NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 103, marzo de 2020, páginas 13-28

Experiencia de modelización matemática llevada a cabo con futuros profesores

María Florencia Cruz
Ana María Mántica
Matías Agustín Gallo
(Universidad Nacional del Litoral. Argentina)

Fecha de recepción: 30 de marzo de 2019
Fecha de aceptación: 13 de noviembre de 2019

Resumen

Se presenta una investigación cualitativa en la que se pone especial atención en el modo en que futuros profesores en matemática transitan un proceso de modelización matemática al resolver una situación real. Particularmente se pone énfasis en los procesos de formulación y validación de afirmaciones puestos en juego y en las interacciones que se presentan.
Del análisis se aprecia que los estudiantes atraviesan diferentes sub-procesos (Blomhøj y Jensen, 2003) del proceso de modelización matemática, en algunos casos recurren, para validar sus afirmaciones, a pruebas pragmáticas y en otros a intelectuales. Las interacciones en la mayor parte de las situaciones del debate producen avances respecto a la producción matemática realizada.

Palabras clave Modelización Matemática, Futuros Profesores, Validación, Interacciones.

Title **Mathematical modelling experience carried out with future teachers**

Abstract

Here we present a qualitative research focused on the way of action of pre-service teachers when carrying out a mathematical modeling process to address a real-life situation. Particularly we emphasize the formulation and validation processes put into play and their interactions.
From the analysis is evident that students go through different sub-processes (Blomhøj y Jensen, 2003) of the mathematical modeling process. In some cases, they appeal to pragmatic tests and other intellectual proofs in order to validate their statements. The interaction in most of the debate situation results in progress regarding the performed mathematical production.

Keywords Mathematical Modeling, Future Teachers, Validation, Interactions.

1. Introducción

En este trabajo se presentan resultados de una investigación en la que se analizan producciones de Futuros Profesores en Matemática que cursan sus estudios en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, situada en la provincia de Santa Fe en Argentina.

Estas producciones se obtienen al proponer, en la asignatura taller de Geometría, una situación con el fin de que los estudiantes[1] atraviesen un proceso de modelización matemática.

Esta investigación tiene por objetivo analizar el modo en que estos estudiantes de Profesorado en Matemática transitan los sub-procesos (Blomhøj y Jensen, 2003) del proceso de modelización al resolver la situación propuesta. También se pretende estudiar el modo en que las interacciones influyen en los procesos de formulación y validación de conjeturas que los futuros profesores realizan en el marco de dicho proceso de modelización.

Tanto a nivel nacional como internacional se pueden mencionar diversas investigaciones que ponen atención en los procesos de modelización matemática, por ejemplo Villarreal, Esteley y Mina (2010); Gallart, Ferrando y García-Raffi (2015); Villarreal, Esteley, y Smith (2015); Trelles y Alsina (2017); entre otras.

Así mismo, existen numerosas investigaciones en las que se pone especial atención en interacciones que se presentan entre estudiantes o estudiantes y docentes en las clases de matemática, por ejemplo, Cammisi, Kiener y Scaglia (2016) y Cruz, Mantica y Götte (2017). Respecto a la formulación y validación se pueden mencionar Carnelli, Falsetti, Formica y Rodríguez (2008), Duarte (2010), Gutiérrez y Jaime (2015), Ojeda, Saldivia y Maglione (2017), Cruz y Mántica (2017), entre otras.

Las investigaciones mencionadas otorgan información acerca del estado actual en el campo respecto a problemáticas vinculadas con modelización, interacciones y formulación y validación de conjeturas. Esto muestra la importancia de profundizar e interrelacionar estas temáticas altamente reconocidas en el campo de la Educación Matemática. A su vez, un aspecto a remarcar es que los estándares propuestos por el consejo interuniversitario nacional en Argentina para la formación de futuros profesores en matemática (2012), los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios para la Educación Secundaria (2011) y los Diseños Curriculares para la Educación Secundaria de la Provincia de Santa Fe (2014) expresan la necesidad de que los estudiantes, de escuela secundaria y de formación docente, trabajen con procesos de modelización matemática en su formación. Así mismo, señalan la importancia de que los estudiantes formulen y validen conjeturas en interacción con pares. Lo mencionado pone de manifiesto la importancia de que futuros profesores vivencien este tipo de experiencias.

2. Marco de referencia

Como se menciona anteriormente, en este estudio se reflexiona acerca de la formulación y validación de conjeturas en interacción entre pares en el marco de un proceso de modelización matemática. Sadovsky (2005) distingue diferentes acciones que se realizan en el marco de un trabajo de modelización matemática: recortar la situación problemática, identificar variables oportunas para la situación problemática particular, establecer relaciones entre las variables que se ponen en juego, elegir una teoría que permita operar sobre ellas y producir conocimiento nuevo sobre la situación. La autora afirma que es necesario que los estudiantes tomen decisiones frente a los recursos utilizados y que se responsabilicen de sus resultados validándolos y confrontándolos con sus pares.

Un proceso de modelización matemática se pone en juego al establecer una relación entre una situación extra-matemática y una noción matemática determinada (Blomhøj, 2004). El autor señala

[1] En este trabajo se emplea el término estudiantes cuando se hace referencia a futuros profesores.

que es interesante el trabajo con situaciones en contextos reales que posibiliten libertad de elección por parte de los estudiantes y que movilicen conocimientos matemáticos disponibles.

Por su parte, Blomhøj y Jensen (2003) determinan sub-procesos del proceso de modelización matemática. El primero de ellos es la formulación de la situación, lo que implica diseñar una situación que guíe la identificación de las características de la realidad que será modelizada. El segundo es sistematizar, es decir, aquí se seleccionan los objetos relevantes, las relaciones que se tendrán en cuenta, entre otros, para lograr una representación matemática de la situación. El tercero es traducir los objetos y relaciones seleccionados al lenguaje matemático. El cuarto es el empleo de métodos matemáticos para alcanzar resultados de la situación en juego y establecer conclusiones. El quinto es la interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial, es decir, la situación particular que se está modelizando. El último es la evaluación de la validez del modelo, que se puede realizar de diversos modos, entre ellos, comparando con datos disponibles, con conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida. Cabe destacar que estos sub-procesos no siguen un desarrollo lineal, si no que se ejecutan en función de las decisiones de los sujetos que llevan adelante el proceso de modelización.

