NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 103, marzo de 2020, páginas 29-47

El estudio de las "funciones definidas a trozos": modelizando el circuito del alcohol en el cuerpo humano con estudiantes de la escuela secundaria

María de los Ángeles Fanaro
(Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Argentina)

María Andrea Almaro
(Escuela de Educación Técnica Nº2 - Tandil, Argentina)

Fecha de recepción: 30 de mayo de 2019
Fecha de aceptación: 26 de noviembre de 2019

Resumen

En este trabajo se presenta la descripción de la implementación de una Actividad de Estudio e Investigación en un curso de una escuela secundaria argentina en el contexto del circuito del alcohol en el cuerpo humano, de cuyo estudio emergió la noción de "funciones definidas a trozos". La descripción se centra en las preguntas formuladas y las respuestas construidas por los estudiantes, destacando las nociones matemáticas que este proceso permitió construir. La cuestión generatriz del estudio fue *¿Cómo la Matemática nos permite modelizar el circuito del alcohol en el cuerpo humano*?, ya que esta temática constituye una problemática social muy actual, que afecta de manera marcada a los adolescentes. Con esta actividad, los estudiantes lograron reencontrar nociones matemáticas relativas a función lineal (antes estudiadas), y abordar las funciones lineales definidas a trozos.

Palabras clave

Funciones lineales definidas a trozos; circuito del alcohol, Actividad de Estudio e Investigación

Title

The study of the piecewise function: modeling the alcohol circuit in the human body with high school students

Abstract

The aim of this paper is to describe the implementation of a Study and Research Activity in a course of an Argentine secondary school in the context of the study of alcohol circuit in the human body. From this process the students got the notions about the piecewise functions. The description focuses on the questions raised and the answers constructed by the students, highlighting the mathematical notions that this process allowed to build. The main question of the study was: How does Mathematic allow us to model the alcohol circuit in the human body? since this topic constitutes a very current social issue, which is very close to the teenager's problems. With this activity, the students managed to review some mathematical notions related to linear function (previously studied), and address the linear piecewise functions, which were new for them.

Keywords

Lineal piecewise functions; alcohol circuit; Study and Research Activity

Sociedad Canaria *Isaac Newton*
de Profesores de Matemáticas

1. Introducción

En Matemática se admite que las funciones a trozos están definidas mediante varias expresiones algebraicas, actuando cada una de ellas en un intervalo diferente. Se puede establecer que una función definida a trozos en los intervalos disjuntos $I_1, I_2, \ldots, I_k$, es una función de la forma

$$f: I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & si\ x \epsilon I_1 \\ f_2(x), & si\ x \epsilon I_2 \\ & \ldots \\ f_k(x), & si\ x \epsilon I_k \end{cases}$$

donde $f_1: I_1 \to \mathbb{R}$, $f_2: I_2 \to \mathbb{R}$, …, $f_k: I_k \to \mathbb{R}$ son funciones obtenidas por operación o composición de funciones elementales. Con esta definición se supone que cada una de las funciones f_k está definida en todos los puntos del intervalo I_k. El dominio de una función definida a trozos será por tanto la unión de los intervalos I_1, I_2 y I_k. Usualmente se dice que un punto x_0 es un punto de cambio de definición cuando dicho punto es el extremo final de uno de los intervalos I_k y al mismo tiempo el extremo inicial del siguiente intervalo. Justo en esos puntos se produce un cambio en la función algebraica para la función de manera que a la izquierda del punto tenemos una expresión algebraica, y a la derecha otra distinta. El estudio de los puntos de cambio de definición es esencial para analizar las propiedades de una función definida a trozos. Las funciones a trozos, como todas las funciones matemáticas, son esenciales para la modelización, y en este caso se destaca su potencial para el estudio de la continuidad de funciones.

