

***Investigación sobre Errores
de Aprendizaje en Educación
Matemática***

Luis Rico Romero

Departamento de Didáctica de la Matemática.
Universidad de Granada.

1992

Propios 167

Indice

1. Fundamentos Epistemológicos.

- 1.1. Popper.
- 1.2. Bachelard.
- 1.3. Constructivismo.
- 1.4. Lakatos.
- 1.5. Conclusiones.

2. Antecedentes en el estudio de errores en el aprendizaje de las matemáticas.

- 2.1. El error en el aprendizaje de las matemáticas.
- 2.2. Estudios en Alemania.
- 2.3. Estudios en la Unión Soviética.
- 2.4. Estudios en los Estados Unidos.
- 2.5. Estudios en España.
- 2.6. Características de los estudios revisados.
- 2.7. Nuevas direcciones en los estudios sobre errores.
- 2.8. Líneas de investigación recientes.

3. La Investigación sobre Errores.

- 3.1.** Planteamiento y cuestiones generales.
- 3.2.** Principales líneas de investigación.
- 3.3.** Análisis, causas y clasificación de errores.
- 3.4.** Tratamiento curricular de los errores.
- 3.5.** Los errores y la Formación del Profesorado.
- 3.6.** Técnicas de Análisis.

4. Aportaciones a la Investigación sobre Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas.

- 4.1.** Presentación.
- 4.2.** Delimitación de soluciones incorrectas.
- 4.3.** Clasificar diferentes tipos de error.
- 4.4.** Análisis de patrones de error.
- 4.5.** Diseño de experimentos predictivos de errores, pruebas de diagnóstico y propuestas para superación.
- 4.6.** Conclusión.

1. Fundamentos Epistemológicos

La fiabilidad del conocimiento humano, es decir, la capacidad de considerar como verdaderos conceptos y procedimientos que están deficientemente desarrollados, que incluyen ideas contradictorias o interpretaciones y justificaciones falsas, ha sido una preocupación constante en filósofos y pensadores que se han ocupado de estudiar la capacidad del hombre por conocer y comprender. El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos. Esta posibilidad no es una mera hipótesis, basta con observar lo que ha ocurrido a lo largo de la historia de diversas disciplinas en las que se han aceptado como conocimiento válido multitud de conceptos que, hoy día, sabemos que son erróneos.

La preocupación por el conocimiento erróneo, por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que puede desempeñar en el dominio y avance de la ciencia, ha ocupado parte importante de las reflexiones de filósofos de la ciencia y epistemólogos, entre los que queremos destacar a Popper; Bachelard; Russell y Lakatos. En lo que sigue vamos a seleccionar algunas ideas de los autores mencionados, que sirven de fundamentación a este trabajo.

1.1. Popper

En "*Conjeturas y refutaciones*", Popper pone a examen la siguiente cuestión: ¿cuál es la fuente última del conocimiento?; a partir de ella deriva el papel destacable que tienen los errores en la adquisición del conocimiento científico.

Para ello desarrolla la siguiente línea argumental:

- 1) Considera que hay, básicamente, dos respuestas clásicas a la cuestión anteriormente planteada, la proporcionada por el empirismo, que señala la observación como fundamento último del conocimiento; la proporcionada por el racionalismo o intelectualismo clásico, que considera como fundamento la intuición intelectual de ideas claras y distintas.

Destaca en estas dos posiciones el optimismo epistemológico sobre las posibilidades humanas de conocimiento: todo hombre lleva en sí mismo las fuentes del conocimiento, bien en su facultad de percepción sensorial o en su facultad de intuición intelectual. El hombre es capaz de conocer; por lo tanto, puede ser libre.

Contrapone estas posiciones con la creencia según la cual, en ausencia de una verdad objetiva y discernible, hay que optar entre aceptar la autoridad de la tradición o el caos, posición a la que llama tradicionalista. El racionalismo epistemológico ha defendido el derecho de la razón y de la ciencia a criticar y rechazar toda autoridad cuando se encuentra basada en la sin razón, el prejuicio o el accidente. El rechazo del autoritarismo lleva a someter las propias teorías y conocimientos a un examen crítico minucioso.

- 2) Las posiciones clásicas se sustentan en lo que Popper denomina "*teoría de la verdad manifiesta*". La verdad es siempre reconocible como verdad; si no es así, sólo es necesario desvelar esa verdad o descubrirla. Esta doctrina de que la verdad es manifiesta plantea la necesidad de explicar la falsedad. El conocimiento no necesita ser explicado, pero ¿cómo podemos caer en el error si la verdad es manifiesta?

Una respuesta posible considera que la ignorancia es obra de poderes que conspiran para mantenernos en ella, que fomentan nuestros prejuicios para que no podamos ver la verdad manifiesta.

Popper sostiene que esta explicación conspiracional es, básicamente, un mito. La realidad es que la verdad es difícil de alcanzar y, una vez encontrada, se puede volver a perder fácilmente. Las creencias erróneas pueden tener un poder asombroso de supervivencia, en franca oposición a la experiencia y sin ayuda de ninguna conspiración.

La teoría de la verdad manifiesta puede conducir también al autoritarismo. Esto puede deberse a que la verdad, simplemente, no es manifiesta y por tanto necesita de modo constante de re-interpretación y re-afirmación, es decir, de una autoridad que proclame y establezca cual es la verdad.

- 3) Aunque las epistemologías de Bacon y Descartes eran claramente antiautoritarias tienen una fundamentación de carácter religioso y no fueron capaces de renunciar a pensar en términos de autoridad; uno a la autoridad de los sentidos, el otro a la autoridad del intelecto.

La disyuntiva de tener que admitir que nuestro conocimiento es humano sin tener que aceptar que es mero capricho o arbitrariedad intelectual, no queda resuelta ni con el empirismo ni con el racionalismo.

Sócrates adelantó una solución con la doctrina de la falibilidad: todos nosotros podemos errar, y con frecuencia erramos individual y colectivamente; pero la idea del error y la falibilidad implica que podemos buscar la verdad, la verdad objetiva, aún cuando por lo general nos equivoquemos por amplio margen. También implica que, si respetamos la verdad, debemos aspirar a ella examinando persistentemente nuestros errores: mediante la infatigable crítica racional y mediante la autocrítica.

- 4) Popper propone reemplazar la pregunta acerca de las fuentes de nuestro conocimiento como pregunta fundamental, por la pregunta totalmente

diferente:

“¿Cómo podemos detectar y eliminar el error?”.

Una respuesta adecuada a la cuestión anterior es la siguiente: criticando las teorías y presunciones de otros y - si somos capaces de hacerlo- criticando nuestras propias teorías y presunciones. A esta posición la denomina **racionalismo crítico**.

5) Popper resume en nueve tesis los resultados epistemológicos de su reflexión:

- “1. No hay fuentes últimas del conocimiento. Debe aceptarse toda fuente y toda sugerencia y, en primer lugar, deben ser sometidas a un examen crítico.*
- 2. La cuestión epistemológica adecuada no es la relativa a las fuentes; más bien preguntaremos si la afirmación hecha es verdadera, si concuerda con los hechos. Esto se determina examinando o sometiendo a prueba la afirmación misma, de modo directo, o bien sometiendo a prueba sus consecuencias.*
- 3. En conexión con el examen y revisión críticas tienen importancia todo tipo de argumentos.*
- 4. La fuente más importante de nuestro conocimiento es la tradición. La mayor parte de las cosas que sabemos las hemos aprendido por el ejemplo o por que las hemos leído u oído previamente.*
- 5. Toda parte de nuestro conocimiento por tradición es susceptible de examen crítico y puede ser abandonado.*
- 6. El conocimiento no puede partir de la nada. El avance del conocimiento consiste, principalmente, en la modificación del conocimiento anterior.*

7. *No hay ningún criterio que permita reconocer la verdad. Pero sí poseemos criterios que, con suerte, permiten conocer el error y la falsedad. La claridad y distinción no son criterios de verdad, pero la oscuridad y la confusión indican el error. Análogamente, la coherencia no basta para establecer la verdad pero la incoherencia y la inconsistencia permiten establecer la falsedad.*
8. *La función más importante de la observación y el razonamiento, y aún de la intuición y la imaginación, consiste en contribuir al examen crítico de las conjeturas con la que se sondea lo desconocido.*
9. *La solución de un problema plantea nuevos problemas sin resolver, y ello es tanto más así cuanto más profundo era el problema original y más audaz su solución”.*

Aunque la reflexión de Popper se refiere al conocimiento en general, y de un modo más explícito al conocimiento en las ciencias experimentales, lo que haría necesarias algunas matizaciones al referirnos a las matemáticas, hay algunas conclusiones importantes que queremos destacar. En primer lugar, señalar que **no hay fuentes últimas del conocimiento**, admitir que todo conocimiento es humano, que está mezclado con nuestros errores y nuestros prejuicios.

Esto lleva a **admitir el error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento**. Las organizaciones insuficientes o claramente deficientes, las hipótesis tentativas, las conceptualizaciones incompletas son parte legítima de nuestro acceso al conocimiento, forman parte de nuestro modo de conocer. Aún así, no es válida cualquier conclusión, ya que hay una verdad objetiva a la que hemos de tratar de ajustarnos.

Idea complementaria de la presencia del error es la **necesidad de un ejercicio constante de la crítica**, sometiendo a prueba nuestros conocimientos y aproximaciones a la verdad. La búsqueda crítica del error para

modificar nuestros conocimientos deficientes es un corolario inevitable de las consideraciones anteriores.

1.2. Bachelard

En otro orden de ideas, **Bachelard** planteó la noción de obstáculo epistemológico como explicación para esa aparición inevitable de errores que, hemos visto, constituye parte importante de nuestro avance en el conocimiento. Así, al comienzo de su obra "La formación del espíritu científico" glosa las siguientes ideas:

"Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos; en el acto mismo de conocer, intimamente, es donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones; es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí, donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos.

El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra; jamás es inmediata y plena. Al volver sobre un pasado de errores se encuentra la verdad. En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza.

La noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación.

El epistemólogo tendrá que esforzarse en captar los conceptos científicos en síntesis psicológicas efectivas; vale decir, en síntesis

psicológicas progresivas, estableciendo respecto de cada noción una escala de conceptos, mostrando cómo un concepto produce otro, cómo se vincula con otro.

En educación, la noción de obstáculo epistemológico es igualmente desconocida; son poco numerosos los que han sondeado la psicología del error, de la ignorancia y de la irreflexión."

En otra obra, "La filosofía del no", al tratar de diferenciar las funciones del filósofo de la ciencia de las del científico profesional, desarrolla algunas de las ideas anteriores:

"Para el científico el conocimiento surge de la ignorancia, como la luz surge de las tinieblas. El científico no ve que la ignorancia es una trama de errores positivos, tenaces, solidarios. No advierte que las tinieblas espirituales poseen una estructura y que, en esas condiciones, toda experiencia objetiva correcta debe siempre determinar la corrección de un error subjetivo. Pero los errores no se destruyen uno por uno con facilidad. Están coordinados. El espíritu científico solo puede constituirse destruyendo el espíritu no científico. A menudo, el hombre de ciencia se confía a una pedagogía fraccionada, mientras que el espíritu científico debiera tender a una reforma subjetiva total. Todo progreso real en el pensamiento científico necesita una conversión."

Con esta noción de obstáculo epistemológico, retomada posteriormente por Brousseau para la Didáctica de la Matemática, Bachelard realiza una aproximación sistemática a los procesos de creación y constitución del conocimiento dentro de la comunidad científica y, al mismo tiempo, a los procesos de transmisión y asimilación del conocimiento en el sistema educativo. La noción de obstáculo epistemológico, y las sucesivas tipificaciones y caracterizaciones de la misma, se ha utilizado como clave para el estudio, sistematización, análisis y explicación de los errores que se presentan en el pensamiento científico.

1.3. Cosntructivismo

Las ideas anteriores pueden completarse con los planteamientos constructivistas, ya presentados en el Proyecto Docente. Recordamos que hay un acuerdo general entre los constructivistas sobre los siguientes puntos:

1. Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.
2. Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.
3. Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación de las estructuras existentes.
4. Reconocer el constructivismo como una posición cognitiva conduce a adoptar el constructivismo metodológico.

Si, por otra parte, los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero, hemos de concluir que en el proceso usual de construcción de los conocimientos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y por tanto el proceso mencionado de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones.

1.4. Lakatos

En un plano diferente, este planteamiento es básicamente coincidente con el estudio realizado por Lakatos en "*Pruebas y refutaciones*", relativo a la lógica del descubrimiento y la elaboración de conceptos en Matemáticas. Mediante la dialéctica de plantear conjeturas que aproximen una respuesta a un problema o cuestión abierta; crítica de las conjeturas mediante contraejemplos globales y locales; y superación mediante un aumento del contenido y una limitación en la extensión de los conceptos, Lakatos ofrece una metodología basada en los principios de la falsabilidad para la construcción del

conocimiento matemático.

Uno de los denominadores comunes entre Popper y Lakatos es la idea de que hay que considerar como posible la retransmisión de la falsedad en un sistema deductivo, en oposición a la idea clásica de la retransmisión de la verdad como única opción. Se trata de un cuestión clave, que tuvo importancia en la segunda crisis de fundamentos (Gödel, 1930). En esencia, se cambia el estatuto positivo (epistemología positivista), que toma la verdad como patrón, por el vaciado en negativo de la verdad, la falsedad. Así, la verdad objetiva pasa a ser una verdad relativa a unos conocimientos, unos esquemas de interpretación y unas reglas metodológicas que permiten acceder a esos conocimientos.

1.5. Conclusiones

De toda esta reflexión concluimos haciendo referencia explícita a algunas consecuencias, importantes para nosotros, relativas a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

En primer lugar, señalar que **los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje**; en segundo término, indicar que **los errores no aparecen por azar** sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos priviamente; en tercer lugar, argumentar la necesidad de que cualquier teoría de instrucción **modifique la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes** de los mismos, reemplazándola por la **previsión de errores y su consideración en el proceso de aprendizaje**; y, finalmente, señalar que **todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores**, debidos a diferentes causas, algunos de los cuales se presentan inevitablemente.

Hay que admitir como consecuencia de las reflexiones anteriores que, a partir de sus errores, un joven o un niño puede aprender distintas propiedades

de un concepto de las que no era previamente consciente. Al cometer un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarlo a completar el conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal.

2. Antecedentes en el estudio de errores en el aprendizaje de las matemáticas escolares

2.1. El error en el aprendizaje de las matemáticas

Una característica diferenciadora de las matemáticas escolares consiste en el carácter bien definido de las cuestiones y problemas que se plantean a los niños y jóvenes, independientemente del tópico tratado o del nivel de los escolares. Incluso cuando se incorporan tópicos relativos a estimación de medidas, cálculo aproximado o nociones de probabilidad, todas las cuestiones planteadas tienen una respuesta, o un rango de respuestas, adecuada (s); cualquier otra respuesta se considera inadecuada o incorrecta.

