** Matemática educacional e outras áreas curriculares da pesquisa educacional;
- **Nível 3:** Currículo e práticas de aula.

Enquanto produção de conhecimento em matemática educacional, Lerman (2000, p. 20) enfatiza que o segundo nível de conhecimento “se relaciona de uma maneira mais horizontal com os domínios do primeiro nível, mais que ter uma relação hierárquica com eles”. Desta forma se reconhece a capacidade que a matemática educacional tem para produzir conhecimento de maneira autônoma, e não apenas como uma recontextualização de outras disciplinas.

Nesta pesquisa, acreditamos que a construção de conhecimento pode ocorrer de ambas as formas (autônoma e como recontextualização). Com base nos interesses da pesquisa realizada, as disciplinas que servem de fundamento neste texto correspondem à antropologia, à sociologia e à pesquisa educacional.

## TECNOLOGIA COMO PARTE DA SOCIEDADE: ANTROPOLOGIA

Para estudar os aspectos de organização social e construção de conhecimento usando tecnologia digital, recorreremos a explicações teóricas da antropologia social, que tem a relação entre cultura e tecnologia como um de seus objetos de estudo. Assim, é possível considerar, de maneira apropriada, a mudança na forma de estudar o vínculo cultura-tecnologia pela antropologia (SANTOS; DÍAZ CRUZ, 2015), em que é possível diferenciar dois paradigmas gerais de pesquisa.

- **Paradigma tradicional:** as pesquisas centram-se fundamentalmente no estudo de tecnologias e as mudanças tecnológicas em sociedades tradicionais, incorrendo em um reducionismo de considerar a tecnologia simplesmente como um fenômeno da cultura material das sociedades. Em termos mais simples, essas pesquisas consideram a tecnologia como um periférico, que poderia estar ou não, que se poderia colocar ou tirar da sociedade sem maiores problemas.
- **Paradigma moderno:** as pesquisas analisam a tecnologia como uma construção social, cultural e simbólica em nossas sociedades modernas e complexas. Isto com o propósito de ser sensíveis à realidade, se consideramos que “nossa vida cotidiana é impensável, hoje em dia, sem o enorme conjunto de artefatos técnicos que nos rodeiam” (SANTOS; DÍAZ CRUZ, 2015, p. 10). Desta maneira, considera-se a tecnologia como um elemento próprio e constitutivo da sociedade, com o qual se passa de considerar uma *sociedade com tecnologia* para uma *sociedade tecnologizada*.

Neste texto, posicionamo-nos no paradigma moderno de pesquisa antropológica para fundamentar o estudo. Assim há condições de reconhecer a tecnologia como parte do “tecido sem costuras da sociedade, a política e a economia. [Em outras palavras], o desenvolvimento de um artefato tecnológico [...] não é simplesmente uma realização técnica; imersas nela se encontram as considerações sociais, políticas e econômicas” (PINCH, 2015, p. 25).

Assim, também segue uma pesquisa sobre as comunidades abertas construindo conhecimentos de diversos tipos, a partir da perspectiva da construção social da tecnologia digital.<sup>20</sup>

## ESTRUTURA SOCIAL EM REDE E SEU SUPORTE MATERIAL HÍBRIDO: SOCIOLOGIA

Embora a contribuição da antropologia permita situar o presente estudo, é necessário ser mais específico a respeito do digital. Isto se deve a que ambos os paradigmas de pesquisa antropológica se referem à tecnologia de maneira geral, sem considerar as particularidades da tecnologia digital e a influência que poderia ter na sociedade, a qual, *a priori*, pode ser considerada diferente do que poderia provocar em relação às tecnologias não digitais.

Dada esta situação, Castells (1999) se apresenta como referência geral para entender as mudanças sociais provocados pela aparição da tecnologia digital no panorama humano. Uma das mudanças sociais mais importantes reportadas por Castells (1999) é o posicionamento da *sociedade em rede* como estrutura social predominante em nossas sociedades. Em outras palavras, “mesmo que a forma em rede

<sup>20</sup> Para mais informações a respeito, sugere-se a seção 2.1 *Organização social propiciada pela tecnologia digital (Organización social propiciada por la tecnología digital)*, apenas em espanhol, da tese de Rubio-Pizzorno (2018, pp. 18 - 66).

da organização social tenha existido em outros tempos e espaços, o novo paradigma da tecnologia [digital] [...] fornece a base material para que sua expansão afete toda a estrutura social” (CASTELLS, 1999, p. 506).

Especificamente esta base material da sociedade em rede é uma hibridização harmônica, e em alguns casos transparente, entre o físico e o digital. O físico entendido como espaço social clássico ou *espaço de lugares*, e o digital como um espaço social previsto pela tecnologia digital ou *espaço de fluxos*. Como exemplo, vejamos o caso do Colóquio da Comunidade GeoGebra Latino-americana (RUBIO-PIZZORNO, 2020). O evento foi transmitido para toda a América Latina e para o mundo através de uma vídeo-chamada aberta, em que um pesquisador da América Latina realizou uma apresentação sobre algum tema educacional ou matemático usando GeoGebra, um membro da Equipe da Comunidade GeoGebra Latino-americana moderou a apresentação (apresentação do pesquisador e perguntas do público), e um organizador gerenciou a sessão em geral. Geralmente todas as pessoas que participam do evento estão em diferentes lugares físicos. Vejamos um exemplo concreto: a sessão 6 do Colóquio, intitulada *Construindo cenários animados no GeoGebra para o ensino e a aprendizagem de funções* (BASNIAK, 2020; COMUNIDAD GEOGEBRA LATINOAMERICANA, 2019), foi realizada com o apresentador fisicamente na Cidade do México; a moderadora em Lima, no Peru; a pesquisadora no Paraná, Brasil; e o público estava conectado a partir de diferentes países da América Latina, estando fisicamente em lugares sociais clássicos (biblioteca, escritório, casa).

Se o Colóquio não contasse unicamente com um suporte material físico para a atividade acadêmica (sem computador, sem internet, etc.), a atividade não poderia ter sido realizada. Portanto, ao contar com ambientes e tecnologias digitais que permitem a comunicação sem barreiras geográficas, o Colóquio tem possibilidades de existir e funcionar, já que o fluxo acadêmico

natural dessa atividade ocorre em uma simultaneidade de espaços físicos e digitais, ou seja, em um suporte material híbrido.

## AMPLIAÇÃO DOS ESPAÇOS DE APRENDIZAGEM: PESQUISA EDUCACIONAL

Se consideramos a educação como uma manifestação social, então é natural pensar que as mudanças na estrutura social, provocadas pela interação com a tecnologia digital, também têm influenciado a configuração dos espaços educacionais. Desta forma, podemos perguntar: como a estrutura social em rede e sua materialidade híbrida se manifesta na educação?

Cobo e Moravec (2011) reconhecem que, graças às tecnologias digitais, podemos acessar conteúdos educacionais de maneira contínua e sem restrição de espaços.

Uma das principais contribuições da adoção das tecnologias [digitais] [...] na vida cotidiana é que permitiu ampliar os limites pré-estabelecidos do que tradicionalmente se conhecia como espaços de aprendizagem. Em outras palavras, a domesticação (e invisibilidade) das tecnologias está abrindo novas possibilidades para converter outros espaços em laboratórios de aprendizagem.