Se encontraron pocos estudios de investigación acerca de la enseñanza de las funciones definidas a trozos en la escuela secundaria, pero por ejemplo se puede citar el trabajo de Leguizamón y Caidedo (1999) donde las autoras se centran en el aspecto algebraico de las funciones a trozos, exponiendo una estrategia didáctica para ayudar en la comprensión y manipulación de este tipo de funciones, enfatizando el carácter activo de toda función, aunque lo hacen sin utilizarlas para modelizar situaciones. También Vernaza y Tapia (2013) proponen la enseñanza de la función por tramos usando el periódico y el software libre GeoGebra. En ese trabajo, parten de los diferentes registros de representación semiótica de las funciones definidas a trozos, al integrar el periódico y GeoGebra como contextos matemáticos para el diseño e implementación de una secuencia didáctica. Por otra parte, el trabajo de Tesis de Maestría de Caro Acevedo (2013) presenta una propuesta de enseñanza sobre la modelación de funciones por tramos en el último año de la escuela secundaria colombiana, desde el marco del aprendizaje significativo. En esta última propuesta se buscaba que cuando los estudiantes se encontraran un problema de funciones donde se le presentaban condiciones, identificaran el modelo que representa el problema como una expresión algebraica, siguiendo los pasos propuestos por George Pólya para solucionar problemas (comprender el problema, pensar en un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás). Los resultados de las pruebas con los estudiantes se compararon estadísticamente, mostrando así la pertinencia de las actividades implementadas. A nivel universitario, estudios como los de Gatica et al. (2010) dan cuenta de la relevancia del estudio de las funciones definidas a trozos para la comprensión del concepto de continuidad de funciones. Mediante un estudio exploratorio y descriptivo, los autores detallan las dificultades que presentan alumnos universitarios de Ciencias Económicas ante la tarea de determinar la continuidad de una función, cuando ésta se encuentra definida a trozos.

En la educación secundaria argentina, se propone enseñar las funciones definidas a trozos en los documentos curriculares correspondientes al cuarto año (antepenúltimo año de la escuela secundaria) en el contexto del eje "Algebra y estudio de funciones". Allí, luego de la presentación del concepto de función y la presentación de algunos ejemplos se expresa que "*En el caso de trabajar con funciones que modelizan problemas, se debe distinguir entre el dominio natural (matemático de la fórmula) y el dominio propio de la situación que modeliza. Es conveniente proponer la discusión sobre funciones con dominio discreto y también funciones definidas a trozos*" (Diseño curricular para la educación secundaria. Matemática ciclo superior. 4to. Año, 2010, pág. 20). Es decir, se percibe que no se hace énfasis en las funciones definidas a trozos, ni se proponen orientaciones para su tratamiento escolar. Sin embargo, estas funciones son sumamente importantes para la modelización: la población de una cierta ciudad en la función del tiempo, el costo de un viaje en taxi como función de la distancia recorrida, el consumo de electricidad en un mes, etc. pueden ser estudiadas con las funciones definidas a trozos. En particular, gran cantidad de fenómenos admiten una modelación local por medio de una función lineal (Hitt, 2002, p.89).

El rol de la modelización en la enseñanza de las matemáticas constituye actualmente una de las cuestiones primordiales en la investigación en Educación Matemática y en la formación inicial de profesores (véase por ejemplo el trabajo de Huincahué et al., 2018). Desde un punto de vista general es posible aceptar que un modelo matemático constituye un conjunto de relaciones funcionales que permiten describir las características de un sistema o proceso real en términos matemáticos. Entonces, la modelización matemática resulta fundamental para la enseñanza, dado su potencial para describir situaciones y fenómenos tanto de la vida cotidiana como de nivel más abstracto y complejo. Tal como señala Hitt (1996) los conceptos matemáticos surgen en ciertos contextos, y el proceso de formalización de la matemática los descontextualiza. Así una de las tareas del profesor es la recontextualización de los contenidos matemáticos que se encuentran en los libros de texto, para su presentación en el aula; otra tarea es la de repersonalizar los problemas tratados; en otras palabras, el profesor *intenta que el alumno tome como suyo el problema.* (Op. cit, p. 258).