Las nociones de modelización matemática abordadas tienen puntos de encuentro. Los sub-procesos mencionados por Blomhøj y Jensen (2003) están en estrecha relación con los aspectos descriptos por Sadovsky (2005). No obstante esta última autora señala la posibilidad de trabajar con fenómenos tanto intra como extra-matemáticos, los autores referencian la modelización de fenómenos del mundo real y no dejan explicito si dentro del mismo consideran la modelización intra-matemática. A su vez, Sadovsky (2005) no concibe explícitamente como parte del proceso la formulación de la situación a diferencia de Blomhøj y Jensen (2003).

En lo que respecta a validación, Balacheff (2000) afirma que se emplea “la palabra razonamiento para designar la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información” (p.13). El autor afirma que cuando se emplea dicha actividad con el propósito de establecer la validez de una afirmación se utiliza la expresión “procesos de validación”. Un modo particular de validación empleado en matemática es la prueba, al respecto, el autor distingue dos tipos de pruebas, pragmáticas e intelectuales. En las pruebas pragmáticas los estudiantes recurren a una acción real o a la ostensión y en las pruebas intelectuales apoyan sus afirmaciones en propiedades y relaciones geométricas. Se destaca que los autores antes mencionados (Sadovsky, 2005; Blomhøj y Jensen, 2003) consideran la validación como una parte sustancial del proceso de modelización matemática.

Finalmente, en lo que atañe a las interacciones entre pares en la clase de matemática Quaranta y Wolman (2003) sostienen que los intercambios, las confrontaciones y las justificaciones entre alumnos pueden producir progresos y permiten construir el camino para validar el trabajo matemático que se hace. Las autoras manifiestan que el trabajo conjunto es positivo porque “facilita colaboraciones en el proceso de buscar juntos soluciones, mediante la coordinación de los procedimientos para alcanzar un objetivo determinado” (p. 195). También señalan que pueden encontrarse limitaciones, por ejemplo que alguno de ellos asuma la dirección de la solución y los otros acepten sin cuestionarlo, por considerar que ese alumno es “bueno” en matemática, o que algún participante se oponga sistemáticamente a las propuestas del resto sin emplear argumento de orden matemático. Cabe destacar además que, estas autoras sostienen que en la puesta en común se producen intercambios entre todos los estudiantes guiados por el docente.

3. Marco metodológico

La presente investigación es de naturaleza cualitativa (McMillan y Schumacher, 2005). Particularmente se apela a un estudio de casos ateniendo a las consideraciones metodológicas planteadas en Stake (1998). Según el autor en estos estudios no se pretende generalizar, sino que se busca estudiar el caso en profundidad, se destacan diferencias sutiles, secuencias de acontecimientos y la globalidad de situaciones.

Los sujetos de estudio son futuros profesores en matemática que cursan la asignatura Taller de Geometría de la carrera Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (FHUC) de la Universidad Nacional del Litoral. Esta materia corresponde al tercer año del plan de estudio de la carrera y los estudiantes aprobaron previamente, entre otras asignaturas, Geometría Euclídea Plana y Geometría Euclídea Espacial. Por lo mencionado se considera que los alumnos que participaron de la experiencia disponen conocimientos básicos de Geometría Euclídea, por tanto la muestra es no probabilística e intencional (Kazez, 2009).

Atendiendo a la necesidad de un trabajo de modelización matemática y a partir una conversación entre investigadores y el dueño de un campo de Vera y Pintado (localidad de la Provincia de Santa Fe) se diseñó una situación. El campesino planteó la necesidad de construir un tanque de agua para su ganado vacuno estableciendo ciertas condiciones imprescindibles para el mismo. En este contexto, se tomó la decisión de atender las condiciones propuestas y formular la situación considerando los interrogantes que propone el campesino, por lo que el sub-proceso de formulación (Blomhøj y Jensen, 2003) queda a cargo del grupo investigador.

La situación que se formuló se presenta a continuación: Ramón Atilio tiene un campo en el cual trabaja diariamente en el pueblo Vera y Pintado, a 180 km. de la ciudad de Santa Fe capital. En los últimos días decidió construir un nuevo tanque de agua para sus 106 vacas Holando argentino, cada una de ellas toma en promedio 50 litros de agua por día. Necesita de la ayuda de técnicos para tomar decisiones respecto al tamaño adecuado del mismo y a la cantidad de material necesario para su construcción. Ramón dispone para la construcción del tanque de un sector cuadrangular de 49 m^2. Las únicas condiciones que establece es que el tanque tenga una altura mínima de 1 metro y que su base sea un octógono regular. El reservorio debe disponer de agua para 7 días atendiendo a la situación de que el molino no gire por falta de viento. Ramón necesita un bosquejo dinámico de la situación y respuesta a las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las posibles dimensiones del tanque? ¿Qué cantidad de material necesita para su construcción?

Las restricciones solicitadas por Ramón Atilio, se deben a que en el interior de la Provincia de Santa Fe en Argentina se construyen tanques de tipo australiano, a pesar de que en otras regiones de este país se construyen otros tipos de tanques con características que los diferencian. Particularmente, existen dos tipos de tanques australianos, los que se utilizan como reserva de agua o como bebedero. Los primeros tienen en general 1 metro de altura o más y los segundos una altura de 60 cm aproximadamente. Las figuras 1 y 2 presentan imágenes que representan a ambos tipos.