O valor deste olhar não está no “que” se aprende, mas em “como”, “onde” e “quando” [...]. Isto não significa que o “que” não seja importante, pelo contrário, mas é preciso também compreender que as tecnologias digitais têm permitido ampliar as dimensões temporais e espaciais do processo de aprendizagem. A partir de uma perspectiva cartográfica, poderíamos propor que se ampliasse o mapa da ecologia da aprendizagem. Neste novo plano, a aprendizagem transcende os espaços tradicionalmente delimitados para aprender. Tal como já destacamos, o novo panorama de aprendizagem

será em 3D e 360°, incluindo outros territórios ignorados até o momento (COBO; MORAVEC, 2011, p. 111).

Este último ponto, sobre a possibilidade de estar ignorando outros territórios não explorados sugere a pergunta: que outros espaços existem além do físico e do digital? Para respondê-la podemos ver o exemplo de um jogo mundialmente conhecido: *Pokémon Go*®<sup>21</sup>. O jogo consiste basicamente na possibilidade de caçar Pokémons com o *smartphone* ao percorrer espaços físicos, ou seja, abrir o jogo no telefone, com a câmera se explora o espaço físico e por meio da tela é possível ver os pokémons que vão aparecendo, os quais se pode capturar. Em termos que já utilizamos neste texto, podemos afirmar que Pókemon Go permite explorar o espaço físico através de um dispositivo móvel para encontrar objetos digitais no espaço físico. A Figura 2 mostra alguns pokémons sobre o gramado, ao lado de uma árvore, ou como uma avozinha pega um desses bichos digitais entre suas mãos.

**Figura 2 - Vista da Realidade aumentada de Pókemon Go**



Fonte: Imagens tiradas do jogo Pókemon Go.

21 Mais informações sobre o jogo em seu website: [www.pokemongo.com](http://www.pokemongo.com).

Poderíamos dizer que tais objetos digitais estão *na* realidade física, ou que a realidade física está se incorporando à realidade digital? Na verdade, podemos afirmar que as duas opções têm algo de certeza, já que este tipo de interação “nos dá a possibilidade de sobrepor uma realidade a outra através de um dispositivo que tenha uma tela e uma câmera. São duas realidades justapostas, uma sobre a outra” (CCD Radio, s.f.). Por esta razão, a este tipo de espaço se denomina *realidade aumentada*.

Assim como na realidade aumentada, é possível encontrar espaços de natureza distinta que têm começado a configurar o suporte material de nossa sociedade. Para mencionar alguns exemplos, existem o espaço físico, digital, a realidade aumentada, o vídeo 360, a realidade virtual, a realidade mista (ver Figura 3) e a realidade cinematográfica.

**Figura 3 - Relação de espaços sobre a interatividade (esquerda) e movimento (direita)**



Fonte: Centro de Cultura Digital (2018).

Portanto, não apenas os lugares físicos e digitais configuram-se em novos espaços de aprendizagem, mas existem espaços de outras naturezas que são suscetíveis de ser usados com fins educacionais.

## ECOSSISTEMAS EDUCACIONAIS HÍBRIDOS

A primeira pergunta proposta no início deste capítulo questiona: como a sociedade se organiza para construir conhecimento

aproveitando a tecnologia digital? Para abordar a pergunta começou-se pela exploração das contribuições da antropologia, a partir das quais se reconhece a possibilidade de estudar e pesquisar as tecnologias como construção social. A sociologia permitiu reconhecer que a tecnologia digital está ampliando a materialidade social, partindo de uma exclusivamente física para uma hibridização entre o físico e o digital. Por sua vez, a pesquisa educacional ajudou a reconhecer a existência de outros espaços susceptíveis de serem usados com fins educacionais, como a realidade aumentada, realidade mista, entre outros. Todos esses espaços somam-se ao clássico espaço físico e ao espaço digital para configurar, aludindo a metáfora cartográfica de Cobo e Moravec (2011), novos territórios de aprendizagem, ou explicado de maneira mais sucinta, configuram novos *Ecosystemas Educacionais Híbridos*.

Desta forma, graças à integração das contribuições da antropologia, da sociologia e da pesquisa educacional, configura-se a ideia de Ecosystemas Educacionais Híbridos para reconhecer a materialidade híbrida de nossas sociedades atuais, que está constituída por espaços de diversas naturezas, que se intersectam, confluem e se integram de maneira harmônica e transparente.

Cada um dos espaços mencionados tem associado tecnologias características, mesmo que não excludentes de outros espaços (ver Figura 4). Por exemplo, os *smartphones* correspondem a uma tecnologia associada diretamente ao digital, não obstante, também possuem materialidade física (por exemplo, o aparelho, a bateria, a tela, os circuitos), e dependendo de suas características, também pode ser parte de uma materialidade de realidade aumentada para jogar Pokémon GO. O importante está em reconhecer a diversidade de espaços convergindo e o uso educacional que é possível dar a eles em nossos Ecosystemas Educacionais Híbridos.



Figura 4 - Constituição dos Ecossistemas Educacionais Híbridos por níveis



Fonte: Elaborada pelos autores usando ícones dos desenhistas Alfredo Hernandez, DinosoftLabs, Freepik, mavadee, Nikita Golubev, Pixelmeetup Smachicons, surang, turkkub, wanicon de www.flaticon.com; a logo dos REA da Unesco e a logo do GeoGebra.

Um tipo de tecnologia bastante identificada com o espaço digital corresponde aos recursos educacionais abertos - REA, dos quais é importante mencionar algumas de suas características. Os REA são definidos pela Unesco como

Qualquer recurso educacional (inclusive mapas curriculares, materiais de curso, livros de estudo, streaming de vídeos, aplicações multimídia, podcasts e qualquer material que tenha sido projetado para o ensino e a aprendizagem) que esteja plenamente disponível para ser usado por educadores e estudantes, sem que haja necessidade de pagar royalties ou direitos de licença (BUTCHER, KANWAR; UVALIC-TRUMBIC, 2015, p. 5).

Além da livre disponibilidade dos REA, também se caracterizam por estar estritamente ligados ao âmbito não oficial no que diz respeito à sua produção, ou seja, que são produzidos sob a lógica dos comuns. Embora existam instituições do âmbito oficial que elaboram REA, também há muitas outras organizações não oficiais que os produzem, em outras palavras, que seus membros elaboram REA para atender suas próprias necessidades ou as de sua comunidade.

Um exemplo é a Comunidade GeoGebra, que gerencia um repositório de REA que conta com mais de um milhão de recursos<sup>22</sup>, os quais foram elaborados praticamente em sua totalidade pelos membros da Comunidade GeoGebra, ou seja, professores, estudantes, pesquisadores, entusiastas do uso do software, etc.

Este repositório em geral e a maneira comunitária de criar os REA, em particular, é um exemplo da forma como a sociedade em rede se põe em funcionamento para construir socialmente uma tecnologia de maneira não oficial.

## CONSIDERAÇÕES EPISTÊMICAS DOS ECOSSISTEMAS EDUCACIONAIS HÍBRIDOS: MATEMÁTICA EDUCACIONAL

Na presente seção abordamos a segunda pergunta proposta na seção 1, relacionada especificamente com a matemática e seus processos de ensino e aprendizagem na Era Digital.