Por ello, siempre resulta posible clasificar las contestaciones de los alumnos a cuestiones y problemas matemáticos en correctas o incorrectas; también hay una tercera opción que consiste en dejar sin respuesta la cuestión planteada. El grado de complejidad de una cuestión determinada nos puede permitir, en ocasiones, subdividirla en apartados o cuestiones parciales, cada una de las cuales a su vez puede ser correcta o incorrecta.

Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es **un error** en relación con la cuestión propuesta.

Los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje de las matemáticas. Los errores son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje

de las matemáticas; constituyen un elemento estable de dichos procesos. Por otra parte, siendo un objetivo permanente de la enseñanza de las matemáticas en el Sistema Escolar lograr un correcto aprendizaje de las mismas por parte de todos los alumnos, es claro que las producciones o respuestas incorrectas a las cuestiones que se plantean se consideran como señales de serias deficiencias e incluso fracaso en el logro de dicho objetivo.

Por ello el estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas ha sido una cuestión de permanente interés en Educación Matemática, que tiene una larga historia y se ha caracterizado por aproximaciones e intereses muy diferentes. En cada época el análisis de errores en educación matemática se ha visto orientado por las corrientes predominantes en pedagogía y psicología; también ha estado condicionado por los objetivos y formas de organización del currículo de matemáticas en los correspondientes sistemas educativos.

En un trabajo ya clásico, Radatz¹ señalaba tres rasgos característicos de los estudios aparecidos hasta la fecha:

1. La Aritmética, el conocimiento numérico, constituye el área de contenidos dominante en la mayor parte de los estudios sobre errores en matemáticas escolares.
2. En USA ha habido un desarrollo teórico continuo desde comienzos de siglo para analizar los errores en educación matemática; en los países europeos el desarrollo ha sido más esporádico y carece de continuidad hasta fechas muy recientes.
3. Hay una pluralidad de aproximaciones teóricas y de intentos de explicación acerca de las causas de los errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Siguiendo a este mismo autor, destacamos algunas de las contribuciones realizadas al análisis de errores desde comienzos de este siglo hasta finales de los 70, agrupando los autores por países.

¹ Radatz H. (1980). Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. For the Learning of Mathematics. Vol. 1 (1), págg. 1-20.

2.2. Estudios en Alemania

El interés por el estudio de errores en Alemania en el periodo comprendido entre las dos guerras mundiales puede atribuirse a la importancia creciente de la pedagogía empírica, que empleaba técnicas de introspección propias de la psicología experimental. Se pueden reconocer en estos trabajos la influencia de las tres escuelas predominantes en psicología: la psicoanalítica, la teoría de la Gestalt, y la denominada psicología del pensamiento.

Se considera que Weiner (1922) es el fundador de la investigación didáctica orientada al estudio de los errores; trató de establecer patrones de errores que explicasen las equivocaciones individuales en todas las materias y para todos los grupos de edades escolares. Dentro del concepto general de "incorrecto", estableció la distinción entre equivocado, falsificación y error; también agrupó los errores en cinco categorías: errores familiares, errores persistentes, errores por similitud, errores mixtos y errores debidos a situaciones emocionales.

Seseman (1931) se preocupó por proporcionar una fundamentación psicológica adecuada para una metodología didáctica en la enseñanza de las matemáticas. Consideraba los errores como fenómenos que surgían de leyes que se habían formado mediante una incorrecta combinación de tendencias. Distinguió tres tipos de errores en aritmética: mecánicos, asociativos y funcionales.

Kiessling (1925) se ocupó principalmente de la denominada tendencia al error, especie de predisposición especial de algunas personas para equivocarse; también trabajó en el tratamiento teórico de la evaluación y tratamiento del error.

Rose (1928) trató de establecer una clasificación de las causas del error en educación matemática: inatención, ignorancia de las reglas, confusión de conceptos e incapacidad para reconocer los rasgos característicos de un

problema matemático.

Este interés en el estudio de los errores por parte de los educadores alemanes continúa a partir de los 60 con nuevas aportaciones, de las que recogemos algunas de las más destacables.

Schlaak (1968) ha observado algunos focos puntuales de error mediante el análisis de las producciones en la resolución de problemas en una prueba; entre ellos destaca la comprensión inadecuada de los enunciados, determinación incorrecta de los números, etc.

Glück (1971) ha trabajado sobre los errores de cálculo, llegando a diferenciar cinco tipos de errores: cambios de operación, aproximación aditiva o multiplicativa, resultados parciales, sólo el primer dígito correcto y errores de transcripción.

Pippig (1977) ha estudiado las deficiencias en el cálculo aritmético y ha tratado de interpretarlas desde una perspectiva psicológica, en especial los errores y dificultades que surgen cuando se trabaja en problemas aritméticos; logra describir causas de error en las diferentes etapas del proceso de solución.

2.3. Estudios en la Unión Soviética

A comienzos de los sesenta se consolidó un campo de investigación sobre educación matemática en la URSS, entre cuyos estudios se encontraba el análisis de los errores de los estudiantes y las dificultades individuales del aprendizaje escolar. De este modo se lograron nuevos conocimientos relativos a habilidades matemáticas específicas y sobre aspectos del proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Estos trabajos de la escuela soviética recibieron una difusión considerable debido a la traducción realizada por Kilpatrick y Wiszurp, que fue editada en 1967 por el NCTM. Entre las contribuciones realizadas al estudio de errores en el aprendizaje de las matemáticas destacan dos autores.

Kuzmitskaya determinó cuatro causas de error en el estudio de las dificultades: insuficiencia de la memoria a corto plazo; comprensión insuficiente de las condiciones del problema; errores debidos a la ausencia de reglas verbales para la realización de cálculos; errores por uso incorrecto de las cuatro operaciones básicas.

Menchinskaya destacó la regularidad de los errores de los estudiantes en educación matemática y enfatizó la complejidad de los procesos que están entre las causas potenciales de error. Señala cuatro áreas de causas, no totalmente diferenciadas: errores debidos a una realización incorrecta en una operación; errores por una comprensión conceptual cualitativamente insuficiente; errores mecánicos por distracción o pérdida de interés; errores debidos a la aplicación de reglas o algoritmos inadecuados.

2.4. Estudios en los Estados Unidos

La tradición investigadora sobre análisis de errores en educación matemática en los Estados Unidos se pone de manifiesto en el trabajo de Buswell y Judd² donde se recogen 31 estudios, realizados hasta ese momento, que tratan explícitamente de errores en matemáticas. Thorndike (1917) con su *Psicología de la Aritmética* realiza uno de los primeros trabajos más completos sobre determinación de errores.

Buswell (1925) logró identificar una multitud de errores tipo en las cuatro operaciones aritméticas, ampliando un método de análisis más complejo, en el que incluía no sólo los ejercicios escritos sino también observaciones en el aula y entrevistas para el diagnóstico.

Los planteamientos hacia enfoques más constructivos para la enseñanza de la aritmética recibieron un fuerte impulso del estudio sobre errores realizados hasta la fecha y de las deficiencias encontradas para clasificar e interpretar los errores detectados.

² Buswell, G. & Judd C. (1925) *Summary of Educational Investigations. Relating to Arithmetic.* Chicago: University of Chicago.

Brueckner (1935) y otros investigadores encauzaron sus trabajos en este campo sobre cinco objetivos:

1. Listar todas las técnicas potencialmente erróneas.
2. Determinar la distribución de frecuencias de estas técnicas erróneas en los agrupamientos por edades.
3. Analizar las dificultades especiales, en particular las relativas a la división y a las operaciones con el cero.
4. Determinar la persistencia de técnicas erróneas individuales.
5. Tratar de clasificar y agrupar los errores.

La última publicación de Brueckner³, traducida al castellano, nos presenta un tratamiento y desarrollo sistemáticos de los objetivos anteriores, que ha tenido influencia en la investigación hecha en España.

Esta corriente de investigación ha continuado en años recientes con los trabajos de Engelhard (1975), Lankford (1972) y Cox (1975).

Nuevas corrientes han surgido en los últimos años, así el análisis de errores ha recibido un impulso considerable por parte de los investigadores que han trabajado el diseño de actividades, tratamiento metodológico y organización curricular dirigidos a disminuir las frecuencias en los errores drásticamente. La enseñanza por diagnóstico en matemáticas, desarrollada por Ashlock (1975), Reisman (1972), Robitaille (1976) y el inglés Bell (1985), entre otros, tiene también en el análisis de errores uno de sus instrumentos más importantes. Los trabajos de investigación sobre las estructuras básicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, desarrollados por Ginsburg (1977) Erlwanger (1975) y otros, han empleado el análisis de errores como método de investigación, conjuntamente con entrevistas clínicas y estudio de casos. Para estos autores la mayor parte de los errores no tienen un carácter accidental sino que surgen por las estrategias y reglas personales empleadas en la resolución de problemas basados en experiencias particulares e interpretaciones realizadas en base a los conocimientos matemáticos iniciales.

³ Brueckner L. y Bond G. (1984). Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje. Madrid: Rialp.

2.5. Estudios en España

Por lo que se refiere a España, encontramos que el trabajo realizado en la Revista Bordón⁴ por diversos autores Villarejo A. y Fernández Huerta J. en 1953, dedica una reflexión considerable a determinar los errores más usuales en Aritmética Escolar, así como a presentar unas bases para la enseñanza correctiva en aritmética basada en métodos diagnósticos derivados de los errores detectados.

El interés por el estudio e investigación sobre los errores cometidos por los escolares se recupera en nuestro país en los últimos años, con el despegue producido en la Didáctica de la Matemática. La mayor parte de los trabajos publicados en la Editorial Síntesis se ocupan de los errores principales detectados en cada uno de los tópicos que integran el área temática correspondiente. Entre estos trabajos destaca el de Centeno⁵ en el que se plantea la necesidad de interpretar los errores para orientar el proceso de enseñanza.

2.6. Características de los estudios revisados

Haciendo un resumen de la revisión bibliográfica realizada encontramos que la mayor parte de los estudios sobre errores realizados con anterioridad a 1960 han consistido prioritariamente en recuentos del número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas y en un análisis de los tipos de errores detectados para, en algunos casos, proceder a una clasificación que permita examinar cómo surgen los errores a partir de la solución correcta y hacer inferencias sobre qué factores pueden haber conducido al error.

Una de las metas usuales de estos estudios ha consistido en preparar listados de ejercicios en los que la cantidad de práctica propuesta para cada hecho o algoritmo numérico reflejase su dificultad intrínseca, medida por el rendimiento obtenido en poblaciones estándar. Para ello, los investigadores

⁴ Bordón, Revista de la Sociedad Española de Pedagogía (1953). Tomo V, Nº 35.

⁵ Centeno J. (1988). Números Decimales. Madrid: Síntesis.

trabajaban con un gran número de niños a los que se pasaban pruebas; con posterioridad a su corrección se ordenaban los ejercicios de acuerdo con el porcentaje de alumnos que los realizaban mal; se trataba de intentos empíricos para descubrir simplemente qué problemas aritméticos eran intrínsecamente sencillos y cuales intrínsecamente difíciles. La influencia de la metodología psicométrica y de las evaluaciones con relación a norma están muy presentes en todos estos trabajos iniciales sobre el estudio de errores.

Brownell⁶ criticó ampliamente la técnica de ordenar combinaciones numéricas y ejercicios en base a los porcentajes de éxitos obtenidos y diseñó nuevos métodos para describir la naturaleza de los errores.

Los trabajos de Tyler en primer lugar, y los de Bloom posteriormente entre muchos otros, produjeron un cambio sustancial en la concepción del currículo y, en particular, en la evaluación de los alumnos. Surgen así las pruebas con relación a criterio en donde son los objetivos marcados para cada disciplina los que establecen inicialmente el estándar adecuado. Las necesidades de expansión de los Sistemas Educativos a toda la población escolar impulsan la democratización en las aulas, enfatizando la necesidad de abandonar los fuertes criterios selectivos que habían predominado hasta el momento. Los objetivos planteados para cada clase de conocimiento se diversifican en cognitivos, procedimentales y actitudinales y, lo que es más importante, cada uno de los objetivos empiezan a cualificarse como adecuados o inadecuados, para un determinado nivel, en función del rendimiento logrado por los correspondientes alumnos, completando así la tendencia general de evaluar a los alumnos por sus éxitos con una visión alternativa de valorar los objetivos por el porcentaje de éxitos que los alumnos de un determinado nivel logran sobre el mismo.

Esta nueva conceptualización obliga a un análisis más fino de las producciones de los alumnos. ¿Cuáles son las causas por las que determinados aspectos de un objetivo logran éxitos considerables mientras que

⁶ Brownell W. (1941). *Arithmetic in grades I y II. A critical summary of new and previously research.* Durham: Duke University Press.

otros presentan dificultades insuperables para los mismos alumnos?

¿Son las tareas propuestas las que producen los errores? ¿son los conceptos subyacentes? ¿por qué esos saltos bruscos y esas profundas diferencias entre tareas aparentemente muy similares?

2.7. Nuevas direcciones en los estudios sobre errores

Es en esta época desde comienzos de los 70, en la que la necesidad de una mejor y más fina comprensión de los errores lleva a los primeros estudios sobre patrones de error y análisis de errores sobre la base de esos patrones.

Con posterioridad a 1970 la teoría del procesamiento de la información ha proporcionado un marco teórico que trata de explicar -en términos generales- la aparición de errores sistemáticos. Dentro de este marco hay que situar los trabajos realizados por Brown y Burton⁷ en los que utilizando el ordenador e interpretando los errores sistemáticos como "*bugs*" en un programa, han desarrollado un formalismo preciso para describir errores en la resolución de problemas aritméticos. Esta línea de investigación permite análisis precisos que explican más del 50% de los errores cometidos por los escolares en la realización de determinadas operaciones aritméticas. Aunque son muchas las cuestiones abiertas, como puede apreciarse extensamente en el trabajo de Maurer⁸, y la técnica de bugs no es fácilmente extensible a otros campos de las matemáticas, como el álgebra, se trata de una línea prometedora y que parece aportar una tecnología útil para el diagnóstico y corrección de los errores de los escolares.

Recientemente⁹ se ha realizado una revisión del modelo teórico de bugs,

⁷ Brown J. & Burton R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematics skills. *Cognitive Science* 2, págg. 155-192.