La puesta en aula se realiza en una sala de informática de la FHUC durante una clase de 3hs reloj en la asignatura mencionada anteriormente, en la misma se encuentran presentes 10 futuros profesores en matemática. Cabe señalar que dos grupos, de dos estudiantes cada uno, abordan la situación presentada anteriormente, el resto de los participantes responden otra situación. Se propone una primera instancia de trabajo en la que se presenta la situación diseñada a los grupos de dos estudiantes, cada uno de ellos dispone de una computadora con acceso a internet. En la segunda instancia cada grupo expone a la comunidad clase el trabajo realizado. Durante la puesta en juego de la propuesta se registra la información a través de artefactos escritos y grabaciones en audio y video, dado que la diversidad de registros potencia la fiabilidad y validez del estudio (Mc Knight, Magid, Murphy y Mc Knigt, 2000). Cabe señalar que los participantes de la experiencia dieron su conformidad para que sus producciones se utilicen ámbitos investigativos.

Figura 1: Tanque australiano – Bebedero

Figura 2: Tanque australiano - Reservorio

4. Análisis de la experiencia

El análisis de datos se realiza en dos apartados. En el primero se estudian las interacciones de un grupo de estudiantes que trabajan con la situación propuesta y en el segundo se analizan las discusiones que se producen en instancias de debate colectivo. Cabe aclarar que se denota con P a la profesora que interviene en los diálogos y con B y F a las estudiantes del grupo que se analiza en profundidad en el presente trabajo con el fin de preservar el anonimato de los participantes.

4.1. Análisis de interacciones entre estudiantes del grupo B-F

Las alumnas leen la situación y analizan los datos presentados en la misma. Destacan la importancia del número total de vacas, la cantidad de litros que toman cada una, la altura mínima del reservorio, la cantidad de días que debe abastecer el tanque a las vacas del campo y las condiciones climáticas que influyen en el contexto presentado. Se encuentran sistematizando, recortando la situación problemática, identificando las variables, estableciendo relaciones entre las variables seleccionadas, puesto que discuten sobre la elección de objetos relevantes (Sadovsky, 2005; Blomhøj y Jensen, 2003). Realizan un análisis acerca de la distancia entre el campo y la ciudad de Santa Fe capital que no retoman posteriormente, se estima que no lo consideran relevante para dar respuesta a la situación. Se aprecia que la interacción entre las estudiantes permite avanzar en su resolución como se muestra en el diálogo[2] que se transcribe a continuación.

F: Eso de las vacas no sé si será importante, pero bueno.[3] *[Refiere al número de vacas]*[4]
B: La distancia tampoco.
F: Las vacas calculo que sí.
B: Sí, porque toman la cantidad de litros también, 106 vacas, que tenga una altura mínima.
F: Sí y la altura del bebedero.
B: Pero mínima, o sea puede ser más grande. [Refiere a la altura del reservorio]
F: Sí, sí.
B: Pero el volumen de eso tiene que solventar 7 días de agua.
F: Sí, capaz en 7 días consumen todo el volumen. Vos tenés que pensar que tenés que tener un poco más, por si no hay viento y no gira el molino, entonces no genera agua.
B: Claro, o sea como, si o si tiene que tener capacidad para 7, más no.

[2] Los diálogos se expresan en la variedad dialectal del español rioplatense.
[3] Se presentan en itálica las transcripciones textuales de audio.
[4] Las aclaraciones del investigador se presentan entre corchetes.

Continúan analizando la relevancia de datos, ponen especial atención en el sector disponible en el campo para la construcción (cuadrangular y de 49 metros cuadrados de área) y en la forma de la base del tanque (octógono). La alumna B pone de manifiesto una duda, si los 50 litros son por cada vaca o por todas, su compañera responde que los 50 litros diarios son para abastecer las 106 vacas. Esto hace que la estudiante B abandone la discusión aceptando lo que propone F. Se observa que la interacción constituye una limitación, puesto que B duda en primera instancia, pero luego acata sin cuestionar lo que propone F (Quaranta y Wolman, 2003).

Por otra parte presentan concepciones diferentes respecto a las nociones de volumen y de capacidad. En este caso B no acepta "confiadamente" lo que plantea su par poniendo de manifiesto su incertidumbre.

B: ¿50 litros de agua cada uno o todas?
F: No, todas, si vos tenés en un día 50 litros, en 7 días, 350 litros necesitas.
B: O sea ¿ese va a ser el volumen?
F: El volumen.
B: ¿El volumen?
F: Sí.
B: ¿Litros?

Una de las estudiantes considera que el material necesario para realizar la construcción es sólo para las caras laterales del prisma, sin embargo, al debatir esta afirmación concluyen que se necesita también material para la base. En este sentido se considera que la interacción en este momento particular es un factor de progreso en la resolución de la situación. Tal como plantean Quaranta y Wolman (2003), el trabajo conjunto entre alumnos es positivo porque "facilita colaboraciones en el proceso de buscar juntos soluciones, mediante la coordinación de los procedimientos para alcanzar un objetivo determinado" (p.195). Posteriormente una de las estudiantes expresa que se necesita un bosquejo dinámico de la situación.

F: El material, la tierra ¿tiene esa área verdad? No sé de qué material me habla, no te tira ningún dato.
B: Bueno pero por los metros cuadrado.
F: Claro, la tierra es lo que necesitas.
B: No, los metros cuadrados, ¿qué cantidad de material necesita? El casquete, este es el tanque. [Refiere al área lateral del prisma]
F: Ah, el área.
B: El área, pero el área lateral sería, no de las bases.
F: Y el piso.
B: Bueno el piso sí, porque no es de tierra. Entonces Ramón necesita un bosquejo dinámico de la situación, podríamos poner acá.

Las estudiantes retoman la discusión acerca de la forma del tanque, una de ellas sostiene que es un cilindro porque todos los tanques que conoce tienen esa forma. Su compañera afirma que es un prisma. En este sentido se aprecia que de los sub-procesos de modelización planteados en Blomhøj y Jensen (2003) se encuentran traduciendo al lenguaje matemático las posibles formas del tanque y a su vez validándolas, en términos de Sadovsky (2005) eligen una teoría que permita abordar la situación y validan su producción. La estudiante F aborda las cuestiones mencionadas a partir de su experiencia personal y su conocimiento acerca de tanques y la alumna B basándose en los datos presentados en la situación.

F: Es un cilindro con base, ¿un octógono? Un pedazo de un cilindro.
B: Eso es un prisma de base octogonal.