Por lo tanto, el propósito de este trabajo es indagar la potencialidad de enseñar las funciones definidas a trozos en la escuela secundaria, desde un contexto que permita a los estudiantes estudiar estas funciones con sentido, es decir apreciando su utilidad. Para conseguir esto, se debe atender al potencial de estas funciones como modeladora de situaciones, lo cual refuerza su razón de ser en el contexto escolar.

2. Marco teórico

Este trabajo, a diferencia de las investigaciones antes referenciadas, se aborda desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la cual sitúa la actividad matemática y, en consecuencia, la actividad del estudio en matemática, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales (Chevallard, 1999). Esta teoría plantea una redefinición del modelo de enseñanza tradicional y de la pedagogía dominante en la cual la matemática se presenta como un conjunto de saberes terminados y cerrados, incuestionables, a las que a lo sumo se puede visitar, produciéndose un fenómeno que se denomina *monumentalización* del saber (Chevallard 2006, 2013).

Como consecuencia de este paradigma tradicional, aplicacionista y monumentalista, se produce el fenómeno denominado: "pérdida de sentido" de las cuestiones matemáticas que se estudian o se proponen explícita o implícitamente en una institución. Para enfrentar estos fenómenos la TAD propone la utilización de varios dispositivos, entre ellos, las Actividades de Estudio e Investigación (AEI). Las AEI plantean una cuestión generatriz Q cuyo estudio produzca la elaboración de una respuesta que no es inmediata, sino que requiere un proceso de "estudio e investigación" y en este proceso se encuentran o reencuentran determinados saberes matemáticos, previamente determinados y conocidos de antemano por la institución escolar.

Con esta base, ya se han realizado varias investigaciones diseñando e implementado distintas AEI, como por ejemplo las de Llanos, Otero y Gazzola (2011); Marin (2012); Farías (2015); Berenguel (2017), Corica (2016), Corica y Marín (2014), Bonacina, Teti, Haidar, Bortolato y Philippe (2014) Fonseca, Gascón y Oliveira (2014), entre otros trabajos de esa misma línea, con resultados alentadores para la enseñanza de la Matemática.

Este trabajo es parte de un trabajo más amplio donde se diseñó una AEI con el foco en la modelización del circuito del alcohol en el cuerpo humano cuya pregunta generatriz fue Q_0: *¿Cómo la Matemática nos permite modelizar el circuito del alcohol en el cuerpo humano?* Se buscaba promover en los estudiantes una actividad matemática que se acerque en la medida de lo posible, a la actividad matemática genuina: explorar, conjeturar, formular preguntas, debatir, crear nuevos problemas, etc. De esta manera se pretende que los estudiantes logren concebir a la matemática como un saber funcional, útil y a la actividad matemática mucho más que la resolución de problemas: se trata de formular y responder preguntas, desarrollar diferentes técnicas, realizar conjeturas, validar soluciones, interactuar con otros miembros del grupo de estudio, cotejar resultados, técnicas, validaciones, etc. Aquí cobra relevancia la idea de Chevallard (2017) acerca de que el saber matemático resulte “útil” en el sentido de la necesidad que tiene la sociedad de conocimientos matemáticos. Dicho de otra manera, los estudiantes podrían sacar provecho de una difusión más amplia de conocimientos matemáticos, más apropiados a sus necesidades, ya que no se trata de un público especializado en Matemática (futuros matemáticos o ingenieros) sino de estudiantes que están siendo formados en una amplia gama de disciplinas. Por su parte, esto tiene la ventaja de ofrecer la posibilidad de revocar la aversión común por la matemática, aceptándola como una construcción beneficiosa a la hora de resolver problemas cotidianos.