⁸ Maurer S. (1987). New knowledge about Errors and New views about Learners: What they mean to educators and more educators would like to know. Schoenfeld A. (Ed.): *Cognitive Science and Mathematics Education*. Cp. 7. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

⁹ Blando J., Kelly A., Schneider B., Sleeman D. (1989). Analyzing and modeling arithmetic errors. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 20 págg. 301-308.

con la denominada Teoría de la generalización errónea. El modelo de Brown, Burton y Van Lehn establece que los errores ocurren cuando el estudiante se encuentra con una dificultad o un hecho no familiar en una tarea que le conduce a un atolladero. Esta situación la resuelve mediante la modificación (reparación) de un procedimiento conocido y su aplicación incorrecta a la tarea; surgen así los bugs, como errores que ocurren en el periodo o etapa de producción. La Teoría de la Generalización Errónea adopta un punto de vista distinto; los errores no son chapuzas o reparaciones que realiza el estudiante, sino reglas falsas; es decir, violaciones de reglas matemáticas legales. Este nuevo planteamiento teórico se puede considerar como un refinamiento del anterior, ya que se orienta igualmente a analizar y categorizar los errores de los alumnos en cálculo aritmético o algebraico, en aspectos principalmente sintácticos.

Brousseau, Davis y Werner¹⁰ han realizado recientemente una aproximación general a la comprensión de los errores en matemáticas mediante la teoría del procesamiento humano de la información. Sobre esta base teórica estos autores hacen inferencias sobre la naturaleza de los procesos subyacentes y -cuando es posible- hacen propuestas que permiten proceder a su mejora. Al interpretar las observaciones y realizaciones de los alumnos en términos de la teoría de esquemas, el papel del lenguaje y la construcción de representaciones mentales, se ponen de manifiesto con mayor profundidad las características de los errores.

2.8. Líneas de Investigación recientes

En el momento actual se pueden señalar varios núcleos de interés en investigación sobre estudio de errores, que están orientando gran parte de los trabajos que se realizan. En primer lugar, tenemos que el análisis de los errores de los sujetos en la resolución de problemas es un método productivo para estudiar el pensamiento matemático en términos del procesamiento de la información. Este marco teórico, a su vez, proporciona la posibilidad de

¹⁰ Brousseau G., Davis R. & Werner T. (1986). Observing Students at Work. Christiansen B., Howson G., Otte M. (Edts.): Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht: Reidel P.C.

profundizar en los errores del aprendizaje. En segundo término, tenemos que el estudio de los patrones de error es un elemento clave en la tarea que tienen los profesores de conocer, controlar y guiar el desarrollo de las ideas en la mente de sus alumnos. Las técnicas de observación del trabajo de los escolares que forman parte destacable de la formación inicial y permanente del profesorado tienen en el estudio de errores uno de sus instrumentos más destacables.

Finalmente, la enseñanza correctiva mediante métodos de diagnóstico y propuestas alternativas de trabajo para los estudiantes, que les permitan integrar nueva información, completar sus conocimientos y resolver las dificultades planteadas, superando las prácticas erróneas, necesitan - inevitablemente - de una comprensión lo más profunda posible de la naturaleza y características de los errores en matemáticas. En esta última línea podemos situar las investigaciones realizadas en el Chelsea College de la Universidad de Londres, en el Proyecto "*Strategies and Errors in Secondary Mathematics*" (SESM), derivado del Proyecto previo "*Concepts in Secondary Mathematics and Science*" (CSMS). Los trabajos realizados hasta el momento se han publicado en tres monografías: la primera relativa a la iniciación al Algebra¹¹, la segunda sobre las nociones de Razón y Proporcionalidad¹² y la tercera sobre Fracciones¹³.

La metodología seguida en estos trabajos se apoya en varios supuestos. El énfasis en analizar los errores de los niños está basado en la idea de Piaget de que un error consistente en un problema dado refleja un modo de considerar el problema o acercarse a su solución que está en consonancia con la estructura cognitiva del niño. Los análisis que se basan sobre la perspectiva del alumno y el modo de actuar en relación con la tarea, en vez de sobre la lógica de la tarea, son los que proporcionan comprensión sobre la cognición del alumno. Después de elaborar una hipótesis relativa a las estructuras conceptuales y procedimentales del niño en relación con el tópico en estudio, es conveniente buscar vías tanto para examinar esas hipótesis como para

¹¹ Booth L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson.

¹² Hart K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson.

¹³ Kerslake D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson.

ayudar al alumno a construir el tipo de conocimiento estructurado necesario para una actuación correcta sobre el problema en cuestión. El experimentador debe observar, tan directamente como le sea posible, cómo el alumno está pensando mientras ejecuta una tarea mediante un criterio, una vez que ha identificado la naturaleza del razonamiento correcto para la tarea.

La metodología seguida en estos estudios tiene tres fases principales:

1. Una investigación en las causas de los errores en estudio mediante entrevistas individuales con los alumnos que se han identificado como autores de tales errores.
2. Realizar experimentos de enseñanza a pequeña escala, basados en el análisis anterior.
3. Desarrollar prototipos de módulos de enseñanza para trabajar con la clase completa.

Esta línea de trabajo, con ligeras variantes, está teniendo un desarrollo de investigaciones muy potente en los últimos años.

Para concluir queremos indicar que dentro de la clasificación de tópicos que realiza la revista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, hay un apartado especialmente dedicado al estudio de errores, el D-70, que aparece enunciado como: *“Diagnóstico, análisis y corrección de dificultades del aprendizaje y errores de los estudiantes”*.

En los tres últimos años han aparecido referenciados un total de 148 trabajos bajo este epígrafe, lo que da una media de 8 trabajos por volumen editado.

3. La investigación sobre errores

3.1. Planteamiento y cuestiones generales

La reflexión actual sobre los errores en los estudios sobre aprendizaje de las matemáticas los considera como parte normal en los procesos de aprendizaje, Brousseau, Davis y Werner¹⁴ expresan claramente esta idea:

“Observaciones hechas en el aula ponen de manifiesto que:

- 1. Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores.*
- 2. Cuando esta vía de pensamiento original se muestra inesperadamente útil, admiramos su poder y decimos que el estudiante ha tenido una comprensión inusual; pero cuando, por el contrario, este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial, decimos usualmente que el estudiante ha cometido un error. De hecho, ambos casos tienen mucho en común, en particular el dato de que las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera.”*

Dentro de la pedagogía actual una dimensión importante consiste en considerar los procesos de enseñanza/aprendizaje como procesos de comunicación, pero esta comunicación debe fluir en ambas direcciones: desde los estudiantes hacia el profesor igual que desde el profesor hacia los estudiantes.

Tarea principal del trabajo del profesor consiste en dirigir y guiar el desarrollo de ideas en las mentes de sus estudiantes, por ello es importante para el profesor conocer qué es lo que sus estudiantes se encuentran

¹⁴ Brousseau G., Davis R., Werner T. (1986). Observing students at work, en Christiansen B., Howson G. & Otte M. (Ed.): Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht: Reidel Publishing comp.

pensando, y no limitarse a hacer suposiciones sobre esas ideas.

Al comenzar una observación cuidadosa del trabajo de los alumnos, los profesores se encuentran con una serie de sorpresas que, de nuevo, Brousseau, Davis y Werner describen del siguiente modo:

1. *Se hace evidente rápidamente que los errores de los alumnos son, con frecuencia, el resultado de un procedimiento sistemático que tiene alguna imperfección; pero el procedimiento imperfecto lo utiliza el alumno de modo consistente y con confianza. En estos casos, los errores muestran un patrón consistente.*
2. *Los alumnos tienen con frecuencia grandes concepciones inadecuadas ("misconceptions") acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.*
3. *Cuando es posible observar a los alumnos y también intercambiar información con sus profesores usuales, se ve que los alumnos emplean con frecuencia procedimientos imperfectos y tienen concepciones inadecuadas que no son reconocidas por sus profesores.*
4. *También se hace evidente que los estudiantes son con frecuencia más inteligentes para inventar sus propios métodos originales de lo que se espera de ellos. Incluso cuando un método ha sido presentado por el profesor, un alumno puede desarrollar su propio método original, llegando hasta ignorar el método del profesor".*

Esta serie de fenómenos se vienen observando desde hace muchos años, como hemos puesto de manifiesto en el apartado anterior, pero no es hasta fechas recientes cuando se tiene en cuenta la complejidad en la que se encuadran. Al estudiar los errores, de acuerdo con las dificultades encontradas

por los alumnos, se debiera reconocer que los errores también son función de otras variables del proceso educativo: el profesor, el currículo, el entorno social en el que se enmarca la escuela, el medio cultural y sus relaciones, así como las posibles interacciones entre estas variables. Los errores en el aprendizaje de las matemáticas son, en nuestra consideración, el resultado de procesos muy complejos. Una delimitación clara de las causas posibles de un error dado o una explicación de cada error con la posibilidad de actuar sobre él, es con frecuencia bastante difícil debido a que hay una fuerte interacción entre las variables del proceso educativo y, a menudo, es muy difícil aislar relaciones.

Sin embargo, desde fechas recientes, se ha producido un avance considerable en la investigación sobre educación matemática y se aprecia un interés creciente por lograr un esquema claro de interpretación y previsión de errores y concepciones inadecuadas.

Ya en 1979 Radatz¹⁵ señaló varias razones por las que el estudio de errores y la necesidad de un marco teórico de explicación, eran importantes:

- 1. El desacuerdo y escepticismo tanto respecto de los tests con relación a norma como con los tests con relación a criterio para medir los logros en matemáticas han aumentado la atención por los aspectos diagnósticos de la enseñanza.*
- 2. Las reformas sucesivas del currículo de matemáticas probablemente no han conducido a nuevos errores y dificultades, pero con seguridad han surgido nuevos errores, debido a los contenidos específicos.*
- 3. La individualización y diferenciación de la instrucción matemática requirió, como posteriormente la socialización y las relaciones de comunicación en el aula, de una gran destreza en el diagnóstico de dificultades específicas; los*

¹⁵ Radatz H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 9 págg. 163-172.

profesores necesitan de modelos de actuación para diagnosticar la enseñanza en los que los aspectos del contenido matemático estén integrados con ayuda de la psicología educativa y la psicología social.

4. *La crítica sobre los paradigmas tradicionales de la investigación educativa han estimulado otros métodos de investigación en educación matemática: investigación clínica, estudio de casos y fenomenología didáctica”.*

En el momento actual, la mayor parte de los investigadores y especialistas¹⁶ coinciden en considerar como características generales de los errores cometidos por los alumnos los siguientes:

1. Los errores son sorprendentes. Con frecuencia los errores cometidos por los alumnos surgen de manera sorprendente, ya que por lo general se han mantenido ocultos para el profesor durante algún tiempo.
2. Los errores son a menudo extremadamente persistentes, debido a que pueden reflejar el conocimiento de los alumnos sobre un concepto o un uso particular de reglas nemotécnicas. Son resistentes a cambiar por sí mismos ya que la corrección de errores puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos.
3. Los errores pueden ser o bien sistemáticos o por azar. Los primeros son muchos más frecuentes y, por lo general, más efectivos para revelar los procesos mentales subyacentes; estos errores se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera y utiliza como correcto. Los errores por azar reflejan falta de cuidado y lapsus ocasionales, y tienen relativamente poca importancia.
4. Los errores ignoran el significado; de este modo, respuestas que son

¹⁶ Mulhern G. (1989). *Between the ears: Making inferences about internal processes*, en Greer B. & Mulhern G. (edtl): *New directions in mathematics Education*. Londres: Routledge.

obviamente incorrectas, no se ponen en cuestión. Los alumnos que cometen un error no consideran el significado de los símbolos y conceptos con los que trabajan.

Es claro que no pueden ignorarse las capacidades de los estudiantes; tampoco pueden olvidarse los errores que comenten. Brousseau, Davis y Werner¹⁷ señalan cuatro vías mediante las que el error puede presentarse:

- “1. Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.*
- 2. Frecuentemente los errores se presentan como resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.*
- 3. También los errores pueden presentarse cuando el alumno utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.*
- 4. Los alumnos con frecuencia inventan sus propios métodos, no formales pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les proponen y la resolución de problemas”.*

Estudiar y analizar los errores cometidos por los estudiantes ha emergido recientemente como una gran línea de estudio e investigación en Educación Matemática, con implicaciones considerables en gran parte de los campos de estudio en nuestra área.

¹⁷ Obra citada.

3.2. Principales líneas de investigación

Cuatro son los polos en torno a los cuales se articulan los estudios e investigaciones recientes relativos a errores en el aprendizaje de las matemáticas:

Primero: Estudios relativos al análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican, y taxonomías y clasificaciones de errores detectados. Estos trabajos proceden o conectan con alguna teoría psicológica o psicopedagógica que proporciona un marco explicativo y a la que el análisis de errores ofrece una metodología adecuada para aumentar su contenido empírico. También incluimos aquí las aproximaciones teóricas hechas desde un planteamiento epistemológico o estrictamente matemático, que tratan de establecer causas estructurales para los errores debidas a la propia naturaleza del conocimiento matemático, con exclusividad sobre cualquier otro argumento; los trabajos sobre obstáculos son un ejemplo potente de esta opción.

Segundo: Estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores del aprendizaje en matemáticas. Se incluyen aquí los trabajos dedicados a la organización didáctica de la enseñanza de las matemáticas que contempla la consideración de los errores como un dato destacable. Una línea de trabajo es la denominada enseñanza diagnóstica o por diagnóstico, que trata de prever los errores, detectarlos y proponer los medios para su corrección. También incluimos en estos estudios las propuestas realizadas por otros autores que contemplan los errores como plataformas para incentivar el estudio e investigación de los contenidos matemáticos. Igualmente quedan comprendidos en este apartado los estudios sobre evaluación y el papel que desempeñan los errores en las valoraciones que se deben realizar sobre las producciones de los alumnos.

Tercero: Se consideran aquí los estudios dedicados a determinar qué conviene que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los alumnos. Se trata de estudios relativos a la formación del

profesorado y al papel que la observación, análisis, interpretación y tratamiento de los errores de los alumnos tienen en este proceso de formación. Aunque con un carácter más restringido que los apartados anteriores se trata de un campo de trabajo delimitado que ha tenido cierto desarrollo recientemente.

Cuarto: incluimos en este apartado aquellos trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis sobre errores. El carácter dicotómico de la valoración correcto/incorrecto para las producciones de los alumnos han permitido una utilización considerable de procedimientos estadísticos; gran parte de los trabajos de orientación psicométrica van dirigidos al estudio de errores en el aprendizaje. Los programas de ordenador elaborados para sustentar la interpretación de los errores como bugs y el desarrollo posterior que se ha hecho de los mismos, aunque tienen una fundamentación teórica clara en el procesamiento humano de la información, tienen igualmente un desarrollo técnico propio por lo que los consideramos en este apartado.

Finalmente, incluimos en este apartado técnicas de análisis puestas a punto por algunos equipos investigadores para contrastar hipótesis alternativas que justifican el origen o causa de un determinado error.

Aunque estas cuatro categorías no son excluyentes, las vamos a utilizar para organizar la presentación y realizar una breve descripción de los trabajos e investigaciones relativos a errores del aprendizaje en matemáticas más significativos para nosotros en estos últimos años.