F: Sí, tenés razón. Claro, como los bebederos siempre son cilíndricos es como que se me vino eso a la cabeza.

La alumna B explica a su compañera una posible forma de determinar las dimensiones del tanque, emplea métodos matemáticos para arribar a resultados (Blomhøj y Jensen, 2003). Hace referencia, entre otros, a la fórmula del volumen a utilizar y la búsqueda de datos necesarios para emplear dicha fórmula. Posteriormente, B expresa que se debe realizar el octógono de mayor área que quepa en el sector cuadrangular, en este momento B lleva adelante la discusión y F se limita a acatar.

Las estudiantes emplean hasta este momento lo que Balacheff (2000) denomina prueba pragmática para validar sus conjeturas, dado que toman decisiones a partir de cuestiones ostensivas y atendiendo al contexto real que se encuentran modelizando.

B: Podríamos ir calculando, por ejemplo, si tenemos 1 metro [Hace referencia a fijar la altura del tanque en 1 metro].
F: Sí.
B: No, el problema es que nosotras sabemos el volumen, hay que buscar el volumen de un prisma regular de base octogonal y de ahí sacar los otros datos.
F: Claro, porque vos ya sabés cuál es el volumen que necesitas.
B: Claro, lo único que conocemos es el volumen, y cuánto tenemos de área, o sea dibujar un octógono. Tenemos que buscar el octógono de mayor área que se pueda aplicar en el sector rectangular [Es de destacar que B hace referencia a sector rectangular y no cuadrangular, no queda claro si considera al cuadrado como rectángulo o si confunde dichos conceptos], de base octogonal regular, área octógono es igual a un lado y la apotema me parece.
F: Cuatro por el lado por la apotema y la apotema hay que calcularla.
B: Es que con la apotema, conociendo un lado, después la apotema pasa por el punto medio del lado. Hacés Pitágoras y la hallás, pero hay que saber el lado.

Indagan información en internet, por ejemplo diversas fórmulas para calcular volúmenes y áreas. Por otra parte, la interacción permite que avancen en la situación, en particular consideran que la altura es variable y deciden tomar la mínima para comenzar la resolución. Al respecto Quaranta y Wolman (2003) sostienen que los momentos de discusión potencian la puesta en juego de reflexiones y validaciones.

F: Vamos a buscar la fórmula.
B: Acá, conociendo el volumen del prisma octogonal, fórmula: área de la base por, no, área de la base por la altura. La altura ya la conocemos, 1.
F: Es 1 o más.
B: Claro, yo probaría con 1.
F: Igual, ¿necesariamente tenés que maximizar esto? Con que cumpla el requisito ya está.
B: Obvio, yo probaría con 1.
F: Sí.

Las alumnas discuten acerca de las nociones de capacidad y volumen y consideran que existe una relación entre ambas que no recuerdan y por tanto la buscan en Internet. Traducen a lenguaje matemático sus consideraciones con el fin de emplear posteriormente métodos matemáticos que potencien el avance de su producción (Blomhøj y Jensen, 2003)

En general es de destacar que B y F comienzan el proceso de resolución rápidamente, leen la situación y automáticamente determinan un modo de proceder. No retoman el enunciado, esto hubiera permitido determinar que no es posible que las 106 vacas necesiten sólo 50 litros de agua en un día, la comparación con lo que necesita un ser humano (en promedio 2 litros por día) hubiera sido suficiente para analizar esta situación, pues es impensado que una vaca, más aún lechera, tome menos agua que una persona, en este sentido se destaca que hay una ausencia de validación respecto a la experiencia personal (Blomhøj y Jensen, 2003; Balacheff, 2000). Se aprecia que las estudiantes comienzan a resolver la situación y continúan dicha resolución sin volver al enunciado del mismo, al respecto Schoenfeld (2001) sostiene que la diferencia entre un matemático y un novato es que este último no vuelve constantemente a lo que solicita la situación como sí lo hace el matemático. Frente a esta problemática la docente interviene con una pregunta con el fin de que se ponga de manifiesto esta consideración.

B: Las unidades del volumen.
F: Altura es metro, el área es cuatro por, esto es metro por metro, es metro cuadrado. La altura está en metros.
B: No, pero el volumen está en litros. ¿No influye eso?, ¿un metro cúbico cuanto tiene de litro?
F: Ah bueno hay que buscar la equivalencia, tenés razón. Me parece que un metro cúbico es mil litros.
B: Miremos en internet.
F: Mil litros.
B: Pará, pasemos el volumen en metros cúbicos.
[…]
P: Lo que quiero saber es por qué está presente el dato 50 litros.
B: ¿Cada vaca toma 50 litros? Nosotros pensábamos que todas.
P: No, cada una.
B: ¿Cada vaca toma eso?
F: Y bueno pero como decía en promedio.
P: Claro en promedio cada vaca toma 50 litros.
B: Entonces hay que hacer 50 por 106.

Las estudiantes rehacen los cálculos luego de esta afirmación. Discuten si consideran la base de mayor área que quepa en el cuadrado o no, B considera que "al ser tantas vacas" es mejor trabajar con el área máxima porque pueden tomar agua más vacas al mismo tiempo, a su vez analizan que una base de área pequeña exige una altura mayor, en este sentido se aprecia que hay una validación respecto a la experiencia o una prueba pragmática (Blomhøj y Jensen, 2003; Balacheff, 2000). Es evidente que B considera que el tanque a construir es para ser usado como bebedero aunque según las especificaciones que figuran en la situación presentada el pedido realizado por Ramón Atilio está pensado para reservorio, dado que se pide que tenga al menos 1 metro de alto y que el reservorio debe disponer de agua para 7 días.

B: Sabes lo que tenemos que hacer acá en el cuadrado este, para inscribir el octógono de mayor área.
F: ¿Necesariamente el de mayor área?
B: Y no, pero el de mayor área es mejor porque si tiene 106 vacas, si fuera el de menor área, yo hago uno chiquitito, y lo hago re alto, las vacas no van a llegar a tomar, y encima son 106 como que se van a pelear, en cambio si vos haces el de mayor área va a ser más playito, porque viste que las vacas tienen…
F: Sí, sí.
B: Viste que los tanques son bajitos y bastantes grandes.
F: Sí, sí.
B: Entonces el de mayor área para mí, o sea que tomen todas las vacas.