La TAD permite caracterizar la modelación en términos de praxeologías y sus relaciones (García, Gascón, Ruiz-Higueras y Bosch, 2006), entendiéndolas como la integración de dos bloques: el técnico-práctico con el tecnológico teórico. El primero, es relativo al saber-hacer (compuesto por una tarea y una técnica que representa una determinada manera de realizar un tipo de tareas), mientras que el segundo implica una tecnología que justifica racionalmente la técnica; y una teoría (enunciados abstractos que justifican el discurso tecnológico). Precisamente los trabajos de García (2005) y Barquero, Bosch y Gascón (2011), proponen la modelación matemática como procesos de reconstrucción y articulación de las praxeologías de complejidad creciente. Estas praxeologías se refieren tanto a varios tipos de tareas matemáticas cuya realización requiere técnicas matemáticas que, a su vez, se justifican en tecnologías y teorías matemáticas específicas (organizaciones matemáticas) como a la manera de organizar el estudio matemático que se lleva a cabo en una institución (organización didáctica).

Aunque la caracterización que ofrece la TAD para el trabajo con los modelos se presenta muy rica e interesante, en este trabajo sólo se presenta la AEI, para mostrar cómo partiendo de un problema que plantea una realidad cercana al entorno de los estudiantes (adolescentes en este caso) y que les permita involucrarse, genera una construcción de saberes matemáticos muy valiosa. Algunos de estos saberes ya fueron estudiados en otros años, pero ahora resultan resignificados porque tienen su sentido propio para esta situación, pero también se encontraron con saberes nuevos, relativos a las funciones definidas a trozos, propias de este año escolar. Se describe entonces el proceso de estudio e investigación, presentando las cuestiones y conjeturas planteadas por los estudiantes, las construcciones principales, y los saberes matemáticos que fueron puestos en juego.

3. Metodología

La investigación es de tipo cualitativa, buscamos describir el proceso de implementación de la AEI en un curso de una escuela secundaria de la ciudad de Tandil (Argentina) en términos de las preguntas que la actividad propuesta inicialmente permitió plantear, y las nociones que los estudiantes lograron construir en el proceso de resolverla. La AEI tiene como pregunta generatriz:

Q_0: ¿Cómo la Matemática nos permite modelizar el circuito del alcohol en el cuerpo humano?

Aunque su planteo se realizó en el contexto de un problema potencialmente real para los estudiantes, como se muestra en la siguiente sección. Se seleccionó la temática del consumo de alcohol dado que se consideró que constituye una problemática actual entre los adolescentes. El consumo de alcohol muchas veces se realiza desconociendo sus consecuencias: tanto secuelas irreversibles en el organismo, o de adicción al alcohol, hasta la responsabilidad de producción de un accidente en la vía a pública que puede terminar con la vida misma de quien lo consume y de otras personas ajenas a la situación.

La implementación se llevó a cabo en un curso de quinto año del nivel superior de una escuela secundaria técnica con orientación en Química, integrado por 17 estudiantes de edades entre 16 y 17 años, donde una de las investigadoras es docente de esa institución. El curso fue seleccionado intencionalmente porque se buscaba que la profesora fuera la que implementara la AEI que habíamos diseñado previamente, evitando así la variable profesor en el análisis. Se seleccionó la modalidad de Química, entre otras modalidades que ofrece la institución, debido a que se considera que los estudiantes tienen una formación afín a la temática a tratar, en lo referido a la composición química del alcohol, etc.

Durante la implementación de la AEI, que empleó 15 clases de dos horas reloj, el grupo se organizó en sub grupos, de entre 4 y 6 integrantes cada uno, para así favorecer la interacción entre los estudiantes. Las clases se desarrollaron en el aula cotidiana, si bien en principio se pensó que sería necesario y propicio utilizar la sala de informática de la escuela, esto no fue posible por restricciones institucionales ajenas a la investigación y los estudiantes utilizaron como herramienta de investigación sus teléfonos celulares o bien traían información desde la casa. Finalmente se solicitó a los estudiantes la realización de una reflexión final, para conocer qué es lo que ellos expresan haber aprendido al resolver las situaciones planteadas, que no es presentada en este trabajo.