Embora Cobo e Moravec (2011) destaquem a importância de dar ênfase a *como* aprender sobre o *que* aprender, a partir da pesquisa disciplinar, neste caso, da matemática educacional, o *que* aprender, a matemática, está no centro da investigação.

Particularmente, o caso que nos ocupa, a educação da geometria, é uma das áreas da matemática educacional em que mais se tem investigado os efeitos da tecnologia digital.

A tecnologia [digital] na educação da geometria se transformou na corrente principal [...] Isto, em parte, se deve à maneira

<sup>22</sup> A leitora ou o leitor pode visitar o repositório da Comunidade GeoGebra, chamado Materiais Didáticos (*Recursos para el aula*), no site [www.geogebra.org/materials](http://www.geogebra.org/materials), onde poderá encontrar REA elaborados com o GeoGebra em mais de 20 idiomas diferentes.

como algumas tecnologias, como os ambientes de geometria dinâmica, modificam os objetos e discursos geométricos de maneira bastante significativa, em comparação com as aproximações com lápis e papel (SINCLAIR *et al.*, 2016, p. 704).

Além disso, os mencionados ambientes de geometria dinâmica – AGD, e o do GeoGebra em particular, são bons representantes de uma tecnologia digital que tem sido construída no âmbito não oficial, pelo qual se apresenta como uma tecnologia propícia para indagar o estado da pesquisa em matemática educacional incorporando tecnologia digital.

Com esta ideia em mente, em seguida apresenta-se o resultado de uma revisão de literatura para entender a maneira como a tecnologia digital está sendo usada na pesquisa, visando àquelas que usam AGD. A este respeito, foram identificadas três tendências na pesquisa.

## COM OU SEM TECNOLOGIA DIGITAL?

Este é o modelo típico de pesquisa sobre os efeitos da tecnologia digital em matemática educacional. São muito abundantes as investigações sobre AGD que realizam uma comparação entre realizar tarefas com papel e lápis, e aquelas realizadas em AGD. Alguns exemplos desta tendência na pesquisa em matemática educacional são os trabalhos de Stylianides e Stylianides (2005), Iranzo e Fortuny (2009), Koyuncu *et al.* (2015), e Hitt *et al.* (2017a, b).

Esta tendência de pesquisa e sua pergunta motivacional (Com ou sem tecnologia digital?), correspondem ao paradigma tradicional de pesquisa antropológica sobre a relação entre tecnologia e cultura, já que nela se vê a tecnologia como um periférico das sociedades, o qual poderia estar ou não presente em nossas sociedades, sem maiores consequências.

## AMPLIAÇÃO DO FÍSICO AO DIGITAL

A segunda tendência está marcada pelo interesse em estender os resultados e conclusões da pesquisa realizada em espaços físicos para os espaços digitais. Esta ampliação tem sido realizada tanto na elaboração de projetos e de recursos, que podem estar baseados ou não na pesquisa; e nas explicações teóricas dos fenômenos associados à presença da tecnologia digital para ensinar ou aprender matemática.

Sinclair e Yerushalmy (2016) refletem sobre este tema no campo da pesquisa em matemática educacional.

Em termos teóricos, temos percebido uma tendência de pesquisadores de combinarem duas ou mais perspectivas teóricas para considerar adequadamente seus contextos de pesquisa. Às vezes, as teorias gerais de aprendizagem devem ser combinadas com teorias que proporcionam uma abordagem mais centrada no uso das ferramentas e seu papel no ensino e na aprendizagem. Vemos a necessidade de articular melhor as teorias de aprendizagem com as teorias de uso de ferramentas que atualmente se fazem, na maior parte, combinando abordagens (SINCLAIR; YERUSHALMY, 2016, p. 264).

Assim, mostra-se a necessidade de abordar as pesquisas que envolvem a tecnologia digital nos fenômenos didáticos ligados com a matemática, atendendo explicações teóricas sobre aprendizagem e as que estão centradas no uso da tecnologia digital e como influencia o ensino e a aprendizagem.

Desta forma, essa tendência de pesquisa corresponde a uma transição entre o paradigma tradicional e o moderno na investigação antropológica sobre a relação entre tecnologia e cultura. Essa transição se caracteriza por começar a reconhecer a necessidade de não trivializar o papel da tecnologia em sua relação constituinte com a cultura, e conseqüentemente, ao estar presente em fenômenos educacionais.

## ÊNFASE EPISTÊMICA: O ESPECÍFICO DO DIGITAL NA EDUCAÇÃO

A terceira tendência caracteriza-se pelo interesse em questionar o específico de aprender ou de ensinar matemática em espaços digitais. Já não há lugar para a pergunta: com ou sem tecnologia digital? Ainda, tentativas de estender as explicações sobre o uso de tecnologia analógica (de espaços físicos) para a tecnologia digital estão sendo abandonadas. Aqui, o foco da atenção está em reconhecer a existência de uma mudança na maneira de interagir com a matemática, quando se utiliza a tecnologia digital.

Para o específico ou próprio de aprender ou ensinar matemática com tecnologias digitais, Artigue (2002, p. 248) chama o *valor epistêmico* das técnicas instrumentadas, “o qual contribui para o entendimento dos objetos nos quais está envolvido” e, portanto, converte-se em “uma fonte de perguntas sobre o conhecimento matemático”. É importante observar que Artigue reconhece, também, que as técnicas instrumentadas têm *valor pragmático*, referido ao “seu potencial produtivo (eficiência, custo, campo de validade)” (ARTIGUE, 2002, p. 248). Algumas pesquisas que se embasam no valor epistêmico das técnicas instrumentadas por AGD, embora não necessariamente o declarem como parte de seu suporte teórico, são a de Arzarello, Olivero e Robutti (2002), pois se baseiam nas tipologias cognitivas do uso do arrasto por estudantes para resolver problemas geométricos; a de Laborde (2002), que investiga diferentes tipos de tarefas ao estudar geometria, e identifica que em tais ambientes emergem novos tipos de tarefas, as quais unicamente têm sentido e significado na AGD, ou seja, são tarefas que somente são possíveis de resolver em um espaço de características específicas dela; a de Cantoral e Montiel (2014), os quais estudam funções mediante tratamento gráfico, que se realiza através de três aproximações: tabulação, transformações e

operações gráficas; a de Sinclair e Yurita (2008), que estudam famílias de quadriláteros mediante o exame de seu comportamento e o que fica invariável ao aplicar o arrasto.

Um aspecto importante a destacar dessa tendência é que, assim como propôs Artigue (2002), na atualidade, a pesquisa tem o desafio de buscar equilíbrio entre os valores pragmático e epistêmico ao envolver a tecnologia digital, pois ambos os valores são inseparáveis (CHEVALLARD, 1992). Além disso, Artigue (2009) adverte que essa busca de equilíbrio não é trabalho fácil, e que frequentemente encontra resistência, porque

as tecnologias digitais ferverem sobre o equilíbrio tradicional entre os valores pragmático e epistêmico das técnicas que se construíram em uma cultura de papel e lápis. Uma razão essencial para isso é a forma que os sistemas educacionais tendem a se adaptar às tecnologias digitais sem reconsiderar seus valores fundamentais, tratando a tecnologia [digital] como um simples coadjuvante pedagógico [...]. Isso requer tarefas e situações que não sejam uma simples adaptação das tarefas de papel e lápis, frequentemente tarefas sem equivalente no ambiente de papel e lápis, portanto, as tarefas não são tão fáceis de projetar quando se ingressa no mundo tecnológico [digital] com sua cultura de papel e lápis (ARTIGUE, 2009, p. 467- 468).