B y F para encontrar el octógono de mayor área utilizan una fórmula construida anteriormente en esta asignatura, si no la dispondrían, la obtención de esta fórmula podría haber llevado a la producción de un nuevo conocimiento matemático por parte de las estudiantes en el marco del presente proceso de modelización (Sadovsky, 20005). Continúan usando métodos matemáticos, dado que recurren a lo realizado en otra clase para encontrar la expresión que determina la longitud del lado del octógono inscripto en el terreno disponible (Blomhøj y Jensen, 2003). Ponen en juego conceptos matemáticos como el teorema de Pitágoras, el concepto de apotema, fórmulas de áreas, entre otros. En este sentido, se aprecia que las estudiantes emplean propiedades geométricas para fundamentar sus afirmaciones y avanzar en la resolución de la situación, es decir apelan a pruebas intelectuales (Balacheff, 2000).

F: ¿Cómo maximiza?
B: ¿No lo hicimos anteriormente en el Taller a esto?
F: Estoy pensando en algo de eso. Pero no sé si igual con maximizar podría cortar el cuadrado para obtener un octógono. Pero no era de maximizar, era de cortar un cuadrado mediante un octógono [Refieren a la situación realizada anteriormente].
B: Y bueno.
[…]
F: Es $\frac{l}{(2+\sqrt{2})}$ *[Hacen referencia a la medida del lado del octógono, donde l representa la longitud del lado del cuadrado].*
B: El área de la base sería: $(\sqrt{2}\ x[(2+\sqrt{2})\times 37{,}1)\div 28$
F: O sea el área del octógono ya está. El volumen está y el área lateral también. Está todo ya, tenemos que ver si funciona.

Diferente a lo explicitado anteriormente, en este caso, las alumnas se comportan en forma similar a la de un matemático, dado que realizan exploraciones a partir de un análisis cuidadoso de la situación y retoman frecuentemente el enunciado de la situación (Schoenfeld, 2001). Se visualiza que manifiestan la necesidad de interpretar y validar la producción realizada en relación con el contexto determinado, cuestión necesaria en el trabajo con situaciones del mundo real (Blomhøj y Jensen, 2003).

En particular, en instancias de validación determinan que uno de los datos obtenidos es inconsistente con la situación que ellas se encuentran modelizando. Emplean métodos matemáticos para realizar la afirmación mencionada, dado que consideran la definición de apotema, esto les permite descartar su conjetura inicial, nuevamente se aprecia el empleo de pruebas intelectuales (Balacheff, 2000).

F: Ahí está bueno, nosotros llegamos a esa hay que probar si funciona.
B: ¿Cuáles son las dimensiones posibles del tanque? Nosotros lo que necesitamos saber es el volumen, las dimensiones del tanque.
F: Altura, ¿cuál es el ancho y el largo?
B: Siete y siete.
F: No, porque esta parte de tierra no la vas a usar en los costados.
B: No, no por eso esta distancia es siete y esta es la apotema, a ver cuánto nos da la apotema, porque por dos nos tendría que dar siete. Si no da 7 no funciona. O sea, la apotema es desde el punto medio de uno de los lados al centro. Pero a lo que voy es que la apotema nos da 6,39 y el doble de la apotema nos tiene que dar 7.

Las estudiantes toman posición respecto a la respuesta obtenida y validan considerando los conceptos empleados, en esta validación solicitan la intervención docente. Realizan un bosquejo en lápiz y papel y avanzan en la búsqueda de argumentos que validen sus afirmaciones (Balacheff, 2000). Para determinar la existencia de distintas soluciones relacionan la altura del tanque con el lado del octógono base, lo que les permite articular ciertas propiedades que exceden la experiencia de dibujar.

B: Profe, no nos da la apotema, al hacer el doble de la apotema, ¿nos tendría que dar esto no?

P: No sé qué están haciendo.
B: Un cuadrado y buscamos el octógono de mayor área.
P: ¿Por qué el de mayor área?
F: Para no tener tanta altura ahí.
B: Para que las vacas puedan estar alrededor para tomar agua.
F: El lado del octógono es este: $\frac{l}{(2+\sqrt{2})}$
B: Cuando calculamos la apotema y la multiplicamos por dos, porque la apotema es desde el punto medio de uno de los lados al centro, no nos da 7.

Interpretan resultados, consideran el dominio inicial de investigación y a su vez evalúan los resultados obtenidos hasta el momento empleando conocimientos teóricos (propiedades geométricas) y la experiencia personal. Tienen en cuenta que lo más provechoso es que el número de vacas que puedan tomar agua simultáneamente sea el mayor posible y que la altura les permita a las mismas tomar agua directamente del tanque.

F: Si no consideras el de área máxima vas a tener que aumentar la altura y la vaca no va a poder tomar el agua.
B: Además también para que tengan mayor cantidad de vacas alrededor del octógono.

Al escuchar la discusión de las estudiantes la docente interviene a fin de potenciar la búsqueda de razones por las que se produce este error al obtener el valor de la apotema. Ellas afirman haber buscado la fórmula en internet sin realizar un análisis de los datos ofrecidos por una página que puede no tener sustento académico. La docente no explicita la razón del error con el fin de que ellas lo determinen. Es de destacar que el mismo se produce por un error en la fórmula obtenida de internet, las alumnas disponen de la fórmula en el material de cátedra al que pueden recurrir, pero no lo emplean.

P: ¿De dónde sacaron esa fórmula?
B: De internet. ¿Qué?, ¿está mal?, 6.39 y revisamos los cálculos.
P: Si vos me decís 6.93, bueno yo te diría, pero fuiste trabajando con raíces.
B: Sí, pero o sea no pasamos a decimales nada y quedó así, no sé.
F: O sea en el GeoGebra yo lo probé y todo y nos dió. [Hacen referencia que en la construcción realizada en GeoGebra les da un valor adecuado al contexto, distinto al obtenido analíticamente].
P: Puede haber algún error ahí de cálculo.
B: Bueno, seguimos así.