Se recolectaron todas las producciones de los estudiantes en lápiz y papel, realizadas clase a clase, que luego fueron digitalizadas y se registró un audio general de cada clase. Se tomaron notas de campo del docente-investigador, pero tanto éstas como el audio general, se utilizaron como un apoyo a las interpretaciones de las resoluciones, pero no son analizados en este trabajo. La descripción de la implementación se basó en el análisis de las repuestas de Q_0 que determinaron los distintos recorridos realizados por los estudiantes, generados por las preguntas derivadas de Q_0 y a su vez concatenadas entre sí, a las que llamaremos Q_i.

4. Descripción de la AEI en términos de las preguntas y respuestas de los estudiantes

La profesora planteó la siguiente situación inicial, una problemática disparadora que permitiera a los estudiantes realizar un proceso de investigación y estudio, recuperando tanto sus conocimientos previos matemáticos, como los de otras ciencias (química, biología y física).

“Un grupo de amigos van a un restaurante, en el cual comieron y bebieron más de lo normal. Luego de un tiempo de la última copa se fueron en auto, y colisionaron con otro auto estacionado, sin sufrir lesiones mayores. Producto del susto y los nervios por el hecho, sin prestar atención a testigos oculares del hecho, se refugiaron en una de las casas, para evitar el control de alcoholemia, y así ser multados por la policía ante el hecho de conducir luego de beber. Un tiempo posterior, efectivamente fueron encontrados y se les practicó el test de alcoholemia. ¿Cómo se puede saber si la colisión fue consecuencia exclusiva del alcohol ingerido o no?”

Como parte del análisis didáctico previo, formulamos un conjunto de posibles preguntas que se desprenden de esta problemática inicial, y que su formulación y búsqueda de respuestas para dar origen a distintas nociones matemáticas a encontrar o reencontrar:

- ¿Cómo conocer el contenido de alcohol en la sangre? ¿De qué factores depende?
- ¿Qué es la graduación alcohólica de una bebida y cómo conocerla?
- ¿Cómo estimar la concentración de alcohol?
- ¿Cómo se puede describir la evolución de la concentración de alcohol en el cuerpo a medida que pasa el tiempo? ¿De qué factores depende?
- ¿Cómo impacta la comida en el estómago en la concentración de alcohol?
- ¿Cuál es la cantidad de alcohol permitido para conducir? ¿Cómo lo podemos calcular analítica y gráficamente?
- ¿Cómo predecir efectos de la concentración de alcohol en sangre a medida que pasa el tiempo? ¿Se puede realizar un gráfico que represente de esta situación?
- ¿Cómo interpretar la velocidad de absorción y eliminación de alcohol en el cuerpo?
- Realizar un análisis de varias etapas de absorción y eliminación hasta lograr una concentración del alcohol cero. ¿Se puede realizar un gráfico que represente de esta situación?
- ¿Cómo hacer retrospecciones sobre la cantidad de alcohol ingerida a partir de mediciones actuales?
- ¿Cómo se sabe cuánto fue el alcohol ingerido a partir de los resultados de las pruebas corrientes de alcoholimetría?
- ¿Cómo interpretar los resultados de los test de alcoholemia?
- ¿Después de cuánto tiempo ya no hay alcohol en el cuerpo? ¿De qué factores depende?