3.3. Análisis, causas y clasificación de errores

Característica diferenciadora de la aproximación cognitiva al estudio del aprendizaje con respecto a los estudios conductistas es la necesaria postulación de procesos mentales en la realización de tareas. Sin embargo, los procesos mentales no son visibles; por ello, los investigadores deben recurrir a una variedad de métodos indirectos de observación que permitan hacer

inferencias sobre los procesos mentales considerados.

El surgimiento de la teoría del procesamiento de la información ha resultado valioso para el estudio del pensamiento y, en particular, el trabajo de un número creciente de investigadores ha puesto de manifiesto que el pensamiento matemático es especialmente indicado para representarlo mediante modelos de procesamiento de la información.

El método de procesamiento de la información está basado en la suposición de que los problemas matemáticos pueden descomponerse en varios componentes de procesamiento. Sin embargo, estos subcomponentes son, por su naturaleza, internos y, por tanto, hay que utilizar métodos indirectos de observación. Entre estos métodos indirectos se encuentra el análisis de los errores de los sujetos en sus producciones matemáticas.

Algunos de los resultados e interpretaciones más valiosos mediante el procesamiento humano de la información se han encontrado estudiando los errores; la utilidad de esta aproximación se incrementa con el hecho de que hay patrones consistentes en los errores. La consistencia puede considerarse a dos niveles, por un lado, a nivel individual, ya que los sujetos muestran una regularidad considerable en su modo de realizar tareas y resolver problemas matemáticos similares, con poca variabilidad en periodos cortos de tiempo. Por otro lado, también hay consistencias en los grupos humanos, de carácter colectivo; se trata de ciertos errores que personas diferentes cometen en ciertas etapas de su desarrollo educativo.

Mediante combinación de resultados empíricos con algunos supuestos acerca de estructuras mentales y ciertas leyes generales del procesamiento humano de la información, es posible predecir algunos patrones comunes de error.

Davis¹⁸ elaboró una teoría de esquemas o constructos personales, que se presentan de forma similar en distintos individuos que comparten las mismas experiencias, y cuya combinación mediante los principios generales que regulan el procesamiento humano de la información le permiten tipificar e interpretar algunos de los errores más usuales de los escolares en el aprendizaje de las matemáticas. Los esquemas postulados por Davis tienen las siguientes características:

1. Deben considerarse como esquemas para asimilar información, es decir, para organizar los datos de entrada.
2. Cada estructura de representación puede identificarse por los errores que presenta, con lo que revela parte de su modo interno de trabajo.
3. Cada estructura de representación tiene un origen legítimo, en un aprendizaje inicialmente correcto.
4. Cada estructura de representación necesita un tipo de información inicial y no funcionará correctamente si no se le proporciona toda la información inicial.
5. Los esquemas son persistentes. Es precisamente esta propiedad la que los hace reconocibles como entidades internas de procesamiento de la información: que pueden ponerse en correspondencia con ciertos comportamientos externos observables. Esto se observa porque funcionan de modo idéntico en una variedad de situaciones; producen alteraciones en los datos de entrada cuando no parecen encajar con el esquema; cuando se pretende enseñar contra un esquema interiorizado el aprendizaje apenas se produce.
6. La creación y el modo de operación de los esquemas sigue ciertas reglas ordenadas. Una de estas reglas es la denominada de sobregeneralización inicial; una segunda expresa que no se discrimina cuando no es necesario; una tercera dice que el procesamiento tiende a producirse según el esquema asumido y cuando encuentra algún inconveniente se producen modificaciones

¹⁸ Davis R. (1984). *Learning Mathematics: the Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Australia: Croom Helm.

o adaptaciones que permiten continuar.

7. La recuperación en memoria de un esquema puede realizarse mediante términos clave breves y explícitos.
8. Un alumno que realiza una tarea matemática con éxito encuentra gran parte de la información necesaria en los esquemas que utiliza, que no suelen estar presentes en los enunciados de los problemas o tareas propuestas.

Al postular la representación interna de información, las estructuras de su procesamiento y algunas características de los componentes estructurales propuestos, Davis plantea un mecanismo mediante el que analiza el pensamiento matemático humano y algunos de sus errores.

Algunos de los errores clásicos explicados por el modelo de Davis son:

1. Reversiones binarias. Ejps. $4 \times 4 = 8$; $2^3 = 6$.
2. Errores inducidos por el lenguaje o la notación. Ejp. $2x - x = 2$.
3. Errores por recuperación de un esquema previo. Entre los ejemplos que propone se encuentran los errores usuales de la suma y la resta, justificados por esquemas tales como el de adición con dos entradas, el simétrico de la sustracción y la comparación de unidades en una relación de proporcionalidad.
4. Errores producidos por una representación inadecuada.
5. Reglas que producen reglas. Así, de la implicación: $(x-2)(x-3) = 0 \rightarrow x=2$ o $x=3$, se pasa a : $(x-2)(x-3) = 2 \rightarrow x=4$ o $x=5$.

Radatz¹⁹ realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales.

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje. Señala que el aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos

¹⁹ Obra citada.

es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.

2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se está iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas.

Algunas representaciones icónicas de situaciones matemáticas pueden suponer dificultades en el procesamiento de la información; el análisis y síntesis perceptivos implican una demanda considerable para algunos alumnos, presentando dificultades y produciendo errores.

3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.
4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En estos casos los alumnos desarrollan operaciones cognitivas, que continúan empleando aún cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se hayan modificado. Persisten en la

mente algunos aspectos del contenido o del proceso de solución, inhibiendo el procesamiento de nueva información. Dentro de esta clase de errores se encuentran los siguientes:

- Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
 - Errores de asociación, que incluyen interacciones incorrectas entre elementos singulares.
 - Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
 - Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura.
 - Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.
5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

En una investigación más reciente sobre errores cometidos por alumnos de Secundaria en matemáticas, Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar²⁰ hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizada por expertos.

De acuerdo con la metodología propuesta determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

1. Datos mal utilizados. Se incluyen aquí aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno. Dentro de este apartado se encuentran los casos en los que: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la

²⁰ Movshovitz-Hadar N., Zaslavksy O. & Inbar S. (1987). An Empirical classification model for errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol 18, págg. 3-14

información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.

2. Interpretación incorrecta del lenguaje. Se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada; también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operando con él según las reglas usuales; a veces se produce también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.
3. Inferencias no válidas lógicamente. Esta categoría incluye aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico. Encontramos dentro de esta categoría aquellos errores producidos por: derivar de un enunciado condicional su recíproco o su contrario; derivar de un enunciado condicional y de su consecuente, el antecedente; concluir un enunciado en el que el consecuente no se deriva del antecedente, necesariamente; utilizar incorrectamente los cuantificadores; o también, realizar saltos injustificados en una inferencia lógica.
4. Teoremas o definiciones deformados. Se incluyen aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable. Tenemos en este caso la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocibles.
5. Falta de verificación en la solución. Se incluyen aquí los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si el resolutor hubiese contrastado la solución con el enunciado el error habría podido evitarse.

6. Errores técnicos. Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

La categorización de estos autores está fundamentada más en el conocimiento matemático que en el procesamiento de la información. Cuando se intenta avanzar desde la descripción de los patrones de error y las técnicas falsas hasta llegar a un análisis de las causas de los errores en las cogniciones de los alumnos, parece claro que la interpretación en base al procesamiento de la información ofrece una base teórica más completa para la clasificación de errores.

Otra aproximación diferente es la realizada por algunos investigadores desde un punto de vista epistemológico, que pasamos a comentar brevemente. Las ideas generales que sustentan este planteamiento son como sigue:

“La reconstrucción y apropiación de conocimiento matemático exige una labor depurativa constante en la que se ponga en cuestión el conocimiento vulgar, empírico, parcial, falso en unos casos o superficial en otros, que tienen los individuos en cada momento educativo, para que se produzcan rupturas con los conceptos y representaciones necesariamente limitados, y que aparezcan en su lugar nuevas concepciones, teorías y procedimientos, como alternativas más amplias, profundas e integradoras.

Este punto de vista caracteriza el proceso de aprendizaje como resultado de modificaciones cualitativas del conocimiento en la dirección del conocimiento científico y por tanto de un pensamiento más evolucionado. A grandes rasgos, el conocimiento matemático se construye paulatinamente mediante actos sucesivos de abstracción, a partir de la realidad, para desembocar en un nivel en el que el trabajo se realiza con entes y relaciones matemáticas con poca o nula conexión con la realidad en

la mayoría de los casos. Se trata de un proceso en cadena con sucesivas rupturas y ampliaciones, en el que aparecen dificultades inherentes al salto cualitativo que supone el paso de la realidad concreta cotidiana a la realidad matemática formal. En este proceso, el individuo debe ir abandonando y sustituyendo progresivamente ciertos tipos de conocimiento por otros más evolucionados, venciendo las resistencias naturales que suelen presentarse ante modificaciones. Los conocimientos antiguos que funcionan no son desechados completamente sino que quedan integrados y valorados dentro de la nueva y más completa visión que surge del aprendizaje. En esta dinámica, los errores que cometen los individuos de forma persistente son manifestaciones de la presencia de un fenómeno más amplio, que algunos autores denominan inadaptación del conocimiento, provocada por obstáculo. El error dentro de esta interpretación es un hecho constatable que tiene su origen o es debido a la presencia de uno o varios obstáculos como fenómenos más generales y arraigados en el individuo".²¹

Aunque se han hecho serios intentos por desarrollar un sistema de categorización de errores en base a una tipificación de obstáculos y del análisis derivado correspondiente, el hecho real es que, hasta el momento, no se han superado los niveles generales, meramente descriptivos, y no existe un desarrollo teórico sistemático que permita clasificar, interpretar y predecir los errores en términos de obstáculos, es decir, en función de argumentos fundamentalmente epistemológicos y con exclusión de categorías cognitivas.

²¹ González J. L. (1992). Pensamiento relativo. Análisis de errores en tareas de traducción-interacción entre sistemas de representación. Tesis Doctoral inédita.

3.4. Tratamiento curricular de los errores

Siguiendo a Bell²² consideramos que la enseñanza diagnóstica surge a partir de los estudios actuales sobre comprensión de la matemática, que presenta dos rasgos principales.

En primer lugar, la enseñanza se basa en tareas críticas que exponen las ideas, correctas y equivocadas, de los alumnos. Proporcionan material para lecciones basadas en el conflicto cognitivo y la discusión. En segundo lugar, se esfuerza en basar la enseñanza directamente en tareas lo más cercanas posible a aquellas en las que se espera que los alumnos apliquen los principios que aprenden. Si se combinan estas dos ideas tenemos que, en su comienzo, hay que elegir una tarea realista que incorpore los conceptos erróneos y provocar así un conflicto cognitivo que desemboque en una discusión dirigida a resolver ese conflicto.

Los trabajos realizados o dirigidos por el Profesor Bell orientan su investigación a descubrir y poner de manifiesto un número de áreas susceptibles de errores y equivocaciones graves y ampliamente desconocidas. El comienzo se ha hecho observando los errores de los alumnos al realizar tareas prescritas, aunque luego ha sondeado más profundamente en los errores de concepción que los sostienen y gobiernan. Una vez que se ha puesto de manifiesto que muchos errores no son simples fallos de memoria, sino que tienen raíces más profundas, se hace evidente que la enseñanza necesaria para remediarlos o evitar su aparición tiene que operar a un nivel profundo. El énfasis de la enseñanza se aparta de la adquisición de procedimientos algorítmicos y se dirige hacia el desarrollo de estructuras conceptuales correctas. Los estudios sobre estructuras multiplicativas y comprensión por los alumnos de las mismas, entran dentro de los ejemplos más conocidos de investigación sobre errores para producir un tratamiento curricular.

²² Bell A. (1986). Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas.

El material desarrollado se articula en torno a un modelo de lección diagnóstica a la que se incorporan algunos tipos de tareas. La lección diagnóstica típica utiliza uno o unos cuantos problemas críticos (casi siempre desarrollados originalmente como ítems de tests) para descubrir concepciones erróneas y así provocar discusiones conducentes a una resolución; a continuación siguen problemas similares que se dan con algún tipo de retroalimentación inmediato en cuanto a la corrección, para consolidar la conciencia recién adquirida.

Se han desarrollado varios tipos de tareas que proporcionan diversas maneras de descubrir conocimientos erróneos, provocar la reflexión o activar los conceptos pertinentes. Estas tareas son: empleo de diagramas, sustitución de números fáciles, juegos, invención de preguntas, calificación de deberes y tareas colectivas. El desarrollo alcanzado en la ejemplificación de estas tareas con el material elaborado y editado por Shell Center de la Universidad de Nottingham (U.K.), que ha alcanzado un alto grado de difusión y una ejemplaridad didáctica sobresalientes, nos eximen de entrar en más detalles sobre estos aspectos.

Con posterioridad a las investigaciones del Prof. Bell han sido muchos los especialistas que se han dedicado a estudiar, clarificar y tratar de eliminar los conceptos erróneos de los alumnos, abordando las dificultades de transferencia a aplicaciones realistas, incorporándolas desde el comienzo a la enseñanza.

Otra orientación curricular surgida en estos últimos años es la que vienen desarrollando Borassi²⁹ y otros autores sobre la utilización de los errores como plataformas para explorar nuevos conocimientos matemáticos, en vez de un uso exclusivamente diagnóstico y preventivo.

Sobre la base de algunos errores usuales que se presentan en el estudio de las fracciones tales como:

²⁹ Borassi R. (1987). Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. For the Learning of Mathematics. Vol. 7, págg. 2-9.

$$3/4 + 6/7 = 9/11; 2/3 + 5/7 = 7/10$$

se plantean cuestiones como las siguientes:

¿Cuál es la regla alternativa que el estudiante está aplicando aquí?, ¿por qué está haciendo eso?, la regla de adición utilizada ¿puede tener significado en algunos casos? ¿bajo qué condiciones ocurre esto?

¿Hay un sistema matemático en el que opere esta nueva regla de adición? ¿qué propiedades tendría un tal sistema?

Escalonadamente, y mediante una serie de cuestiones con sentido, nos llega a mostrar que, aunque la operación $2/3 + 5/7 = 7/10$ puede considerarse como una equivocación, hay algunos contextos en los que esta regla puede resultar razonable. De este modo llegan a plantearse cuestiones más de fondo, como las siguientes:

¿Puede haber algo que sea cierto y falso a la vez en matemáticas?

¿Cómo se puede decidir si una regla es cierta o falsa en matemáticas?

¿Es siempre posible hacer esa determinación?

Llegando a un nivel de análisis como el que plantean estas otras cuestiones: ¿Cómo escoger reglas y definiciones para establecer un nuevo sistema en matemáticas?, ¿Cuál es el efecto de la simbolización sobre el aprendizaje de las matemáticas?, ¿Cuál es el efecto de elegir diferentes simbolizaciones sobre el desarrollo de un tópico matemático?