Como consequência, a valorização das tecnologias digitais na educação é um assunto cultural, ou, de maneira mais precisa, uma mudança entre a cultura tradicional de lápis e papel e a cultura digital. Assim, é natural estabelecer relação entre a ênfase epistêmica com o paradigma moderno de pesquisa antropológica sobre o vínculo tecnologia-cultura, que aceita a tecnologia (digital) como construção social, cultural e simbólica em nossas sociedades modernas e complexas. Explicando de outra forma, a tecnologia é parte da cultura e, por sua vez, da sociedade.

## ECOSSISTEMA EDUCACIONAL HÍBRIDO EM MATEMÁTICA EDUCACIONAL

Conforme comentado na seção 3, o presente trabalho posiciona-se no paradigma moderno de pesquisa antropológica, e por esta razão é relevante para o propósito de responder a segunda pergunta proposta na seção 1, relativa a qual matemática e como se lhe aprende na Era Digital, abordar a proposta de enfatizar a valorização epistêmica da tecnologia digital ao estudar matemática, considerada na seção anterior. Não obstante, à luz da proposta dos Ecossistemas Educacionais Híbridos, é importante reconhecer que, nesses ecossistemas, outros espaços intervêm, além do físico e do digital, como a realidade aumentada ou o vídeo 360.

Desta forma, é sensato perguntar se é possível explorar o valor epistêmico em outras tecnologias diferentes das digitais, e finalmente, em valorizar epistemologicamente o uso das tecnologias de todos os espaços que configuram os Ecossistemas Educacionais Híbridos.

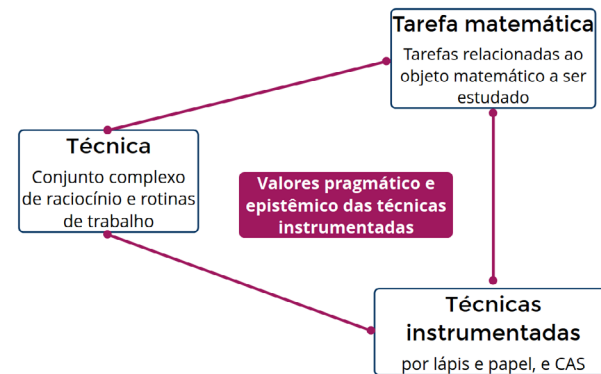
## VALORES EPISTÊMICO E PRAGMÁTICO DA TECNOLOGIA DIGITAL

Para abordar essa questão, é necessário voltar à proposta original de Artigue (2002), que se refere aos valores epistêmico e pragmático exclusivamente das técnicas matemáticas, em que a técnica é um constructo herdado da teoria antropológica do didático - TAD, mesmo ampliada pela autora, de “uma maneira de resolver uma tarefa” a uma “complexa montagem de razoamentos e rotina de trabalho” (ARTIGUE, 2002, p. 248). Em relação às técnicas analisadas

na pesquisa, a autora declara dois tipos: técnicas de lápis e papel e técnicas instrumentadas<sup>23</sup> (ver Figura 5).

É interessante observar que, cada vez que Artigue fala do valor epistêmico ou pragmático de uma técnica, sempre está se referindo a uma técnica junto com a tecnologia usada na tarefa matemática, seja ela de lápis e papel ou tecnologia digital. Disto se pode inferir a relação indissolúvel entre a técnica e a tecnologia utilizada na tarefa matemática. Esta inferência tem mais sentido quando examinadas as bases de distinção entre os valores pragmático e epistêmico, que é original da ergonomia cognitiva (VÉRILLON; RABARDEL, 1995) e está referido ao esquema de uso da tecnologia. Assim, os *valores epistêmico e pragmático da técnica* são uma articulação entre constructos da ergonomia cognitiva e da TAD (ARTIGUE, 2007).

Figura 5 - Valores pragmático e epistêmico das técnicas instrumentadas



Fonte: Elaborada com base em Artigue (2002).

<sup>23</sup> Artigue (2002) refere-se às *técnicas instrumentadas* para falar das *técnicas instrumentadas por tecnologias computacionais*. Portanto, quando aparece a frase *técnica instrumentada* neste texto, a leitora ou o leitor pode presumir, sem perda de precisão, que está se falando de técnicas ao usar tecnologias digitais. Este esclarecimento é necessário para manter a coerência de termos usados no presente capítulo.



Somado a isso, o uso desses termos na literatura especializada é flexível, adicionado a outros ao invés de se referir à técnica. Por exemplo, em Sinclair *et al.* (2009), a respeito do desenvolvimento de tarefas em uma AGD e o uso do arrasto, falam dos valores epistêmico e pragmático das *práticas instrumentadas*, das *ações*, da *ferramenta* e da *prática*. Em Monaghan e Trouche (2016), sobre o projeto de tarefas com ferramentas digitais, referem-se ao *valor epistêmico da tarefa*, mesmo necessitando esclarecer em nota de rodapé, que tal frase pode ser considerada uma abreviação do *valor epistêmico da técnica requerida para resolver a tarefa*. Por sua vez, Artigue (2009), fazendo uma reflexão de sua pesquisa de 2002, refere-se ao *poder epistêmico e pragmático da tecnologia*.

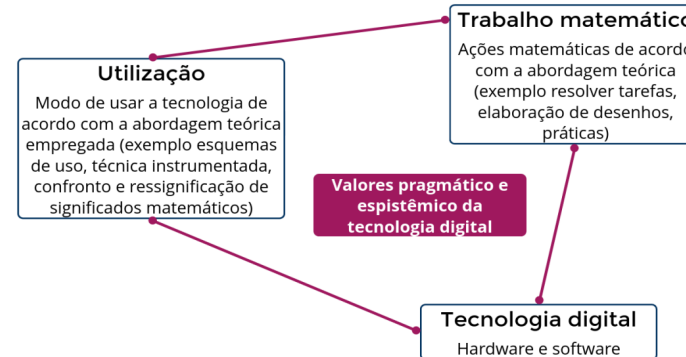
Considerando o uso indissolúvel entre técnica e tecnologia, a origem da distinção entre valores epistêmico e pragmático ao usar tecnologias, e a flexibilidade no uso do termo referido à *técnica* na literatura especializada, é possível reconhecer que o constructo *valores epistêmico e pragmático da técnica* se deve ao posicionamento teórico e aos interesses de Artigue, que tinha o objetivo de usar ferramentas teóricas que lhe permitissem dar conta do papel dos instrumentos e do trabalho técnico, para o qual declara que “as aproximações antropológicas e socioculturais parecem ser mais sensíveis ao papel que desempenham os instrumentos no trabalho matemático, e para considerar, de maneira apropriada, o papel do ‘trabalho técnico’” (ARTIGUE, 2009, p. 47). É de onde advém a forte ênfase na técnica.