En este caso las estudiantes emplean el software de geometría dinámica *GeoGebra* para establecer una conjetura y de este modo determinar que el resultado obtenido en el procedimiento realizado analíticamente es correcto. Continúan realizando cálculos matemáticos, sin revisar lo anterior para calcular las dimensiones del tanque. Nuevamente emplean una teoría matemática para operar sobre las variables, es decir traducen objetos y relaciones al lenguaje matemático al observar y relacionar las dimensiones del tanque, entre ellas base y altura (Sadovsky, 2005; Blomhøj y Jensen, 2003).

B: Bueno, igual, cuales son las posibles dimensiones del tanque. 7×7 *es* 49 *¿Cuáles son las posibles dimensiones del tanque?*
F: Siete, siete, uno.
B: No, las dimensiones del tanque son: la base octogonal, del lado que calculamos y altura 1.
F: Y, pero tenés que dar el ancho, el largo y el alto.

No logran convencerse de las dimensiones obtenidas. Para ello recurren nuevamente a la docente y concluyen que como la base tiene forma de octógono regular, basta tener la altura y el lado del octógono para determinar el volumen del tanque, es decir con esas dos longitudes el campesino puede construir el tanque de agua para su ganado vacuno. Atendiendo a lo mencionado calculan las longitudes para aplicar la fórmula del volumen del prisma y resolver una de las consignas de la situación. Las estudiantes dudan respecto a la cantidad de material a emplear en la construcción e interactúan con la docente.

B: ¡Profe!
P: ¿Qué pasó?
F: Acá lo del material no es el material, si no, los metros cuadrados que va a tener que hacer, digamos.
P: ¿Qué sería el material?
B: Para tantos metros cuadrados, necesita X material.
P: Claro.
B: Bueno entonces ponemos es la cantidad de material.
P: O sea, se refiere al área.
F: Claro, si por eso.

En esta instancia retoman el enunciado de la situación y consideran que deben bosquejarla, realizan una exploración a través de un análisis cuidadoso de la situación y retoman frecuentemente el enunciado de la situación, es decir en términos de Schoenfeld (2001) las estudiantes se comportan como un matemático.

Observan que deben hacer un bosquejo dinámico de la situación y consideran que no es una tarea fácil, y por esto deciden realizarlo de manera aproximada. Destacamos que las alumnas en ningún momento consideran representar el tanque empleando *GeoGebra*, a pesar de que es de uso habitual en distintas cátedras, en particular las de geometría y de haberlo empleado anteriormente para verificar el valor de la apotema.

F: Falta el bosquejo, la base ya la tenemos.
[…]
F: Hacé el prisma y pone las medidas del bebedero,
B: No entiendo cómo hacer el bosquejo del tanque.
F: Bueno hacé la base del prisma, que ya la tenés de antes y ahora la parte lateral del prisma, ¿entendés?
B: Sí.
F: Cuando hagamos el dibujo en perspectiva no vas a poder hacerla con todos los detalles y todas las medidas.
B: Bueno, más o menos le hago, es un bosquejo.

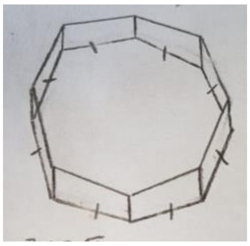

Figura 3. Bosquejo del tanque realizada por las estudiantes.

Las estudiantes relacionan la situación con experiencias personales ocurridas en otras situaciones de su vida. Posteriormente, evalúan la validez del modelo a partir de la comparación con los datos disponibles, con el conocimiento teórico y con la experiencia personal (Blomhøj y Jensen, 2003). Relacionan la altura determinada del tanque con la de una de ellas y con la altura promedio de una vaca Holando argentino, para poder concluir que las medidas dispuestas posiblemente son correctas y tienen sentido para la situación. B nuevamente deja evidencia de considerar al tanque como bebedero.

B: Ahora le ponemos las medidas.
F: ¿Está bien la altura?, ¿no le podíamos poner 2?
B: Y uno ya es mucho.
F: No, yo mido 1,6 metros, el tanque que está en mi casa es así.

B: Pero las vacas no llegan.
F: El ternero no llega, la vaca sí.

Las alumnas a partir de la producción realizada hasta el momento dan por finalizado el debate. Posteriormente se inicia la puesta en común en la que interaccionan todos los estudiantes presentes en la clase guiados por la docente.

4.2. Análisis de debate colectivo

En este apartado se utilizan las mismas referencias que en el anterior, es decir, P, B y F. En caso de apelar a un extracto que involucre voces de otros estudiantes que se encuentran en esta instancia se emplearán otras letras. Cabe destacar que en el debate colectivo participan los dos grupos de dos estudiantes que respondieron la situación que en este texto se presenta, dos grupos de tres estudiantes que responden otra consigna y la profesora de la asignatura.

Las estudiantes B y F explicitan los procedimientos sin aportar mayor información que la presentada en el análisis anterior. Frente a esto la profesora las interpela con preguntas referidas a relaciones e interpretaciones que pudieron apreciarse en el debate al interior del grupo, es decir modera sus interacciones. Al respecto Quaranta y Wolman (2003) afirman que en los momentos de discusión se generan confrontaciones, reflexiones y argumentaciones, no se trata sólo de dar a conocer los resultados obtenidos, sino argumentar y buscar razones para defender respuestas.