Estas y otras reflexiones dan pie a plantear los errores como punto de partida para una nueva orientación de las clases de matemáticas, que superen el nivel simplemente diagnóstico. La línea argumental es como sigue.

La interpretación exclusiva de los errores como instrumentos de diagnóstico y corrección explota sólo parcialmente el potencial educativo del

error discutido. En primer lugar, con tal suposición solamente profesores e investigadores podrían estar implicados en el proceso de analizar el error. Los propios estudiantes quedarían privados de la oportunidad de implicarse en la actividad de explicar y dotar de sentido a sus propios errores, una actividad que puede resultar altamente motivadora y provocadora. Además, la propia creatividad de los investigadores al analizar el error se puede ver constreñida por el enfoque limitado a buscar las causas del error del estudiante de forma que se pueda eliminar. Esto sucede porque consideran el error necesariamente como una desviación de un cuerpo de conocimiento establecido al que no deben conceder la consideración de un reto para los resultados estándar.

Pero a la vista del ejemplo anterior, incluso los errores matemáticos más simples pueden proponer tales retos, sin necesidad de un conocimiento matemático sofisticado, ni tampoco un alto nivel de capacidad matemática.

Hay al menos dos direcciones principales que pueden seguirse en el uso de los errores para motivar la reflexión e interrogarse acerca de la naturaleza de nociones matemáticas: Los errores pueden usarse para investigar la naturaleza de nociones matemáticas fundamentales tales como "*prueba*", "*algoritmo*" o "*definición*". Debido a que utilizamos continuamente algoritmos, pruebas y definiciones cuando estudiamos matemáticas podría suponerse que sabemos muy bien lo que son esas nociones y si estamos cometiendo errores al trabajar con ellas. Por el contrario, es muy difícil explicar qué es lo que caracteriza una prueba matemáticamente buena (o un algoritmo, o una definición) e incluso es más difícil llegar a ser consciente de sus funciones o sus límites. Puede ser mucho más sencillo señalar por qué una cierta prueba no parece correcta, intentar arreglarla y a partir de este proceso concreto intentar abstraer qué propiedades deseamos que tenga una prueba matemática.

Los errores pueden ayudarnos a investigar cuestiones abstractas relativas a la naturaleza de las matemáticas a las que es difícil acercarse por otra vía. De nuevo esto implica utilizar el contraste destacado por el error, al igual que de su contenido informativo, aunque con un enfoque distinto a un nivel superior de

abstracción.

Utilizar los errores como motivación y medio para interrogar sobre la naturaleza de las matemáticas puede mejorar la comprensión de las matemáticas como disciplina por parte de los estudiantes. Comprender una materia implica mucho más que simplemente "aprender con comprensión" su contenido básico. También incluye comprender su filosofía, la metodología empleada, el alcance y las limitaciones de la disciplina; debe incluir el desarrollo de actitudes positivas hacia la disciplina. Este tipo de comprensión, por desgracia, no es muy común en especial en matemáticas, y tratar de mejorarlo debiera ser extremadamente importante tanto para los estudiantes como para los profesores de cada nivel y materia.

Para poder apreciar completamente el potencial educativo de los errores como plataformas para interrogar, en los dos niveles identificados, también es importante comprender la variedad de cuestiones y exploraciones que pueden motivarse por diferentes clases de errores matemáticos. De hecho, aunque la mayor parte de la gente parece identificar los errores con el uso o la comprensión deficientes de una regla, los errores matemáticos pueden presentar características bastante diferentes, al menos con respecto a:

- * Grado de incorrección: además de resultados falsos, se pueden tener de hecho resultados parciales o aproximados, resultados correctos obtenidos mediante procedimientos ineficientes o inaceptables, resultados que se pueden tomar como correctos en un contexto determinado pero no en otro, problemas para los que no se ha llegado a una solución, etc.
- * Contexto matemático: es decir, si estamos trabajando con problemas, algoritmos, teoremas, definiciones, modelos, etc.

El punto de vista elegido por estos autores puede resumirse diciendo que los errores pueden emplearse como instrumento de motivación y como punto de

partida para exploraciones matemáticas creativas, que implican actividades valiosas de planteamiento y resolución de problemas. También los errores pueden proporcionar una comprensión más completa y profunda del contenido matemático y de la propia naturaleza de las matemáticas.

Esta línea de estudio e investigación sobre el uso de errores en el desarrollo curricular está sólo en sus comienzos y necesita aún de esfuerzo investigador para llegar a propuestas más sistemáticas y completas.

Para concluir este apartado realizaremos algunas reflexiones en torno a las conexiones entre el estudio de errores y la evaluación.

Son muchos los investigadores que han cuestionado estos últimos años la naturaleza estrictamente psicométrica de la evaluación escolar. Los aspectos cuantitativos predominantes en los tests y otros métodos similares para medir el rendimiento no proporcionan criterios suficientes para procedimientos instructivos eficientes.²⁴

En los últimos años venimos asistiendo al desarrollo de nuevos modelos de evaluación que requieren de nuevos procedimientos de valoración; pero tan importante o más que la valoración que reciben los alumnos, está el hecho de que esas valoraciones sirvan para reorientar su comprensión ayudándoles en la superación de sus concepciones deficientes y en la supresión de los errores. La evaluación no debe reducirse a los aspectos puramente externos y formales sino que debe lograrse una interiorización de los juicios alcanzados para proceder a una modificación y avance en los conocimientos. Nesher²⁵ nos aporta algunas consideraciones claves para una actualización del papel de la evaluación, diferenciando las pruebas de evaluación de los ejercicios o instrumentos para la investigación.

²⁴ Radatz H. Obra citada.

²⁵ Nesher P. (1987). Toward on Instructional Theory: the Role of Student's Misconceptions. For the Learning of Mathematics. Vol. 7, págg. 33-39.

Las recomendaciones de Neshier, resumidamente, dicen:

- a) El aprendiz deberá ser capaz, durante el proceso de aprendizaje de valorar las limitaciones e incomodidades de una pieza dada de conocimiento. Esto puede ser enfatizado desarrollando entornos de aprendizaje que funcionen como sistemas de retroalimentación dentro de los cuales el aprendiz sea libre para explorar sus creencias y obtener respuesta específica a sus acciones.*
- b) En los casos en que el aprendiz reciba retroalimentación inesperada, si no queda bloqueado por ella, deberá ser estimulado y motivado para continuar e interrogar respecto a su tarea.*
- c) El profesor no puede predecir completamente el efecto del sistema de conocimiento previo del estudiante en un nuevo entorno. Más aun, antes de que complete su instrucción, debiera proporcionar oportunidades al estudiante para manifestar sus concepciones deficientes y así relacionar la instrucción subsiguiente a estas concepciones.*
- d) Las concepciones deficientes son, por lo general, una excrecencia de un sistema de conceptos y creencias ya adquiridos aplicados equivocadamente a un dominio. No debieran tratarse como cosas terribles que deben desarraigarse ya que ello puede confundir a los aprendices y destruir su confianza en el conocimiento previo. En vez de ello, el nuevo conocimiento debiera conectarse con el esquema conceptual previo del estudiante y situarlo en la perspectiva correcta.*
- e) Las concepciones deficientes no sólo se encuentran tras las realizaciones erróneas, sino que también se ocultan tras muchos casos de ejecución correcta. Una teoría de la instrucción deberá cambiar su enfoque de las realizaciones erróneas hacia la comprensión del sistema de conocimiento completo de los*

estudiantes, del cual se derivan sus reglas de actuación.

f) Los ítems diagnóstico que discriminan entre concepciones adecuadas y deficientes no son necesariamente los mismos que se emplean en los ejercicios y pruebas escolares. Un esfuerzo especial de investigación debiera hacerse para construir ítems diagnóstico que establezcan la naturaleza específica de las concepciones deficientes.

También Romberg²⁶ insiste en la complejidad de las tareas de evaluación y en la necesidad de superar un tratamiento exclusivamente penalizador de las producciones erróneas o incorrectas de los alumnos.

3.5. Los errores y la Formación del Profesorado

Al comienzo de este apartado ya se hizo referencia a la función prioritaria de los profesores en dirigir y guiar el desarrollo de ideas matemáticas en las mentes de los escolares, razón por la cual era de importancia destacable el entrenamiento en pautas de observación cuidadosa sobre el trabajo de los alumnos con el fin de conocer en profundidad lo que los estudiantes están pensando. Este aprendizaje debe iniciarse durante el periodo de formación inicial. A la pregunta “¿qué conviene que aprendan los profesores en formación al realizar la observación de los alumnos en su trabajo matemático?”, Brousseau, Davis y Werner²⁷, contestan señalando algunas ideas directrices a tener en cuenta para esa observación:

“1. Proporcionar a los estudiantes una oportunidad para ver lo que conocen y lo que pueden inventar o descubrir con antelación a enseñarles un método, técnica o concepto supuestamente novedoso.

2. No dejar a la casualidad la creación de las representaciones mentales de los alumnos. Se pueden proporcionar experiencias

²⁶ Romberg T. (1989). Evaluation: a coat of many colours. En Robitaille (Edt.): Evaluation and Assessment in Mathematics Education. París: Unesco.

²⁷ Brousseau G., Davis R. & Werner T. Obra citada.

para los alumnos que influirán considerablemente en las representaciones mentales que ellos construyan mentalmente.

3. Mediante las relaciones de comunicación con los alumnos, el profesor puede conocer las representaciones mentales que los alumnos están empleando."

Además del entrenamiento en la observación de las actuaciones de los alumnos y en una guía efectiva para ayudarles a superar las concepciones inadecuadas y los errores, los profesores en formación inicial y permanente deben tener un conocimiento general de las consideraciones teóricas y de fundamentación que hemos hecho en los apartados anteriores relativas a la clasificación de errores, determinación de causas, esquemas teóricos de interpretación y desarrollo curricular derivado del diagnóstico, tratamiento y superación de los errores en el aprendizaje. Todas estas cuestiones tienen interés intrínseco para la formación de profesores y deben ser objeto de estudio, reflexión y práctica explícitas.

Hay, finalmente, otras dos cuestiones de interés en relación con la formación de profesorado y el estudio de los errores. Por un lado, el análisis de los errores cometidos por los alumnos y la discusión en seminario de vías posibles para su corrección ponen de manifiesto las propias concepciones que tiene cada profesor en formación respecto del conocimiento matemático y la naturaleza de su aprendizaje. Esta comprensión sobre las propias creencias permite asumir críticamente los planteamientos profesionales de cada profesor en formación, observando las incoherencias y aspectos olvidados y promoviendo una concepción más completa de las tareas docentes.

Introducir en el aula una consideración sistemática de los errores va más allá de introducir un nuevo tópico en el currículo, y hace necesario la enseñanza de estrategias adecuadas. Esto es debido a que tanto los profesores como los alumnos tienen fuertes concepciones previas sobre los errores y, por tanto, estas consideraciones influirán sus comportamientos en relación con las actividades que impliquen errores. Será pues importante que los profesores

clarifiquen sus concepciones sobre las matemáticas, su aprendizaje y los errores para que puedan ayudar a sus alumnos a superar el sentimiento negativo que las personas tienen hacia los errores.

Por otro lado, también los profesores en formación cometen errores en la realización de tareas matemáticas, muchas de ellas similares o debidas a las mismas causas que las que comenten los escolares. Poner de manifiesto las concepciones deficientes y los errores cometidos es una tarea formativa ineludible para el Profesor en formación; conviene aprovechar este tipo de actividades para proponer esquemas de trabajo correctivos y situaciones en las que el conflicto cognitivo entre las concepciones inadecuadas y las adecuadas se ponga fuertemente de manifiesto y obliguen a una reestructuración positiva de los esquemas previos.

Algunas investigaciones recientes han trabajado en esta línea.²⁸

3.6. Técnicas de análisis

A lo largo de los estudios e investigaciones en educación matemática podemos encontrar una gran variedad de métodos para el estudio de los errores en matemáticas. Mulhern²⁹ los agrupa en cuatro amplias categorías:

1. Contar simplemente el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas. Este método, que tiene un valor diagnóstico limitado es cercano al método psicométrico, y ha dominado la educación estatal hasta hace poco.
2. Análisis de los tipos de errores cometidos. Esta técnica implica usualmente clasificar diferentes tipos de error, examinar cómo se desvían de la solución correcta y hacer inferencias sobre qué factores pueden haber conducido al error.

²⁸ Tirosh D. & Graeber A. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educ. Stud. Math.* Vol. 20, págg. 79-96.

²⁹ Mulhern G. Obra citada.

3. Análisis de patrones de error. Tales análisis pueden revelar errores sistemáticos que sean síntoma de concepciones inadecuadas, o bien al variar aspectos de las tareas los patrones de error que resultan pueden proporcionar claves sobre qué estrategias se han utilizado.
4. Construir problemas de tal modo que puedan provocar errores en los individuos. Aquí el investigador observa los patrones de error realizados por los individuos; especula sobre las posibles causas de estos errores; y, sistemáticamente, construye nuevos problemas de los que puede predecirse que inducirán a errores similares.

Ya hemos indicado, al considerar los antecedentes en el estudio de errores, que la mayor parte de los estudios hasta fechas recientes eran de la primera de las clases mencionadas, con una fuerte influencia de la metodología psicométrica. También hemos considerado en detalle diversas aproximaciones a la clasificación de errores. Vamos a presentar el planteamiento que están siguiendo algunos autores como Nesher³⁰ al realizar el análisis de patrones de errores como síntomas de concepciones deficientes o inadecuadas ("misconceptions").

La noción de concepción deficiente señala una línea de pensamiento que causa una serie de errores, todos ellos procedentes de una premisa incorrecta subyacente, en vez de errores esporádicos, desconectados y no sistemáticos. No siempre resulta sencillo seguir la línea de pensamiento de los niños y poner de manifiesto cómo es de consistente y sistemático. La mayor parte de los estudios, sin embargo, informan sobre la clasificación de errores y su frecuencia, aunque ésto no explica su origen y por tanto no pueden tratarse sistemáticamente.

Parece que esta carencia de generalidad en los análisis podría evitarse si se mira en los niveles de representación más profundos en los que evoluciona un sistema de significado que controla las realizaciones superficiales. Cuando

³⁰ Nesher P. Obra citada.

se detecta un principio erróneo en este nivel más profundo, es posible explicar no un caso sino toda una clase de errores. Denominamos a una tal regla para la guía de errores una concepción deficiente.