Sob essas considerações, pode-se ampliar o constructo *técnica instrumentada para uso – em sentido amplo – da tecnologia digital*, ao desenvolver um trabalho matemático (por exemplo, resolver tarefas, solucionar problemas, elaborar projetos). O uso da tecnologia digital se verá, então, permeado pela teoria empregada na pesquisa correspondente, podendo se traduzir no estudo do artefato, quando se trabalha com ergonomia cognitiva; no estudo de técnicas

instrumentadas, quando se trabalha com a aproximação instrumental; e no estudo da confrontação e ressignificação de significados matemáticos com o uso de tecnologia digital, quando se trabalha com a Socio-epistemologia (RUBIO-PIZZORNO, 2018)<sup>24</sup>, entre outros.

Assim, também é possível recorrer à economia de linguagem para falar simplesmente de *valores epistêmico e pragmático da tecnologia digital* (ver Figura 6), entendendo que essa valoração poderá ser realizada sempre que haja uso matemático da tecnologia. Em outras palavras, a tecnologia digital *per se* não tem valoração epistêmica ou pragmática, mas ela só ocorre quando se realiza um trabalho matemático com ela. Como afirmou Artigue (2002, P. 268), “o valor epistêmico [e pragmático], é claro, não é algo que se possa definir de maneira absoluta; ele depende dos contextos”.

**Figura 6. Valores pragmático e epistêmico da tecnologia digital**



Fonte: Elaborada pelos autores.

<sup>24</sup> Para este assunto em particular, recomenda-se especificamente a seção 2.4.3. *Confrontos de significados matemáticos (Confrontación de significados matemáticos)*, apenas em espanhol (RUBIO-PIZZORNO, 2018, pp. 127 - 133).

## VALORES EPISTÊMICO E PRAGMÁTICO DAS TECNOLOGIAS

Depois de reconhecer a possibilidade de valoração epistêmica e pragmática da tecnologia digital, fica pendente explorar a possibilidade de ampliar essa valoração para as tecnologias representativas de outros espaços, como o físico, a realidade aumentada, etc., ou seja, dos espaços que constituem os Ecossistemas Educacionais Híbridos.

Em primer lugar, é necessário recordar que, na proposta original sobre o valores epistêmico e pragmático, Artigue (2002) reconhece essa valoração para o lápis e papel (tecnologia de espaço físico) e para o CAS (tecnologia digital). Portanto, desde o início se reconhece a valoração, não apenas das tecnologias digitais, também daquelas correspondentes a espaços físicos, como o lápis e o papel.

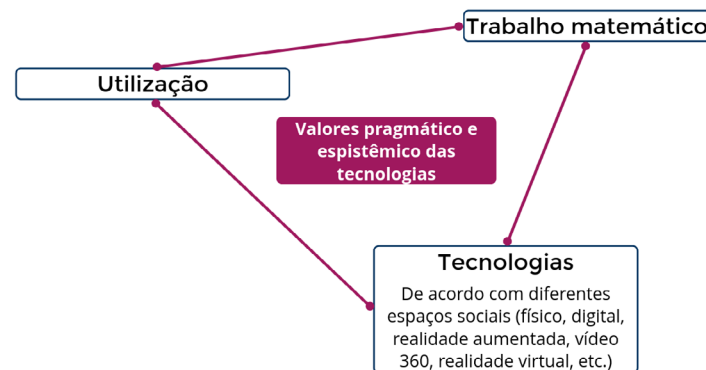
Por outro lado, a relação entre a matemática e a tecnologia tem longa data. Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008) realizaram uma revisão histórica sobre essa relação, em que propõem que é uma constituinte mútua, e que tem ocorrido a partir de suas origens até nossos tempos, ou seja, desde os ossos com marcas realizadas há 30.000 anos (a.C.), encontrados em Moravia, até as tecnologias mais recentes. Com base na revisão histórica, os autores descreveram cinco etapas da relação entre a matemática e a tecnologia, as quais correspondem às etapas estática inerte, estática cinestésica/estética, estática computacional, dinâmica discreta e dinâmica contínua.

É necessário reconhecer que a matemática e a tecnologia têm estado sempre relacionadas, desde os entalhes nos ossos para contar, até a criação de modelos matemáticos com realidade aumentada ou virtual, passando pelo ábaco e pela calculadora, que permitem admitir que as tecnologias usadas em cada etapa têm servido a um propósito matemático, ou seja, para fazer algo matematicamente. Portanto,

podemos propor que toda tecnologia, não importando a qual espaço represente (físico, digital, realidade aumentada, etc.), que seja usada para desenvolver um trabalho matemático, tem seus valores epistêmico e pragmático (ver Figura 7). Estes últimos correspondem a:

- **Valor epistêmico das tecnologias:** formas como as tecnologias ajudam a compreender o objeto matemático e geram perguntas sobre ele, quando usadas para desenvolver um trabalho matemático específico.
- **Valor pragmático das tecnologias:** potencial produtivo das tecnologias, ou seja, eficiência, custo e campo de validade.

Figura 7 - Valores pragmático e epistêmico das tecnologias



Fonte: Elaborada pelos autores.

Desta forma, conseguimos dar respostas para as perguntas motivadoras deste estudo, reconhecendo a existência dos Ecosistemas Educacionais Híbridos, e a valorização epistêmica e pragmática das tecnologias que representam cada um dos espaços que constituem tais ecossistemas, quando usadas em um trabalho matemático. No esquema da Figura 7 estão sintetizadas as contribuições das explicações antropológicas, sociológicas, de pesquisa educacional e da matemática educacional, as quais têm se articulado mediante o desenvolvimento autônomo da última e

a recontextualização das primeiras, com o objetivo de construir conhecimento, tal como proposto na seção 2.

Para operacionalizar essa proposta, em seguida se apresentam os aspectos a ser considerados para o uso dos Ecosistemas Educacionais Híbridos, seja para elaborar projetos educacionais, para analisar a implementação de projetos, na pesquisa, etc., sempre a partir de um enfoque teórico específico da matemática educacional:

- I. *Explorar as tecnologias disponíveis*, considerando os diferentes espaços sociais;
- II. *Posicionar-se em um enfoque teórico específico* que permitirá determinar a que se refere, em particular, o trabalho matemático e o uso das tecnologias;
- III. *Indagar os valores epistêmico e pragmático das tecnologias* características dos diferentes espaços, no desenvolvimento do trabalho matemático específico;
- IV. *Explorar a maneira de usar coordenadamente as diferentes tecnologias* para melhor aproveitamento de seus valores pragmático e epistêmico no desenvolvimento do trabalho matemático.

Na seção seguinte mostra-se, como exemplo, a elaboração de um projeto educacional seguindo as pautas da operacionalização dos Ecosistemas Educacionais Híbridos na pesquisa em matemática educacional.

## UM EXEMPLO A MODO DE CONCLUSÃO

Nesta seção apresenta-se um exemplo para ilustrar o reconhecimento e uso dos Ecosistemas Educacionais Híbridos na matemática educacional, especificamente com o uso do GeoGebra.

Usam-se os quatro pontos da operacionalização da proposta dos Ecosistemas Educacionais Híbridos recém anunciados, para analisar o exemplo que corresponde ao projeto de um REA construído no Livro GeoGebra, articulando tecnologias dos espaços físico e digital, para o estudo da conservação de áreas. Esse REA foi projetado como parte do Seminário de Integração Digital para a Prática do Docente de Matemática, reportado no trabalho de Rubio-Pizzorno (2018).