En esta instancia la docente plantea el siguiente interrogante con el propósito de generar una discusión respecto a la posible altura del tanque: *Si hubiese querido que la base sea muy pequeña, ¿hubiera podido hacerlo? Es decir menor el área y por ende mayor altura, por ejemplo si quiere un tanque de 3 metros de alto.* Las estudiantes manifiestan que tres metros no es posible debido a la altura de las vacas Holando argentino, pues en este caso no podrían acceder a tomar agua. Los dos grupos que responden esta situación sostienen que la altura de las vacas rondan los 1,3 metros según información recabada de internet. El grupo que responde a la situación que se presenta en este trabajo y no se analiza en el apartado 4.1. manifiesta que la altura de la vaca deber ser mayor a la del tanque, para que las vacas puedan inclinar la cabeza para beber, por tanto deberían considerar una altura menor a 1,3 m., decisión que las lleva a elegir 1,29 metros (C es una de las estudiantes que participa en este grupo), B explicita que la altura debería ser menor que 1,29 m. Se pone de manifiesto que en ningún momento las estudiantes se plantearon que el tanque podría tener el carácter de reservorio y consideran que las vacas deben tomar el agua directamente del tanque, es decir lo toman como bebedero.

B: Es que con 3 metros de altura no podes porque las vacas no van a poder tomar.
C: Buscamos en internet que la altura de las vacas era 1,30 metros y las vacas son Holando argentino.
B: Claro pero ahí también hay que ver si el tanque está lleno, si está medio vacío las vacas no van a poder llegar a tomar.
C: Es que nosotros siempre estamos trabajando con el máximo volumen, entonces habíamos elegido el 1,29 m.

Posteriormente debaten acerca del modo de determinar las dimensiones del tanque ateniendo a la decisión tomada por B y F, es decir construir un tanque de 1 metro de altura. Para encontrar el área de la base del prisma, es decir la del octógono regular, manifiestan necesitar la longitud del lado del mismo. Al respecto, B y F afirman que en clases anteriores de esta asignatura abordan una situación en la que encuentran la fórmula que necesitan para obtener el lado de un octógono regular inscripto en un cuadrado. La validación propuesta por las alumnas obedece a trabajos previos realizados en la cátedra aceptados por la docente, por lo que lleva la "huella de su autoridad" (Balacheff, 2000, p.47); es decir, influenciadas por el trabajo previo descartan cualquier otro procedimiento de construcción del octógono inscripto en el cuadrado.

Otra cuestión que plantea la docente es acerca de la posibilidad de utilizar el software de geometría dinámica (SGD) *GeoGebra* para realizar la construcción, dado que lo emplean habitualmente en clase. En particular, se referencia la expresión "Ramón necesita un bosquejo dinámico de la situación", una de las estudiantes contesta que supuso que debía presentar el dibujo en lápiz y papel, pero que también hubiera sido posible realizar la construcción del tanque en el SGD empleando un deslizador para observar como varía la altura del tanque. El uso del SGD les hubiera permitido realizar una construcción, tal como lo señalan utilizando un deslizador y apelando a definiciones y propiedades geométricas. Es decir, las alumnas pueden producir una construcción robusta (Healy, 2000) y de esta manera obtener pluralidad de soluciones correctas que le permitan a Ramón elegir la más conveniente, puesto que al "arrastrar o mover" un punto se modifica la construcción total obteniendo diversas representaciones semejantes. Interesa resaltar que B y F deciden fijar la altura y resolver la situación en torno a esta decisión, a pesar de considerar que este valor puede no ser factible.

B: O sea la altura mínima del tanque podía ser 1 metro, dijimos bueno vamos a probar con 1 metro y si no nos da, bueno probamos con otra altura.

Finalmente, otra cuestión que la docente propone abordar en la puesta en común es una reflexión acerca de las nociones de volumen y capacidad, dado que es un conocimiento que se discute en instancias de resolución de la situación por parte de B y F y les genera desconcierto. Es decir, emerge un problema matemático en el grupo analizado anteriormente en torno a las posibles relaciones que se presentan entre dichas nociones, tal como señala Sadovsky (2005) es una característica del proceso de modelización matemática la emergencia de problemas o cuestiones matemáticas que no se prevén antes del inicio de dicho proceso. El trabajarlo con todos los estudiantes permite que se explicite, se analice y reflexione esta cuestión matemática por parte de toda la comunidad clase.

F: Lo que buscamos es la conversión de metros cúbicos a litros porque no sabíamos bien la diferencia. También buscamos en internet la fórmula de volumen, prisma, área porque no nos acordábamos nada y bueno es ahí donde nos surgió lo de la conversión, porque con lo que hicimos queríamos sabemos el volumen del tanque.

5. Reflexiones finales

Se aprecia en el debate colectivo que el empleo de la modelización matemática resulta en esta experiencia útil para potenciar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática tal como lo plantea Blomhøj (2004). En particular, el trabajo con una situación real permite a los estudiantes movilizar conocimientos previos, tomar decisiones y por lo tanto asumir una postura crítica frente a la situación que están modelizando y construir conocimientos.

Respecto al trabajo del grupo formado por B y F se observa que transitan por todos los sub-procesos del proceso de modelización matemática de Blomhøj y Jensen (2003), a excepción del primero, formular la situación, que fue realizado por los investigadores. En reiteradas ocasiones a medida que avanzan en la resolución, retoman y vuelven a sub-procesos anteriores lo cual se relaciona con la no linealidad propia de este tipo particular de trabajo matemático. Se destaca que la situación les permite reflexionar sobre situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo la cantidad de agua que consume diariamente una vaca comparado con la que consume una persona en promedio y les posibilita analizar que existen otros tipos de bebederos que desconocen, no obstante es de destacar que el grupo clase en general, no considera que Ramón Atilio solicita la construcción de un reservorio. En este sentido, se evidencia una dualidad entre conocimientos cotidianos de los alumnos y conocimientos propios de la matemática formal.

Cabe destacar que la discusión en torno a las nociones de capacidad y volumen son conocimientos emergentes en el marco del proceso de modelización matemática inesperados por el docente, coincidente con lo planteado en Sadovsky (2005) respecto a la producción de conocimiento que en este caso particular se consideraron y abordaron con la comunidad clase.

En la resolución de la situación las estudiantes generan discusiones, formulan ideas, conjeturan y validan. En ocasiones las interacciones potencian el debate y en otras lo debilitan (Quaranta y Wolman, 2003). Se aprecia que las mismas se involucran en la resolución, interactúan, debaten, indagan información en internet, sin usar libros de textos y apuntes disponibles.