El estudio de la pregunta generatriz, lleva al estudio de las siguientes nociones y técnicas matemáticas:

- Unidades (Volumen, peso, densidad)
- Operaciones con números racionales
- Regla de tres simple. Porcentaje
- Función Lineal
- Estudio de funciones (Dominio, imagen, Máximo o mínimo, ceros, ordenada al origen, intervalo de crecimiento y de decrecimiento)

- Sistemas de ecuaciones
- Ecuaciones lineales
- Función lineal definida por tramos
- Función "serrucho" o "diente de sierra"
- Intervalos de la variable dependiente y la independiente

Al presentarles el problema inicial, los estudiantes se plantearon las siguientes preguntas: ¿cómo se mide el alcohol en una bebida alcohólica? ¿Es el mismo tiempo para todas las bebidas? ¿Qué tipo de alcohol se utiliza? ¿La graduación alcohólica de las bebidas, es lo mismo que los gramos absolutos de alcohol en una bebida?, ¿Cuánto tarda el alcohol en ir a la sangre? ¿De qué depende ese tiempo? ¿Cuánto tarda en irse del organismo totalmente? ¿De qué factores depende esta eliminación?

La profesora propuso comenzar por la primera cuestión:

Q1: ¿Cómo se mide el alcohol en las bebidas alcohólicas?

Así, los estudiantes, previa búsqueda en internet de la graduación alcohólica de cada bebida, y de la densidad del alcohol (0,8 g/ml.) calcularon la proporción de alcohol puro o gramos de alcohol absoluto, relacionando las unidades (volumen, masa y capacidad). Luego, consensuaron que la selección de distintos volúmenes de bebida incidía en los gramos de alcohol absoluto, dado que la graduación alcohólica de cada bebida es característica de la misma, depende de su composición química de la bebida. Se confeccionó una tabla como la presentada en la Figura 1, que describe cada bebida, con su volumen, grado y gramos absolutos de alcohol.

Bebidas	Grado	Volumen	Gramos
Vodka	40°	50 ml	16 gr
Fernet	38°	250 ml	76 gr
Gancia	19°	250 ml	38 gr
Vino	12°	150 ml	14,4 gr
Cerveza	6°	250 ml	12 gr
Whisky	40°	25 ml	8 gr
Sidra	4°	25 ml	8 gr
Tequila	42°	50 ml	16,8 gr
Ginebra	39°	50 ml	15,6 gr
Champagne	15°	100 ml	12 gr

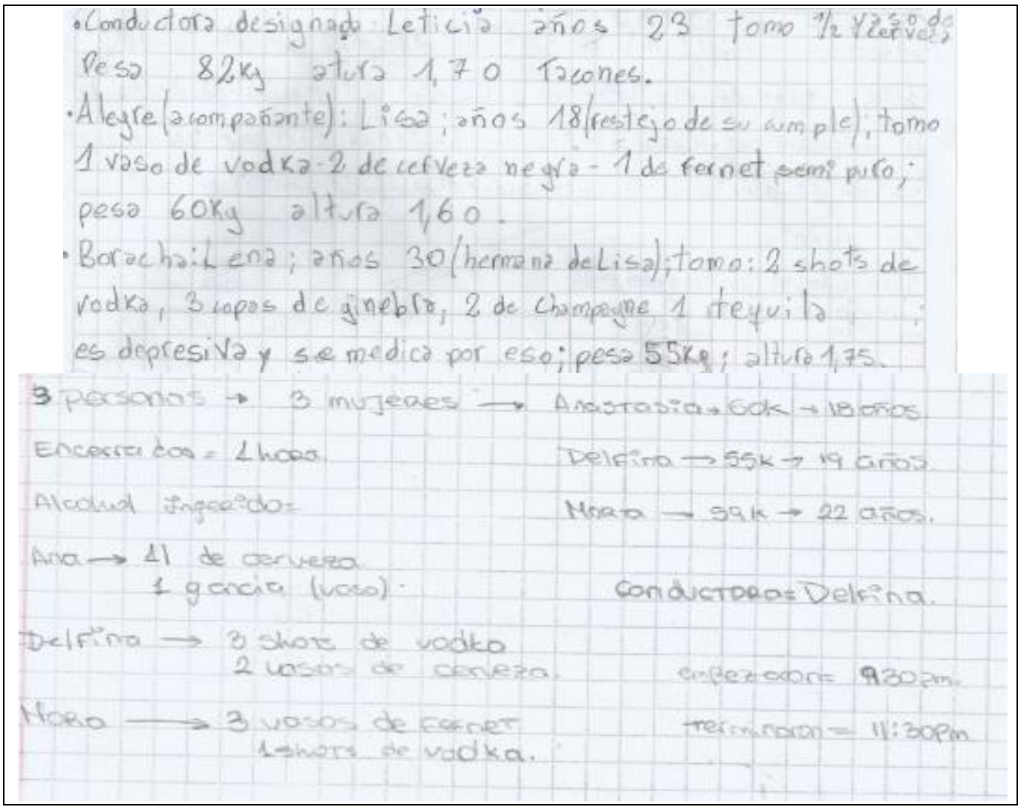
Figura 1: Tabla construida por los estudiantes, donde seleccionaron algunas bebidas alcohólicas, buscaron su graduación alcohólica, y para cierto volumen de la misma, calcularon cuántos gramos de alcohol se encuentra en ese volumen de bebida.