Cabe destacar que, para proceder com a operacionalização dos Ecosistemas Educacionais Híbridos, primeiro se atendeu a um conteúdo curricular, já que o REA foi projetado para ser implementado em condições educacionais reais, ou seja, com um grupo de estudantes de 5º ano.

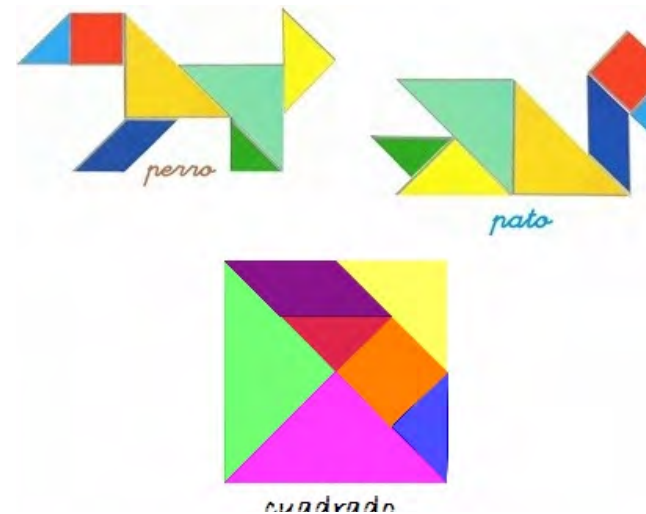
No Seminário se estava trabalhando com base na proposta teórica da confrontação e ressignificação dos significados matemáticos (ver nota de rodapé de número 10). Conseqüentemente, o trabalho matemático estava determinado pelas práticas matemáticas realizadas com o uso das tecnologias, para confrontar os significados associados com a conservação de área.

Dada a postura teórica, buscaram-se significados escolares a serem confrontados, associados à conservação de áreas. Para isso, embasamo-nos nas ideias reportadas por Kospentaris, Spyrou e Lappas (2011), que relatam que as crianças tendem a pensar que, quanto maior a área das figuras estudadas, maior deve ser seu perímetro; e que apenas as figuras congruentes têm área igual.

Com essas duas ideias a confrontar, exploraram-se as tecnologias disponíveis que puderam servir ao propósito, ou seja, que tiveram valores epistêmico e pragmático que permitiram confrontar essas ideias. Para isso considerou-se o uso do tangram de madeira, para comparar figuras com igual área, mas com diferentes perímetros, e assim confrontar a relação área-perímetro já descrita. A atividade

projetada consiste em pedir aos estudantes que armem diferentes figuras (cachorro, pato) usando todas as peças do tangram de madeira (ver Figura 8), para depois medir o perímetro de cada figura e compará-lo com a outra. Com essa atividade pretende-se que os estudantes possam identificar figuras que têm perímetros diferentes e supor que a figura com maior perímetro também tem maior área. Porém, ao refletir que ambas as figuras foram armadas exatamente com as mesmas peças, confronta-se essa ideia de que quanto maior perímetro, maior a área; também se espera que possam concluir que figuras que têm igual área podem ter perímetros diferentes.

**Figura 8 - Diferentes configurações do tangram**

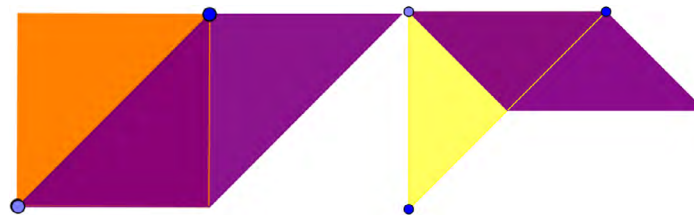


Fonte: Alvarez Zamorano (2018, p. 41).

Em relação à congruência-área, o tangram de madeira permite confrontar a ideia de que apenas os polígonos congruentes têm igual área, através da comparação por sobreposição das peças. Por exemplo, é possível comparar a superfície do quadrado, o triângulo amarelo e o romboide (roxo), mediante a sobreposição das peças com uma configuração específica (como se mostra na Figura 9). Ao realizar

essa comparação, pode-se observar que o quadrado e o romboide têm uma superfície comum, e que as superfícies não comuns são triângulos congruentes. Esse trabalho matemático de comparação por sobreposição pode ser realizado também com o triângulo amarelo e o romboide, obtendo o mesmo resultado. Isso permite confrontar a ideia de que apenas os polígonos congruentes têm a mesma área.

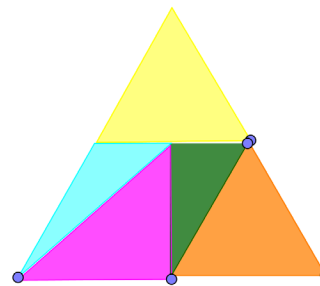
**Figura 9 - Comparação de áreas mediante sobreposição das peças**



Fonte: Adaptado de Alvarez Zamorano (2018, p. 4.2).

Contudo, essa estratégia envolve unicamente a comparação de área de polígonos de tipo diferente, ou seja, não permite confrontar essa ideia com polígonos de igual tipo. Devido a esta situação, explorou-se a possibilidade de usar o AGD do GeoGebra para aproveitar a facilidade de seu uso para realizar construções geométricas precisas. Assim, elaborou-se um tangram em AGD do GeoGebra, constituído unicamente por triângulos (Figura 10), em que alguns deles têm a mesma área.

**Figura 10 - Tangram triangular**

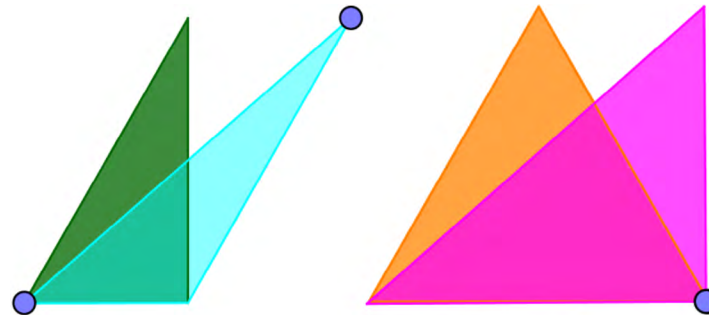


Fonte: Alvarez Zamorano (2018, p. 44).



Este tangram permite comparar a área de triângulos diferentes através de sobreposição de triângulos, fixando a base e depois analisando se suas alturas em relação à tal base são da mesma longitude (ver Figura 11).

**Figura 11 - Comparação de triângulos através de sua base e altura**



Fonte: Adaptado de Alvarez Zamorano (2018, p. 4.4).

Usando o tangram triangular dessa maneira, é possível confrontar a ideia de que apenas os polígonos congruentes têm a mesma área.

Finalmente, todas as atividades recém apresentadas incorporaram-se a um Livro GeoGebra, para estabelecer uma sequência educacional para aproveitar os valores epistêmico e pragmático de cada tecnologia, bem como para o uso coordenado delas.