Respecto a validación, en momentos, las estudiantes emplean pruebas pragmáticas en el sentido de Balacheff (2000), este modo de proceder particular es el esperado en el marco de trabajo en torno a situaciones de la realidad y se encuentra ligado al modo de validación mencionado en el sub-proceso de validación propuesto por Blomhøj y Jensen (2003). Así mismo, cabe destacar que en diversas instancias las estudiantes acuden a propiedades geométricas para fundamentar sus afirmaciones, empleando así, lo que Balacheff (2000) denomina pruebas intelectuales.

En cuanto al uso del SGD, las alumnas consideran que una “construcción dinámica” hace referencia a un bosquejo en lápiz y papel, no tienen presente que se refiere a la utilización del SGD. Sin embargo, si bien no utilizan el software, no descartan en instancias de debate colectivo el potencial de este recurso, como se aprecia en el análisis. Es importante que sean las estudiantes quienes decidan qué tecnología utilizar, digital o tradicional. Sin embargo, en este caso, evaluar el potencial del empleo del SGD redunda en beneficios para presentar diversos modelos con una única construcción y esto hubiera permitido a Ramón Atilio elegir el que considera más conveniente.

6. Bibliografía

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling- A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby y K.Walby (Edits.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. *National Center for Mathematics Education*, 45-159. National Center for Mathematics Education de la Univesidad de Gothenburg: Suecia.

Blomhøj, M. y Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications 22 (3)*, 123-139.

Cammisi, M.E., Kiener, F. y Scaglia, S. (2016). El rol de las interacciones y del contexto en la construcción del sentido. En G. Astudillo, P. Willging, P. y P. Dieser (Eds.). *Memorias REPEM*, (pp. 244-253). Universidad Nacional de La Pampa: Santa Rosa.

Carnelli, G., Falsetti, M., Formica, A. y Rodríguez, M. (2008). Un estudio del aprendizaje de validación matemática a nivel pre-universitario en relación con distintas interacciones en el aula. *SUMA*, *58*, 25-40.

Cruz, M. F. y Mantica, A.M. (2017) El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas. *UNIÓN*, *51*, 69-82.

Cruz, M.F., Mantica, A.M. y Götte, M. (2017). Interacciones entre futuros profesores en matemática al poner en juego procesos de validación en la resolución de tareas en geometría. En V., N. Diaz y M.A. Perticará (Comp.). *VIII Encuentro Nacional y V Latinoamericano La Universidad como objeto de investigación: publicación de trabajos*, 1455-1468. Universidad Nacional del Litoral: Santa Fe.

Duarte, B. (2010). Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en matemática. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de SanAndrés. Buenos Aires, Argentina.

Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L.M. (2015). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *Números, 88,* 93-103.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA, 9 (2),* 53-83.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions T. Nakahara and M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (1)*, 103-117. Hiroshima University: Hiroshima.

Kazez, R. (2009). Los estudios de casos y el problema de la selección de la muestra: aportes del sistema de matrices de datos. *Subjetividad y procesos cognitivos, 13(1),* 71-89.

Mc Knight, C., Magid, T. Murphy & M. Mc Knigt. (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician.* Rhode Island: American Mathematical Society.

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2005) *Investigación Educativa*. 5th Edición. Madrid: Pearson Addison Wesley.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (2011). NAP. Tercer ciclo. Disponible en: https://www.educ.ar/recursos/110570/nap-secundaria-matematica

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe. (2014). Diseño Curricular. Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe.

Ojeda, V.D., Saldivia, F. y Maglione, D. (2017). Procesos de validación mediados por el software GeoGebra. Los criterios de congruencia para explorar, construir, argumentar y demostrar. *Universidad Nacional de la Patagonia Austral, 9 (2),* 96-114.

Propuesta de estándares para la acreditación de las carreras de profesorado universitario en matemática. (2012). Disponible en: http://www.cin.edu.ar/comisiones/asuntos-academicos-material-en- tratamiento/subcomision-de-profesorados/

Quaranta, M. y Wolman, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática: qué, para qué y cómo se discute. En M, Panizza, (comp), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas.* 189-243. Paidós: Buenos Aires.

Sadovsky, P. (2005) *Enseñar Matemática Hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Zorzal.

Schoenfeld, A. (2001). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En L. Resnick y L. Klopfer (Comp). *Currículo y cognición,* 141-170. Buenos Aires: Aique.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Trelles, C. y Alsina, A. (2017). Nuevos conocimientos para una educación matemática del S.XX1: panorama internacional de la modelización en el currículo. *UNIÓN 51,* 140-163.

Villarreal, M; Esteley, C y Mina, M (2010). Modeling empowered by information and communication technologies. *ZDM. Mathematics Education, 42(3)*, 405-419.

Villarreal, M; Esteley, C y Smith, S (2015). Pre-service Mathematics Teachers' Experiences in Modelling Projects from a Socio-critical Modelling Perspective. En G. Stillman, W. Blum, y M. Biembengut. (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 567-578). Springer: Berlín.

María Florencia Cruz. Profesora en matemática en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (UNL). Especialista docente de nivel superior en enseñanza de la matemática en la educación secundaria. Becaria doctoral por la UNL. Ha participado como expositora en congresos y jornadas nacionales e internacionales sobre enseñanza de la matemática. Ha realizado publicaciones sobre la temática en revistas especializadas nacionales e internacionales.
Email: ma.florenciacruz@gmail.com

Ana María Mántica. Profesora en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Argentina. Magister en Didácticas Específicas, mención en matemática. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo que ha realizado publicaciones sobre la temática en distintas revistas especializadas nacionales e internacionales y ha participado como expositora en congresos y jornadas nacionales e internacionales sobre enseñanza de la matemática.
Email: ana.mantica@gmail.com

Matías Agustín Gallo. Profesor en matemática egresado de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (UNL). Actualmente desempeña en diversas escuelas de la provincia de Santa Fe en Argentina. Ha participado como expositor en congresos y jornadas nacionales sobre enseñanza de la matemática.
Email: mativyp@gmail.com