La aplicación de estos principios al estudio de dos tipos de errores detectados en la comparación de números decimales³¹, sirve para poner de manifiesto los esfuerzos de los alumnos por proporcionar sentido conceptual a nuevos conocimientos matemáticos recibidos mediante instrucción en términos de conocimientos previamente dominados; ésto es lo que explica la aparición de los errores. En este estudio, el diseño de una prueba en la que se tienen en cuenta todas las posibles actuaciones de los alumnos en términos de las concepciones deficientes que se hipotetizan, proporciona un modelo para analizar los patrones de error como categorías consistentes, de un modo más detallado y directo que en trabajos anteriores.

Las dificultades que se presentan usualmente para detectar estos errores, debido a que los alumnos pueden obtener buenas calificaciones en pruebas de comparación de decimales (que es el contenido que se estudia), aún cuando se encuentren afectados por algunas de las concepciones deficientes subyacentes, llevan a realizar las siguientes consideraciones de carácter general:

- a) Para hacer el diseño sobre la instrucción relativa a un nuevo conocimiento, no es suficiente con analizar los procedimientos y sus requisitos previos, que es lo que se hace en muchos casos. Debemos conocer cómo este nuevo conocimiento se integra en un gran sistema de significados, que el niño ya posee, y del cual va a derivar sus directrices.
- b) Es crucial conocer específicamente cómo los procedimientos ya conocidos pueden interferir con el material que se está aprendiendo.
- c) Todos los nuevos elementos que se asemejan, pero son distintos de los antiguos, debieran discriminarse claramente en el proceso de

³¹ Resnick L., Nesher P., Leonard F., Magone M., Omanson S., Polet I. (1989). Conceptual bases of Arithmetic Errors: the case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education* Vol 20 págg. 8-27.

instrucción, y el profesor debiera esperar encontrar errores en estos elementos. Es innecesario decir que, aunque produzcan mayor número de respuestas erróneas, tales elementos deben presentarse a los niños, y no tratar de evitarlos.

Otro desarrollo técnico avanzado en el estudio de errores, ya comentado, es el realizado en el campo de la sustracción al aplicar el modelo de los bugs, considerando la metáfora de la mente humana como un ordenador. Maurer³² nos explica los resultados más importantes de esta técnica de análisis. El conocimiento de los tipos de errores de sustracción que cometen los estudiantes es ahora tan detallado que se han escrito programas de inteligencia artificial que cometen los mismos errores que los estudiantes, proporcionando al programa sólo unos cuantos principios básicos. Otros programas sirven para diagnosticar rápidamente qué bugs tiene un estudiante determinado. Otros ayudan a diagnosticar los bugs de los demás mediante un entrenamiento en esta tarea. Practicando las destrezas de búsqueda de bugs, los estudiantes llegan a reconocer que sus propios razonamientos pueden tener bugs. También la teoría sobre la generación de bugs ha empezado a proporcionar ideas sobre las mejores y peores elecciones de ejemplos y sobre los métodos mejores y peores para seleccionar material. Esto era algo que no podía hacer el antiguo conocimiento sobre errores sistemáticos.

En cualquier caso, la investigación actual indica que muchas respuestas a problemas que han sido considerados descuidados son, de hecho, el resultado de concepciones inadecuadas sistemáticas sobre sustracción.

La figura muestra el trabajo de un estudiante con un bug. El bug se refiere a "llevarse" o "pedir prestado", en este caso "llevarse" de 0:

$$\begin{array}{r} a \ 0 \ b \\ - \underline{x \ y \ z} \end{array} \quad \text{donde } z \text{ es mayor que } b$$

³² Maurer S. Obra citada.

El estudiante transforma la sustracción en:

$$(a-1) \ 0 \ (b+10) \qquad (a-1) \ 9 \ (b+10)$$

$$- \ \underline{x \ y \ z} \qquad \text{en vez de:} \qquad - \ \underline{x \ y \ z}$$

Procedimiento que conduce a su vez a una segunda dificultad:

$$0 - y = y \ (\text{una versión}) \qquad 0 - y = 0 \ (\text{otra versión}).$$

No hay nada aleatorio o chapucero en el trabajo del estudiante con bugs como estos. Está trabajando cuidadosamente, siguiendo un procedimiento preciso, aunque incorrecto.

¿Qué explican tales bugs?. Imaginemos que el estudiante comprende el algoritmo de la sustracción de una manera muy mecánica. Lo ve como una mera manipulación columna por columna, excepto si el dígito de arriba de una columna es más pequeño que el de abajo, en cuyo caso se disminuye el dígito c de su izquierda en 1 y se sustituye d por $10 + d$. Imaginemos además que el profesor nunca ha presentado el caso en que c es cero, o que el estudiante estaba distraído cuando el profesor lo hizo. ¿Qué hace el estudiante en un ejemplo en el que c vale cero?. No se evade, sabe que debe dar una respuesta. Así, generaliza imaginando alguna versión del procedimiento que incluye todos los casos previos y también este. En este ejemplo, la idea del estudiante es que el dígito del que se pide prestado no necesita ser el que está inmediatamente a la izquierda, sino que puede ser el dígito no nulo más cercano a la izquierda. De este modo, ante una laguna en el algoritmo, el estudiante hace un "remiendo" incorrectamente, creando un bug. El estudio de tales correcciones se llama "Repair theory".

Si bien los críticos a la Repair theory han puesto de manifiesto las limitaciones de los análisis hechos sobre esta fundamentación, en especial por las características tan específicas que tienen los conocimientos a los que se puede aplicar, que le dan un carácter limitado y restrictivo, no cabe duda que, en su campo, la potencialidad del análisis logrado es bastante completo.

4. Aportaciones a la investigación sobre errores en el aprendizaje de las matemáticas

4.1. Presentación

Nuestros trabajos de investigación en Educación Matemática y nuestros estudios han desarrollado y mantenido unas cuantas líneas de reflexión básicas a lo largo de los años. La preocupación por el diseño y desarrollo del Currículo de Matemáticas es una constante a lo largo de todos nuestros trabajos; también ha sido un motivo de reflexión permanente, al que hemos dedicado muchas horas de esfuerzo y sobre el que hemos realizado algunas contribuciones específicas al tema de la formación inicial y permanente del Profesorado de matemáticas, con especial énfasis en su formación didáctica. En relación con los contenidos de la matemática nos hemos visto especialmente atraídos por los contenidos de la Aritmética, en los primeros niveles; el estudio de los Sistemas numéricos en los niveles intermedios; y hacia los contenidos iniciales de Cálculo, Análisis y Teoría de Números en los niveles superiores. Esto no ha supuesto un abandono de otros contenidos, como los del álgebra, geometría y estadística, pero sí un énfasis y preocupación especiales por números y funciones, en sus diferentes concrecciones y grados de generabilidad.

También hay algunas líneas transversales de reflexión que portan coherencia y unidad a los trabajos e investigaciones realizados. Entre estas líneas tiene para nosotros una importancia especial la cuestión de errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Nuestro interés por este tópico viene de antiguo, desde los comienzos mismos de nuestro trabajo en Didáctica de la Matemática. Constituye para nosotros una preocupación moral mejorar el nivel científico y cultural de nuestra sociedad española de finales del siglo XX; estamos convencidos que la extensión y profundización en el conocimiento matemático por medio del Sistema Educativo constituye un elemento imprescindible de ese avance, y

una condición ineludible para una sociedad más justa, racional, eficaz y productiva que la que hemos recibido. Por todo ello, el conocimiento malogrado, deficiente, mal fundado o erróneo supone una preocupación permanente, un objetivo a batir, una situación que superar.² Desde el comienzo de nuestro trabajo en Didáctica de la Matemática la identificación de errores, el análisis de sus causas, la posibilidad de su diagnóstico y detección y los medios y recursos para su superación han constituido parte esencial del contenido de nuestros trabajos e investigaciones y, sobre todo, de la filosofía personal y de la orientación profesional con la que hemos concebido nuestra tarea.

Queremos presentar en este apartado algunas de las contribuciones realizadas por nosotros al estudio de errores, y queremos hacerlo poniendo en evidencia la línea de progreso que hemos recorrido a lo largo de nuestros trabajos en este campo. Para ello hemos hecho una selección de trabajos en los que destaca algún aspecto o variante de estudio y con los que se pone de manifiesto la progresión realizada en nuestros análisis. En todos los trabajos nuestra participación es a nivel autor o de director del proyecto o de la investigación, si bien la mayor parte de ellos se ha realizado en colaboración con otros profesores. De la mayor parte de las contribuciones que se presentan no se hace una descripción exhaustiva, ya que constan los documentos originales completos, sino que nos limitamos a destacar aquellos aspectos del estudio o investigación que hacen referencia explícita, o conectan de modo especial con los errores del aprendizaje en matemáticas.

Creemos que esta elección responde mejor y da una visión más completa de lo que ha sido una línea de investigación permanente a lo largo de muchos años, en vez de limitarnos a destacar un único trabajo aislado.

4.2. Delimitación de soluciones incorrectas:

Hemos citado anteriormente las cuatro categorías que señala Mulhern, relativas a la variedad de métodos empleados en el estudio de los errores en matemáticas. La primera de ellas incluye todos aquellos estudios que, básicamente delimitan problemas que dan lugar a soluciones incorrectas y contabiliza el número de ellas en cada caso. Se han criticado estos trabajos por su valor diagnóstico limitado, su fundamentación prioritariamente psicométrica, el uso casi exclusivo de pruebas con relación a norma y su empleo indiscriminado en evaluación durante muchos años. La influencia de estos estudios comenzó a decaer en nuestro país a partir de los cambios producidos por la Ley General de Educación del año 70.

Dentro de esta categoría podemos situar la tesina de licenciatura, dirigida a la Profesora Castro³³ el año 75. Las cuestiones a estudiar mediante este trabajo fueron:

1. Conocimiento de los estadios de madurez que permiten el dominio de las diferentes dificultades que se presentan en la realización de problemas simples de cálculo; para ello se trata de establecer escalas ordenadas por rendimiento de los contenidos por edades.

2. Conocimiento de los instrumentos que permiten descubrir el rendimiento de los estudiante o, alternativamente, las combinaciones que producen especiales dificultades de aprendizaje, por mayor acumulación o frecuencia de errores.

Este estudio se realizó mediante un test diagnóstico, el test de Ballard, traducido y adaptado por García Hoz, en el que se hace una presentación pormenorizada de cada una de las fases o niveles específicos de un proceso de cálculo, con un grado considerable de minuciosidad y carácter analítico. El instrumento constaba de 100 cuestiones de Aritmética general: operaciones elementales entre naturales, decimales o fracciones; raíces

³³ Castro Martínez E. (1975). El Cálculo Aritmético en la E.G.B. Tesina de Licenciatura. Granada: Universidad de Granada.

cuadradas; porcentajes y proporcionalidad; cálculo con magnitudes básicas.

Las hipótesis a contrastar fueron: obtener el grado de dificultad y niveles de éxito mediante el instrumento seleccionado y estudiar la habilidad de cálculo según los niveles escolares.

El trabajo se realizó mediante un estudio longitudinal sobre una muestra de 2069 escolares, en los niveles comprendidos entre 3º y 8º de E.G.B., seleccionados intencionalmente en 8 Colegios Nacionales de la provincia de Granada; la prueba se aplicó durante el primer trimestre del curso.

Los resultados mostraron que no había diferencias significativas entre los Centros, por lo que podían considerarse muestras provenientes de la misma población; alternativamente, el instrumento resultó útil para medir el dominio aritmético de los escolares. Sí se obtuvieron diferencias significativas entre parejas consecutivas de niveles; de este modo se pudo establecer a qué edad o nivel se configura la aptitud para diversos problemas y combinaciones de cálculo, que permite valorar el grado de madurez de los alumnos concretos.

En este estudio solo se contabilizaron los errores a cada una de las cuestiones planteadas, sin realizar ningún otro tipo de análisis en relación con dichos errores.

4.3. Clasificar diferentes tipos de error:

El simple recuento de errores, incluso combinado con métodos estadísticos sofisticados, había probado su insuficiencia para hacer aportaciones consistentes a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Por ello, y fundamentalmente a partir de las obras de Tyler y Bloom, se comenzó a trabajar

sistemáticamente en la clasificación y elaboración de taxonomías, no sólo para las conductas ideales previstas para los alumnos, sino también para sus producciones reales; la clasificación de errores en diferentes tipos y el comienzo en los estudios conjeturales sobre posibles causas o factores conducentes al error, fueron una consecuencia obligada de la línea general de trabajo.

Nuestra aportación, como Director e Investigador principal, en esta línea fue la Investigación Granada-Mats^{*}, llevada a cabo entre los años 1971-1982.

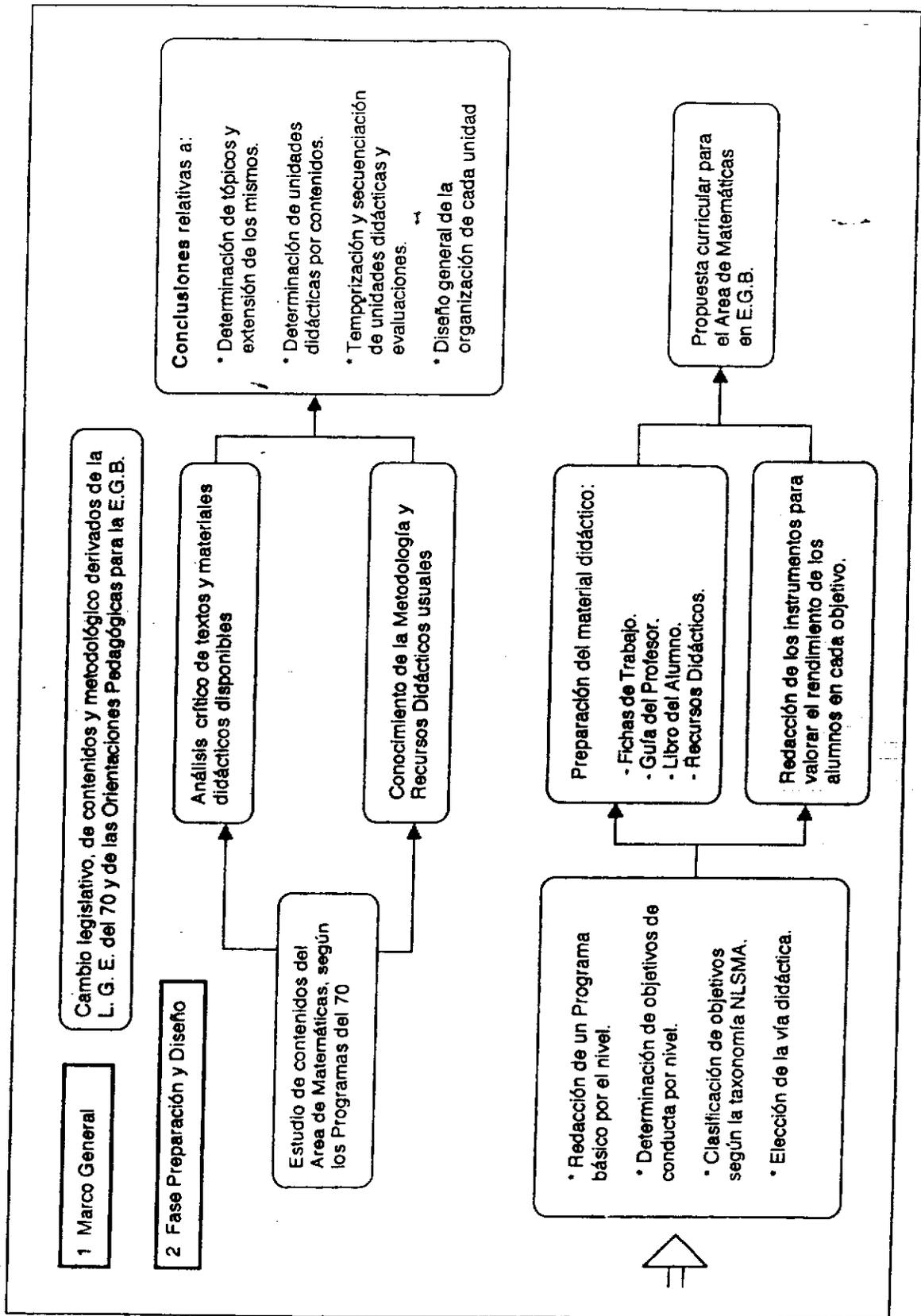
El Diseño y puesta en práctica de este trabajo queda resumido en el siguiente esquema:

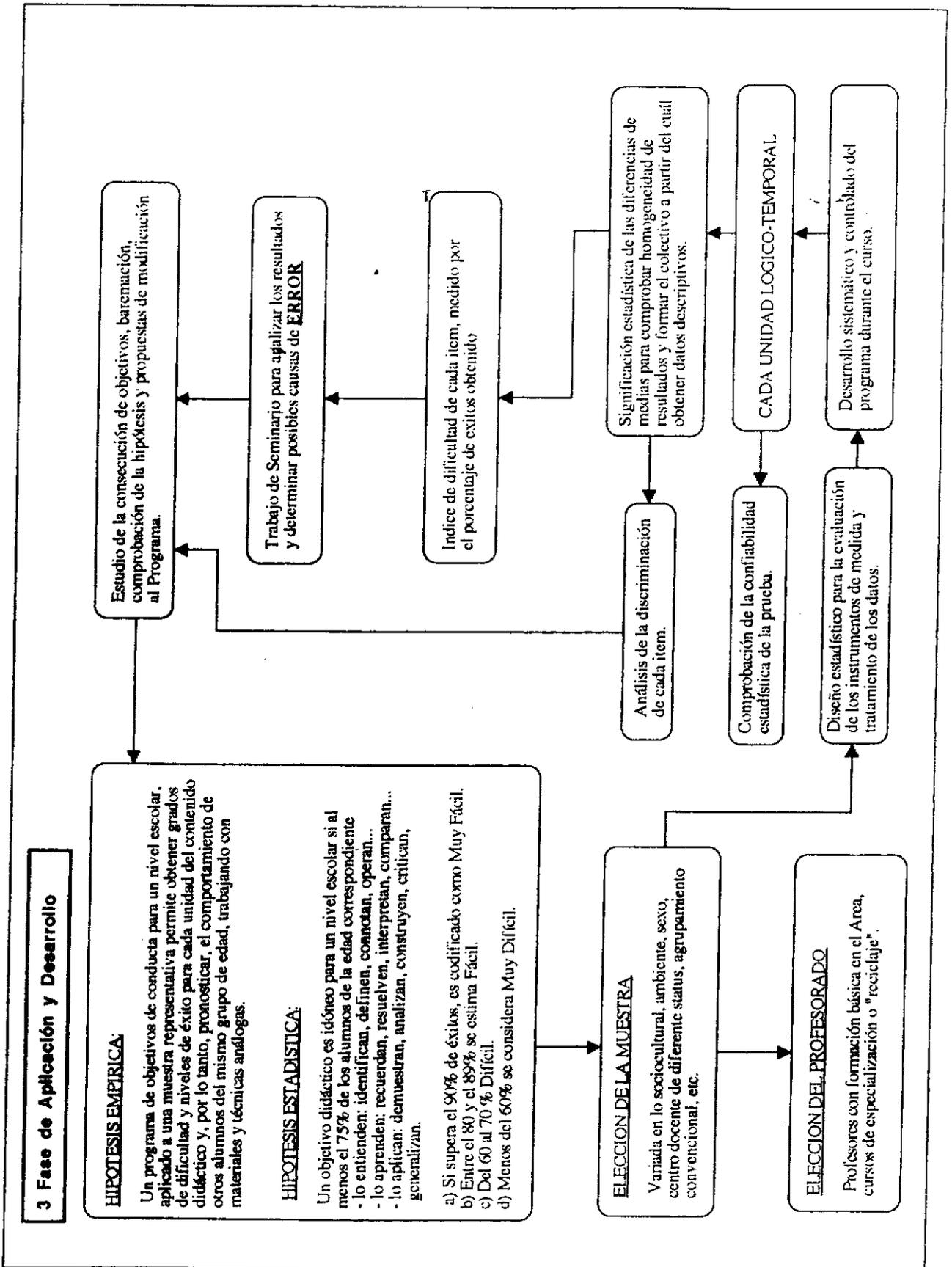
1. Marco general.
2. Fase de Preparación y Diseño.
3. Fase de Aplicación y Desarrollo.
4. Fase de Contraste y Control.
5. Conclusiones.

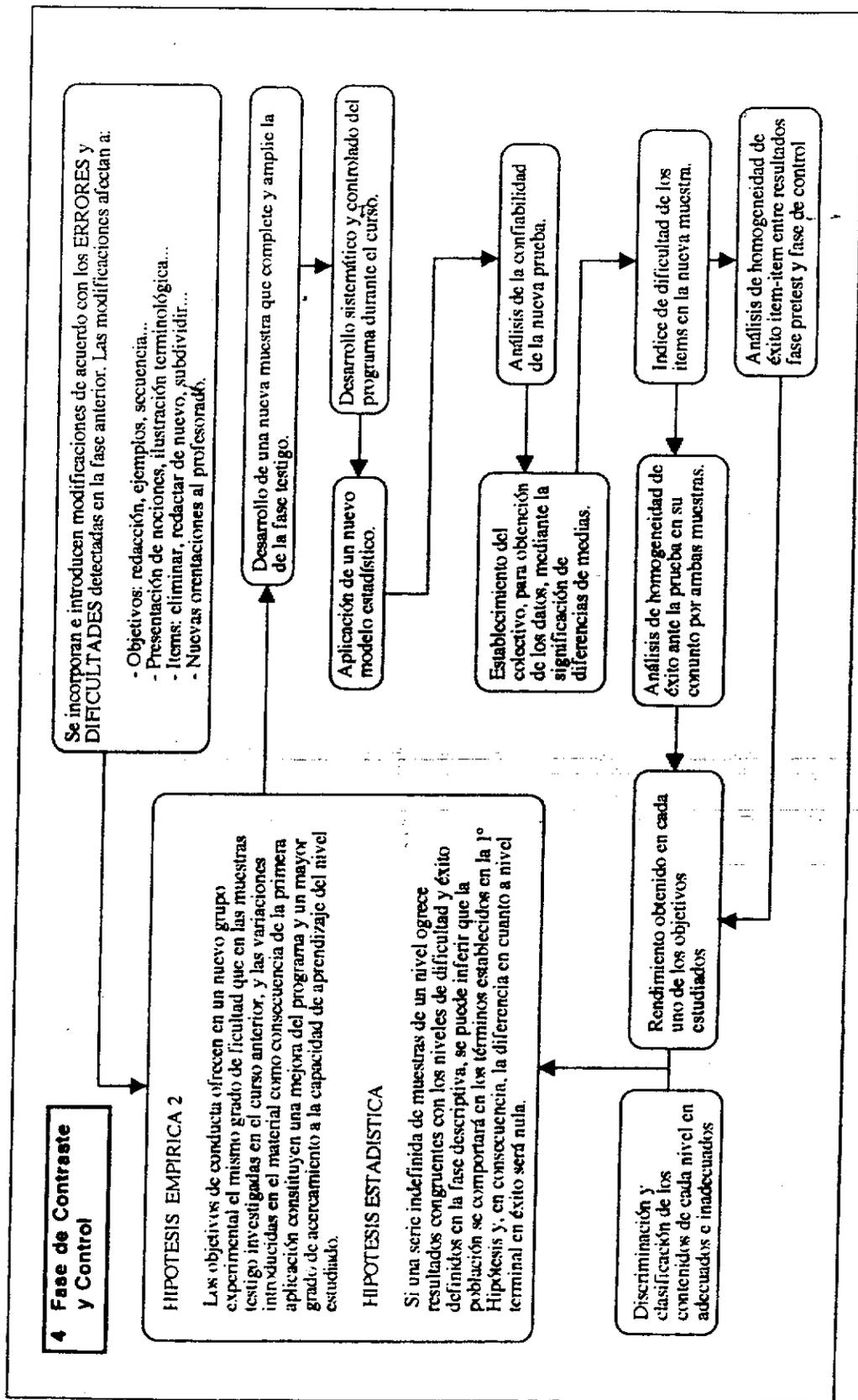
Sintetizando las aportaciones más destacables de este trabajo, en especial por lo que se refiere al estudio de errores, hemos de destacar las siguientes:

- * Operativización de los Programas para el Area de Matemáticas en la E.G.B..
- * Baremación de los objetivos y clasificación de los mismos según su índice de dificultad.
- * Determinación de dificultades y errores usuales según tópicos matemáticos y niveles escolares.
- * Propuestas para la detección y corrección de los errores usuales.
- * Redacción y propuesta de un nuevo Programa de Matemáticas para la E.G.B.

^{*} Rico L. y Col. (1985). Investigación "Granada-Mats". Un análisis del Programa Escolar para el Area de Matemáticas. Granada: Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.







Sin embargo la clasificación de los errores, los medios para su detección y los criterios para su tratamiento y corrección no aparecen tratados explícitamente en el tomo citado que hace la descripción general del trabajo; hay que remitirse a las memorias anuales de investigación en las que se van comentando y analizando los resultados de cada una de las evaluaciones, comparando con resultados anteriores e integrando los informes personales de los profesores encargados de realizar el trabajo de campo.

Un análisis más detallado de los errores, tipos de errores y posibles causas de los mismos lo encontramos en algunos de los trabajos derivados de esta Investigación.

Así podemos verlo en el trabajo *"Programación del bloque de las fracciones en el Ciclo Medio de E.G.B."*,³⁵ en donde se presentan los tipos de errores más frecuentes en la comprensión del concepto de fracción, en sus diversas representaciones y en su operativización. En la comunicación *"Cero, ¿es un número natural?. Análisis de las dificultades de cero"*³⁶ se analizan y clasifican algunos errores de lectura y escritura de números naturales y decimales debidos al cero, así como errores y dificultades en las operaciones, comparando los rendimientos entre los casos en los que interviene el cero con aquellos otros en los que no interviene. Igualmente en los libros del Profesor de los Cursos 3º, 4º y 5º³⁷ y los de los cursos 6º, 7º y 8º³⁸ hay, sistemáticamente, consideraciones en torno a errores y dificultades usuales de los tópicos que se estudian. Todos los datos utilizados en estos trabajos proceden de la Investigación *"Granada Mats"*, y en todos ellos se realiza una tipificación de errores en el aprendizaje de las matemáticas, con un comienzo de clasificación en

³⁵ Rico L. y Col. (1982). Programación del Bloque de Fracciones en el ciclo Medio de la E.G.B. Actas de las II Jornadas sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Sevilla, págg. 612-640.

³⁶ Rico L., Castro E. (1983). Cero ¿es un número natural?. Análisis de las dificultades de Cero. Cádiz: Actas I Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas, págg. 152-161.

³⁷ Rico L. y Col. (1982). Guía del Profesor, Matemáticas 3º, 4º y 5º E.G.B. Madrid: Edt. Anaya.

³⁸ Rico L. y Col. (1985). Guía del Profesor, Matemáticas 6º, 7º y 8º E.G.B. Madrid: Edt. Anaya.

términos de causas estructurales, si bien las consideraciones en términos de rendimiento tienen aún una valoración prioritaria.

4.4. Análisis de patrones de error

A mediados de los años 80 se constituye el Seminario E.G.B. de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, en el marco del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Este Seminario está compuesto por Profesores del Tercer Ciclo de E.G.B. y Profesores del Departamento, principalmente. Desde su comienzo se plantea como objetivo realizar el estudio e investigación del Currículo de Matemáticas de los cursos finales de la E.G.B. desde la aproximación denominada Resolución de Problemas, que hemos descrito en el Proyecto. Una de las características de esta aproximación es su insistencia en el valor de los procedimientos y estrategias; por un lado se conecta con el énfasis en la creatividad, invención y prueba, etc. La intervención de los alumnos en el enunciado y selección de los problemas, el trabajo en equipo, la discusión y resolución en grupo, la crítica a las diversas interpretaciones y soluciones obtenidas, la verificación de los resultados, son todas ellas, características de una metodología dirigida de modo especial al estímulo y desarrollo de habilidades metacognitivas.

Una de las dimensiones del campo de resolución de problemas a la que dedicamos, y seguimos dedicando, una atención especial es el estudio de variables. Entre las clasificaciones usuales de variables en los estudios sobre resolución de problemas una de las más fecundas es la de Kilpatrick,³⁹ que establece tres grandes categorías: variables del sujeto, variables de la tarea y variables de la situación. Las variables de la tarea son las que están asociadas con la naturaleza del problema, que Kilpatrick clasifica en variables de contexto, estructura y variables de formato.

³⁹ Kilpatrick J. (1978). Variables and Methodologies in Research on Problem Solving, en Hatfield L. & Brandbard D. (Edts.) Mathematical problem solving: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric-Smeac.

Durante los siete últimos años el Seminario de Profesores de la SAEM Thales ha trabajado sobre las dificultades metodológicas para llevar a cabo una orientación del Currículo de la E.G.B. sobre Resolución de Problemas y una de las líneas más fructíferas de investigación ha sido la dedicada al estudio de las variables de tarea en los problemas del Tercer Ciclo. Al seleccionar variables estructurales y estudiar el comportamiento de los alumnos ante las diferentes tareas que surgen de delimitar unas pocas variables, encontramos que las producciones de los alumnos se ajustan a unos determinados patrones, correctos unos e incorrectos otros, cuyo estudio y análisis nos permiten establecer las claves interpretativas de las estrategias utilizadas por los alumnos.