Em primeiro lugar dispõem-se as atividades com o tangram de madeira, dada a experiência dos estudantes de 5º ano com os materiais manipuláveis. Em seguida propõem-se atividades de medição de área e perímetro do tangram e suas peças, e depois, propõe-se a atividade correspondente à Figura 8. Para transitar das atividades com o tangram de madeira para o uso do AGD do GeoGebra, dispõe-se de uma atividade para armar as figuras do pato e do cachorro em um tangram digital, para realizar a mesma comparação da relação entre área e perímetro, mas agora com uma tecnologia digital. Com o

mesmo tangram digital também se propõem atividades para comparar a área e o perímetro das peças do tangram.

Para introduzir, em seguida, a comparação de triângulos mediante sua base e altura, dispõe-se de uma atividade para relacionar a área e o perímetro de triângulos, considerando ambos os elementos. Então, introduz-se o tangram triangular criado com o GeoGebra nessa parte (ver Figura 10), para confrontar a relação congruência-área.

Além disso, o Livro GeoGebra apresenta-se como um ambiente digital para organizar e estruturar as atividades a serem desenvolvidas pelos estudantes em ambos os espaços (físico e digital) com o uso de diferentes tecnologias (tangram de madeira, lápis e papel, AGD do GeoGebra, perguntas de múltipla escolha e de resposta aberta (questões dissertativas) do Livro GeoGebra, também a exploração de objetos físicos cotidianos de uma aula).

Desta forma, abordaram-se as duas ideias sobre conservação de área a confrontar, referidas na relação área-perímetro e congruência-área, usando a abordagem dos Ecossistemas Educacionais Híbridos na elaboração de um REA. O quadro 1 expõe uma síntese dos elementos envolvidos na abordagem dos Ecossistemas Educacionais Híbridos para a noção de conservação de área recém desenvolvida, considerando os seguintes elementos teóricos com base na confrontação de significados matemáticos (RUBIO-PIZZORNO, 2018).

- **Uso das tecnologias:** confrontação e ressignificação de significados associados à conservação de área, com o uso do tangram e de AGD do GeoGebra;
- **Trabalho matemático:** práticas matemáticas, como a comparação por sobreposição ou de acordo com a base e altura de triângulos.

**Tabela 1 - Análise dos Ecossistemas Educacionais Híbridos em Alvarez Zamorano (2018)**

<b>Espaços</b>	<b>Tecnologias</b>	<b>Valor epistêmico</b>	<b>Valor pragmático</b>
<i>Físico</i>	<i>Tangram de madeira</i>	<i>Comparação por sobreposição das superfícies das peças para confrontar a relação entre área e perímetro.</i>	<i>Facilidade para manipular suas peças.</i>
<i>Digital</i>	<i>Tangram triangular e digital</i>	<i>Comparação de triângulos usando a técnica da altura e base iguais para confrontar a relação congruência-área.</i>	<i>Facilidade para realizar construções geométricas precisas.</i>

Fonte: Adaptado de Alvarez Zamorano (2018).

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do paradigma antropológico moderno da relação entre cultura e tecnologia é possível considerar as tecnologias como construção social, a qual permite reconhecer que são parte natural de nossos ecossistemas educacionais. Também, a partir da contribuição da sociologia e da pesquisa educacional tem sido possível reconhecer que, na atualidade, a materialidade social é uma hibridização entre espaços de diferentes naturezas. Assim, é possível reconhecer a existência e validade dos Ecossistemas Educacionais Híbridos como consequência de abordar a pergunta: como a sociedade se articula para construir conhecimento aproveitando as tecnologias?

Um aspecto importante para ressaltar, dos Ecossistemas Educacionais Híbridos, é que são construídos a partir do não oficial, representado pelos recursos educacionais abertos ou REA, que

constroem comunidades abertas. Esses REA são parte dos comuns, ou, explicado de outra forma, do acervo de conhecimento e bens construídos aberta e socialmente, para atender as necessidades educacionais pessoais e comunitárias.

Portanto, a importância da proposta dos Ecosistemas Educacionais Híbridos vai além de apenas considerar o aspecto tecnológico. Em termos docentes, a importância reside em que os professores e professoras tenham oportunidades de atender as necessidades e inquietudes educacionais de seus estudantes, a partir de uma posição de autonomia e empoderamento docente, que pode ser complementada com a atenção obrigatória às normas educacionais oficiais. Isso é possível graças a que, em primeiro lugar, já estamos em condições de reconhecer a existência de diferentes espaços sociais com suas respectivas tecnologias, as quais podemos aproveitar, de acordo com sua disponibilidade, para nossos propósitos educacionais; em segundo lugar, já existe um grande acervo de recursos educacionais reunido em múltiplos repositórios de REA, onde os professores podem buscar e usar os que se ajustem a suas necessidades; e em terceiro lugar, existem as condições técnicas para que os professores possam criar e compartilhar, de maneira aberta, seus próprios recursos educacionais.

Em termos disciplinares, representa a oportunidade de aproveitar as tecnologias com um sentido educacional e didático mais consciente, ou seja, aproveitá-las pragmática e epistemicamente, o que aborda o questionamento sobre qual matemática e como se aprende na era digital. Já somos conscientes da variedade de espaços sociais e suas tecnologias, os quais se pode aproveitar na educação. Além disso, já contamos com as ferramentas para valorizar tais tecnologias com sentido educacional e didático, aproveitando seu potencial de uso e as formas com que ajudam a compreender um objeto ou noção matemática.

Isto informa sobre uma nova tendência de pesquisa com tecnologias em matemática educacional, que nos propõe questionar sobre os valores pragmático e epistêmico de todas as tecnologias.

## REFERÊNCIAS

ALVAREZ ZAMORANO, M. A. *Conservación de área [Libro GeoGebra]*, 2018. Disponível em: <https://mat.geogebra.org/m/MUh7Pzz8>

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2002, 7 (3), pp. 245–274. doi: 10.1023/A:1022103903080.

ARTIGUE, M. Digital technologies: A window on theoretical issues in mathematics education. In: D. PITTA-PANTAZI; G. PHILIPPOU (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the European Society for research in mathematics education (2007, Vol. 5, pp. 68–82)*. Larnaca, Chipre: University of Cyprus and ERME. Disponível em: <https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/plenaries.pdf>

ARTIGUE, M. The Future of Teaching and Learning Mathematics with Digital Technologies. In: B. R. HODGSON, A.; KUZNIAK; J.-B. LAGRANGE (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (2009, pp. 463–475). Cham: Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0\\_23](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_23)

ARZARELLO, F., OLIVERO, F., PAOLA, D., Y ROBUTTI, O. A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 2002, 34 (3), 66–72. doi: 10.1007/BF02655708

BASNIAK, M. I. A construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 9 (1), 2020, 10-25. ISSN: 2316-8889. doi: 10.23925/2237-9657.2020.v9i1p43-58

BUTCHER, N.; KANWAR, A.; UVALIC-TRUMBIC, S. *Guía Básica de Recursos Educativos Abiertos (REA)*. Francia: UNESCO, 2015. Disponível em: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000232986>

CABRI. Cabri Express terms of use. 2017. Disponível em: <https://cabri.com/en/>

CANTORAL, R.; MONTIEL, G. *Precálculo, un enfoque visual*. México: Pearson Educación, 2014.

CASTELLS, M. *La Era de la Información. Economía, Sociedad y Cultura: La Sociedad Red. Volumen I. Siglo XXI, Estado de México, México*, 1999.

CCD Radio (Sin fecha). *Inmersión: RV, RA, RM [podcast]*. En Glitch. Disponible em: <https://soundcloud.com/ccd-radio/glitch-2>.

CENTRO DE CULTURA DIGITAL. *Cada tecnología inmersiva se relaciona con el movimiento de distinta manera: en video 360 al girar la cabeza movemos la cámara; en #VR podemos desplazarnos en el espacio de una habitación; y en la mixta la libertad de movimiento se abre hacia espacios más extensos. #LabInmersión [twitt]*. 28 de febrero de 2018. Recuperado de: [twitter.com/CCDmx/status/968947688195743749](https://twitter.com/CCDmx/status/968947688195743749).

CHEVALLARD, Y. Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. En B. Cornu (Ed.), *L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques, Nouvelle Encyclopédie Diderot* (pp. 183–203). Paris: Presses Universitaires de France, 1992.

COBO, C.; MORAVEC, J. W. *Aprendizaje invisible. Hacia una nueva ecología de la educación*. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona, 2011.

COMUNIDAD GEOGEBRA LATINOAMERICANA. S06 Construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções [Video]. *Coloquio GeoGebra de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana – Año 1*, sesión 6, 2019. Recuperado de: [https://youtu.be/ufpBK\\_CzDUQ](https://youtu.be/ufpBK_CzDUQ).

CONTRERAS, P. *Me llamo Kohfam. Identidad de un hacker: una aproximación antropológica*. Editorial Gedisa S. A., Barcelona, 2033.

FREIMAN, V. Types of Technology in Mathematics Education. En Stephen Lerman (ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. 2014, pp. 623–629. DOI: 10.1007/978-94-007-4978-8.

GARCÍA GAGO, S.; OBREGÓN, J.; ROBAYO, C.; SPITIA, N.; ALMARAZ FUNES, J.; BRAVO, L. *El software libre en la radio. Migrar la tecnología*. Red de Radios Comunitarias y Software Libre y la Asociación Latinoamericana de Educación y Comunicación Popular (ALER), 2020. Disponible em: <https://liberaturadio.org/manual-el-software-libre-en-la-radio/>.

HITT, F.; SABOYA, M.; CORTÉS, C. Task Design in a Paper and Pencil and Technological Environment to Promote Inclusive Learning: An Example with Polygonal Numbers. En: Aldon Gilles; Fernando Hitt; Luciana Bazzini y Uwe Gellert (Eds.), *Mathematics and Technology. Advances in Mathematics Education*, 2017a, pp. 57–74. Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-319-51380-5\_4.

HITT, F.; SABOYA, M.; ZAVALA, C. C. Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and

- pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, 2017b, 94 (1), pp. 97–116. doi: 10.1007/s10649-016-9717-4.
- IRANZO, N.; FORTUNY, J. M. La influencia conjunta del uso del GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 2009, 27 (3), pp. 433–446.
- KOSPENTARIS, G.; SPYROU, P.; LAPPAS, D. Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 2011, 77 (1), pp. 105-127. doi: 10.1007/s10649-011- 9303-8.
- KOYUNCU, I.; AKYUZ, D.; CAKIROGLU, E. Investigation plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in the technology and paper-and-pencil environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2015, 13 (4), pp. 837–862. doi: 10.1007/s10763-014-9510-8.
- LABORDE, C. Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2002, 6 (3), pp. 283–317. doi: 10.1023/A:1013309728825.
- LERMAN, S. The social turn in mathematics education research. En Joe Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning. International Perspectives on Mathematics Education*, 2000, pp. 19–44. Londres, United Kingdom: Ablex.
- MONAGHAN, J.; TROUCHE, L. Tasks and Digital Tools. In: MONAGHAN, J.; TROUCHE, L.; BORWEIN, J. M. (eds.) *Tools and Mathematics. Instruments for learning*, 2016, 391 - 416.
- MORENO-ARMELLA, L.; HEGEDUS, S. J.; KAPUT, J. J. From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 2008, 68 (2), 99–111. DOI: 10.1007/s10649-008-9116-6.
- PINCH, T. La construcción social de la tecnología: una revisión. En: María Josefa Santos y Rodrigo Díaz Cruz (Eds.), *Innovación tecnológica y procesos culturales. Perspectivas teóricas*, 2015. capítulo 2, pp. 18–37. Fondo de Cultura Económica, México.
- POKÉMON. Disponível em: [www.pokemongo.com](http://www.pokemongo.com).
- ROWE, J. *Our Common Wealth. Hidden Economy That Makes Everything Else Work*. Berrett-Koehler Publishers: San Francisco, Estados Unidos, 2013.
- RUBIO-PIZZORNO, S. *Integración digital a la práctica del docente de geometría*. Tesis de Maestría no publicada. Ciudad de México, México:

Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav), 2018.  
doi: 10.13140/RG.2.2.15488.94728/1.

RUBIO-PIZZORNO, S. Impulsando la Educación Abierta en Latinoamérica desde la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. *Revista del Instituto GeoGebra de São Paulo*, 9 (1), 10-25. ISSN: 2316-8889, 2020. doi: 10.23925/2237-9657.2020.v9i1p10-25

SANTOS, M. J.; DÍAZ CRUZ, R. Voces plurales en los estudios de tecnología y cultura: una introducción. En: María Josefa Santos y Rodrigo Díaz Cruz (Eds.), *Innovación tecnológica y procesos culturales. Perspectivas teóricas*, 2015, capítulo 1, pp. 9–17. Fondo de Cultura Económica, México.

SERRES, M. *Pulgarcita: el mundo cambió tanto que los jóvenes deben reinventar todo: una manera de vivir juntos, instituciones, una manera de ser y de conocer*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica, 2013.

SINCLAIR, N.; BARTOLINI BUSSI, M. G.; DE VILLIERS, M.; JONES, K.; KORTENKAMP, U.; LEUNG, A.; OWENS, K. Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM - Mathematics Education*, 2016, 48 (5), 691–719. DOI: 10.1007/s11858-016-0796-6.

SINCLAIR, N.; YERUSHALMY, M. Digital Technology in Mathematics Teaching and Learning. En: Ángel Gutiérrez; Gilah C. Leder y Paolo Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 2016 pp. 235–274. SensePublishers, Rotterdam. doi: 10.1007/978-94-6300-561-6\_7

SINCLAIR, N.; YURITA, V. To be or to become: how dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education*, 2008, 10 (2), 135–150. doi: 10.1080/14794800802233670

SORIA GUZMÁN, I. *Ética hacker, seguridad y vigilancia*. México: Universidad del Claustro de Sor Juana, 2016. ISBN: 987-607-7853-16-9. Disponível em: <http://ru.iiec.unam.mx/3463/1/EticaHackerSeguridadVigilancia.pdf>

STACEY, P.; HINCHLIFF PEARSON, S. *Made With Creative Commons*. Copenhagen, Dinamarca: Ctrl+Alt+Delete Books, 2017. Recuperado de: <https://creativecommons.org/made-with-cc/>.

STYLIANIDES, G. J.; STYLIANIDES, A. J. Validation of Solutions of Construction Problems in Dynamic Geometry Environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2005, 10 (1), pp. 31–47. DOI: 10.1007/s10758-004-6999-x.

VÉRILLON, P.; RABARDEL, P. Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 1995, 10 (1): 77–101.