Son varias las aportaciones realizadas por nosotros en este campo, que presentamos en las II Jornadas Andaluzas sobre Didáctica de las Matemáticas, Almería 1985; III Jornadas Andaluzas sobre Didáctica de las Matemáticas, Huelva 1987; II Congreso Internacional de Investigación en Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas, Valencia 1987; IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática, Benalmádena (Málaga) 1989.

Sobre esta línea de investigación vamos a singularizar tres aportaciones. En primer lugar, el trabajo "*La relación verbo-operación en la resolución de problemas aritméticos*"⁴⁰. El objetivo de este trabajo consistía en clasificar los verbos usuales de los problemas aritméticos atendiendo a la operación aritmética que subyace en cada caso o que, simplemente, viene evocada por la acción que expresa el verbo. La cuestión que se plantea es: ¿depende la resolución de un problema del verbo que expresa la acción en el enunciado? o, dicho de otro modo: ¿actúan los verbos como distractores -generadores de error- en los problemas aritméticos?

⁴⁰ González E., Gutiérrez J., Rico L., Tortosa A. (1985). La relación verbo-operación en la resolución de problemas aritméticos del Tercer Ciclo de E.G.B. Actas II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas. Almería, págg. 258-267.

La experiencia que se realizó consistió en clasificar una lista de verbos de acuerdo con la operación más adecuada y enunciar problemas con los verbos elegidos por cada operación; localizar nuevos verbos para cada una de las operaciones y, finalmente, seleccionar verbos igualmente adecuados para dos operaciones. Este trabajo se realizó sobre una muestra de 192 alumnos de 6º de E.G.B. de Granada. Las conclusiones obtenidas, básicamente, fueron: los alumnos tienen un patrón gramatical básico de enunciado de problemas aritméticos; hay dificultades y falta de dominio del vocabulario para enunciar problemas con determinados verbos; se reconoce una prioridad de determinados verbos como adecuados para expresar ciertas operaciones y de otros como inadecuados; esto permite una clasificación general de los verbos según la operación que evocan; finalmente, es importante la comprensión del verbo para resolver un problema.

Un segundo trabajo, de carácter más general, es la memoria denominada "*Didáctica activa para la resolución de problemas*" ⁴¹. De este trabajo queremos destacar la aportación que hicimos a la determinación de las variables que, teóricamente, pudiesen tener influencia señalada y contrastable en las actuaciones y producciones de los alumnos.

A partir de algunas de esas variables propusimos una serie de tareas mediante las que elaboramos unas pruebas de control. Estas pruebas se utilizaron para estudiar experimentalmente el rendimiento producido por nuestra propuesta metodológica, en comparación con un tratamiento convencional.

El anterior estudio lo completamos con un estudio de casos en el que analizamos los procesos de resolución individual de problemas aritméticos, teniendo en cuenta la estructura semántica, el tipo de sentencia y otras variables de contexto; clasificamos y analizamos los errores de los alumnos en este proceso de resolución; comparamos los procesos de resolución

⁴¹ Rico L. (Director) (1988). *Didáctica Activa para la Resolución de Problemas*. Granada: Universidad de Granada.

individual de un mismo problema con respecto a un modelo teórico-cognitivo. El análisis del proceso de resolución de los problemas seguido por los alumnos en este estudio nos llevó a considerar que los errores formaban parte del proceso; que éstos errores se ajustaban a unas pautas; y que, como colofón, había que implementar las estrategias de los alumnos para la detección y superación de errores.

Un último trabajo a comentar es "*Choice of Structure and Interpretation of Relation in Multiplicative Compare Problems*"⁴², recientemente presentado en el XVI PME. En este trabajo se analizan y clasifican los errores cometidos por alumnos de 10 y 11 años, en la resolución de problemas multiplicativos de comparación, como fase previa para conjeturar las causas que producen esos errores.

4.5. Diseño de experimentos predictivos de errores, pruebas de diagnóstico y propuestas para la superación de los errores

Nos referimos en este caso a los estudios e investigaciones que se vienen desarrollando al utilizar el potencial didáctico de los errores cometidos por los alumnos en toda su amplitud. Como hemos visto en el apartado anterior de revisión de investigaciones, se trata de un campo de trabajo en desarrollo actualmente.

Una primera aportación en esta línea de trabajo fue la tesina realizada por Francisca Molina "*Propuesta de Innovación Curricular sobre Análisis Numérico en el Bachillerato*"⁴³. En este trabajo presentamos un estudio de casos realizado con tres alumnos de primero de Bachiller a los que propusimos la realización de una serie de tareas numéricas; las dos primeras había que realizarlas en interacción con un ordenador y consistían

⁴² Castro E., Rico L., Castro E. (1992). *Choice of Structure and Interpretation of Relation in Multiplicative Compare Problems*. New Hampshire. Proceedings XVI Annual Conference of the International Group of PME.

⁴³ Molina F. (1989). *Propuesta de Innovación Curricular sobre Análisis Numérico en el Bachillerato*. Tesina de Licenciatura. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

en obtener la aproximación con 10 dígitos de una raíz irracional de una ecuación de tercer grado, y obtener la solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas mediante operaciones entre las ecuaciones del sistema, respectivamente. La tercera actividad consistía en obtener una aproximación de la superficie de una figura irregular. Las realizaciones de los alumnos nos permitieron poner de manifiesto pautas de actuación no sospechadas, detectar errores conceptuales, observar procedimientos alternativos y estrategias de actuación sobre los mismos.

Este trabajo nos ha abierto la posibilidad de realizar un estudio más en profundidad en el que, proponiendo problemas numéricos a los alumnos, se puedan poner de manifiesto los errores usuales, las causas que los producen y los modos más convenientes para su corrección y superación.

En los Proyectos de Tesis Doctoral actualmente en curso el análisis de errores desempeña un papel esencial. El trabajo del Prof. González Mari "*Pensamiento numérico relativo. Análisis de errores en tareas de traducción-interacción entre sistemas de representación*" tiene como uno de sus elementos fundamentales el análisis de patrones de error, causas de los errores y superación de los mismos en el campo de los números enteros.

El trabajo de la Profesora E. Castro "*Los números figurados como modelos intuitivos*" estudia como una dimensión clave para la comprensión de los números naturales y de las relaciones numéricas los problemas de representación gráfica y de manipulación de imágenes visuales, en el sentido señalado por Radatz como segunda categoría dentro de la clasificación de causas para los errores que realiza.

El trabajo del Profesor E. Castro "*Niveles de comprensión en Problemas Verbales de Comparación multiplicativa*" está utilizando el análisis de patrones de error y la entrevista clínica para presentar tareas que puedan provocar determinados errores en los individuos. Establecer

las concepciones deficientes que tienen los escolares sobre problemas de comparación multiplicativa, proponer pruebas que diagnostiquen los diferentes tipos de resolutores según los errores que cometan y, finalmente, señalar técnicas correctivas es uno de los objetivos principales de este estudio.

4.6. Conclusión

El campo de estudio sobre errores en el aprendizaje de las matemáticas escolares hemos visto que se viene desarrollando y definiendo de manera crecientemente productiva durante los últimos años. Su interés para la mejora en la comprensión y conocimiento de los alumnos, así como para una realización eficaz de las tareas docentes, es indudable. Creemos que, en los próximos años, asistiremos a un mayor desarrollo de estos estudios al avanzar en la comprensión teórica y en sus implementaciones prácticas. Para nosotros constituye un campo de interés permanente en el que pensamos continuar desarrollando una parte considerable de nuestras investigaciones en el Area.

Bibliografía:

Artigue M. (1989). Epistemologie et Didactique. Institut de Recherche pour l'enseignement des Mathematiques. París: University Paris VII.

Bachelard G. (1978). La filosofía del no. Buenos Aires: Amorrortu.

Bachelard G. (1988). La formación del espíritu científico. Mexico: Siglo XXI.

Baruk S. (1985). L' age du capitaine. De l'erreur en mathématiques. Paris: Editions du Seuil.

Bell A. (1986). Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas.

Blando J., Kelly A., Schneider B., Sleeman D. (1989). Analyzing and modeling Arithmetic Errors. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 20, págg. 301-308.

Booth L. (1984). Algebra: Children's strategies and errors. Windsor: NFER-Nelson.

Borassi R. (1986). Algebraic Explorations of the Error $16/64 = 1/4$ Mathematics Teacher. Vol. 79, págg. 246-248.

Borassi R. (1987). Exploring Mathematics Through the Analysis of Errors. For the learning of Mathematics. Vol 7 págg. 2-9.

Bordón, Revista de la Sociedad Española de Pedagogía (1953). Tomo V, nº35.

Bouvier A. (1987). The righth to make mistakes. For the Learning of

Mathematics. Vol. 7 págg. 17-25.

Brekke G. (1991). Multiplicative Structures at ages seven to eleven. Studies of children's conceptual development, and diagnostic teaching experiments. Thesis for the Ph. D. degree. Nottingham: University of Nottingham.

Brousseau G., Davis R., Werner T. (1986). Observing Students at work, en Chistiansen B., Howson G., Otte M. (Edts): Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Brown J., Burton R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematics skills. Cognitive Science 2, págg. 155-192.

Brown J., Vanlehn K. (1982). Towards a generative Theory of "Bugs", en Carpenter T., Moser J., Romberg T., (Edt.s). Addition and Subtraction Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Brownell W. (1941). Arithmetic in grades I y II. A critical summary of new and previously research. Durham: Duke University Press.

Brueckner L., Bond G. (1984). Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje. Madrid: Rialp.

Buswell G., Judd C. (1925). Summary of Educational Investigations Relating to Arithmetic. Chicago: University of Chicago.

Castro Martínez E. (1975). El Cálculo Aritmético en la E.G.B. Tesina de Licenciatura. Granada: Universidad de Granada.

Castro E., Rico L., Castro E. (1992). Choice of Structure and Interpretation of Relation in Multiplicative Compare Problems. New Hampshire. Proceedings XVI Annual Conference of the International Group

of PME.

Cebulski L., Bucher B. (1986). Identification and remediation of children's subtraction errors: a comparison of practical approaches. *Journal of School Psychology*. Vol. 24, págg. 163-180.

Centeno J. (1988). *Números decimales*. Madrid: Síntesis.

Clements M. A. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 11, págg. 1-21.

Cochran W., Cox G. (1990). *Diseños Experimentales*. México: Trillas.

Davis R. (1984). *Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Australia: Croom Helm.

Fischbein E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

González E., Gutiérrez J., Rico L., Tortosa A. (1985). La relación verbo-operación en la resolución de problemas aritméticos del Tercer Ciclo de E.G.B. *Actas II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas*. Almería, págg. 258-267.

Graeber A., Baker K. (1991). Curriculum materials and Misconceptions concerning Multiplication and Division. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Vol. 13, págg. 25-37.

Graeber A., Tirosh D., Glover R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 20, págg. 95-102.

Hart K. (1981). Children's understanding of Mathematics 11-16. Londres: J. Murray.

Hart K. (1984). Ratio: Children's strategies and errors. Windsor: NFER-Nelson.

Janvier C. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Kerslake D. (1986). Fractions: Children's strategies and errors. Windsor: NFER-Nelson.

Kilpatrick J. (1978). Variables and Methodologies in Research on Problem Solving, en Hatfield L. & Brandbard D. (Edts.) Mathematical problem solving: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric-Smeac.

Kilpatrick J. (1991). A history of Research in Mathematics Education, en Grows D. (Edts.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan.

Lakatos I. (1978). Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Madrid: Alianza Universidad.

Lewis A., Mayer R. (1987). Students' miscomprehension of Relational Statements in Arithmetic word Problems. Journal of Educational Psychology. Vol. 79, págg. 363-371.

Maurer S. (1987). New knowledge about errors and New views about learners: What they mean to educators and more educators would like to know, en Schoenfeld A. (Edt.) Cognitive Science and Mathematics Education Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Mevarech Z. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 14, págg. 415-429.

Molina F. (1989). Propuesta de Innovación Curricular sobre Análisis Numérico en el Bachillerato. Tesina de Licenciatura. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Movshovitz-Hadar N., Inbar S., Zaslavsky O. (1986). Students' distortions of Theorems. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Vol. 8, págg. 49-57.

Movshovitz-Hadar N., Inbar S., Zaslavsky O. (1987). Sometimes Students'. Errors are our fault. *Mathematics Teacher*. Vol. 80, págg. 191-194.

Movshovitz-Hadar N., Zaslavsky O., Inbar S. (1987). An empirical classification model for errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. vol. 18, págg. 3-14.

Mulhern G. (1989). Between the ears: making inferences about internal processes, en Greer B. & Mulhern G. (Edts.) *New Directions in Mathematics Education*. Londres: Routledge.

Nesher P. (1987). Toward an Instructional Theory: the Role of Students' Misconceptions. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 7, págg. 33-39.

Pinchback C. (1991). Types of Errors Exhibited in a Remedial Mathematics Course. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Vol. 13, págg. 53-62.

Popper K. (1979). El desarrollo del conocimiento científico. México: Siglo XXI.

Radatz H. (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 9, págg. 163-172.

Radatz H. (1980). Students' Errors in the Mathematics Learning Process: a Survey. For the Learning of Mathematics. Vol. 1, págg. 16-20.

Resnik L., Nesher P., Leonard F. Magone M., Omanson S., Pelet I. (1989). Conceptual bases of Arithmetic Errors: the case of Decimal fractions. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 20, págg. 8-27.

Rico L. y Col. (1982). Programación del Bloque de Fracciones en el ciclo Medio de la E.G.B. Actas de las II Jornadas sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Sevilla, págg. 612-640.

Rico L. y Col. (1982). Guía del Profesor, Matemáticas 3º, 4º y 5º E.G.B. Madrid: Edt. Anaya.

Rico L., Castro E. (1983). Cero ¿es un número natural?. Análisis de las dificultades de Cero. Cádiz: Actas I Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas, págg. 152-161.

Rico L. y Col. (1985). Guía del Profesor, Matemáticas 6º, 7º y 8º E.G.B. Madrid: Edt. Anaya.

Rico L. y Col. (1985). Investigación "Granada-Mats". Un análisis del Programa Escolar para el Area de Matemáticas. Granada: Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

Rico L. (Director) (1988). Didáctica Activa para la Resolución de Problemas. Granada: Universidad de Granada.

Romberg T. (1989). Evaluation: a coat of many colours, en Robitaille D. (Edt.): Evaluation and Assessment in Mathematics Education. París: Unesco.

Sierpinska A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. For the Learning of Mathematics. Vol. 10, págg. 24-36.

Tall D. (1991). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thorndike R., Hagen E. (1989). Medición y Evaluación en Psicología y Educación. México: Trillas.

Tirosh D., Graeber A. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. Educational Studies in Mathematics. Vol. 20, págg. 79-96.

Tirosh D., Graeber A. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 21, págg. 98-108.

Wollman W. (1983). Determining the Sources of Error in a translation from sentence to equation. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 14, págg. 169-181.