Como se puede apreciar, los estudiantes reencontraron las siguientes nociones (y técnicas) matemáticas: números racionales, relaciones entre volumen, masa y capacidad, y las técnicas de cálculo de porcentaje, y regla de tres simple.

Luego los estudiantes tenían gran curiosidad por conocer cómo saber cuánto alcohol se encuentra en la sangre de una persona al ingerir una bebida alcohólica, con lo cual se abordó

Q2: ¿Cómo conocer el alcohol que hay en la sangre?

A partir del problema inicial, cada grupo debía suponer características del conductor del automóvil, (y sus acompañantes) y las bebidas consumidas (cuales y que cantidad) para comenzar a realizar los cálculos a partir de esos valores. Por ejemplo, uno de los grupos consideró que en el vehículo iban tres personas y describieron de cada uno lo que había consumido, el peso, la edad, la altura y el sexo de cada integrante, como se presenta en la Figura 2 (izquierda). En otros casos, en lugar de la altura o la edad de las personas, consideraron como factor relevante, la ingesta de comidas previa a la toma de las bebidas alcohólica, como se presenta en la Figura 2 (derecha).


•Conductora designada: Leticia años 23 tomo ½ vaso de cerveza
Peso 82kg altura 1,70 Tacones.
•Alegre (acompañante): Lisa; años 18 (festejo de su cumple), tomo 1 vaso de vodka - 2 de cerveza negra - 1 de fernet semi puro;
pesa 60kg altura 1,60.
•Borracha: Lena; años 30 (hermana de Lisa); tomo: 2 shots de vodka, 3 copas de ginebra, 2 de Champagne 1 tequila;
es depresiva y se medica por eso; pesa 55kg; altura 1,75.

3 personas → 3 mujeres → Anastasia → 60k → 18 años
Encerrados = 2 horas
Delfina → 55k → 19 años
Alcohol ingerido:
Mora → 59k → 22 años.
Ana → 1l de cerveza
1 gancia (vaso).
Conductora: Delfina.
Delfina → 3 shots de vodka
2 vasos de cerveza.
empezaron = 9:30pm.
Mora → 3 vasos de fernet
1 shots de vodka.
terminaron = 11:30pm

Figura 2: Arriba: Resolución de un grupo de estudiantes que consideró que en el vehículo iban tres personas y describieron lo que habían consumido cada uno. Abajo: otros estudiantes consideraron la ingesta de comida previa a la toma de las bebidas alcohólicas.

Otro de los grupos, fue más preciso aún y consideró los tiempos (que tampoco estaban fijados en el problema), como se presenta en la Figura 3:

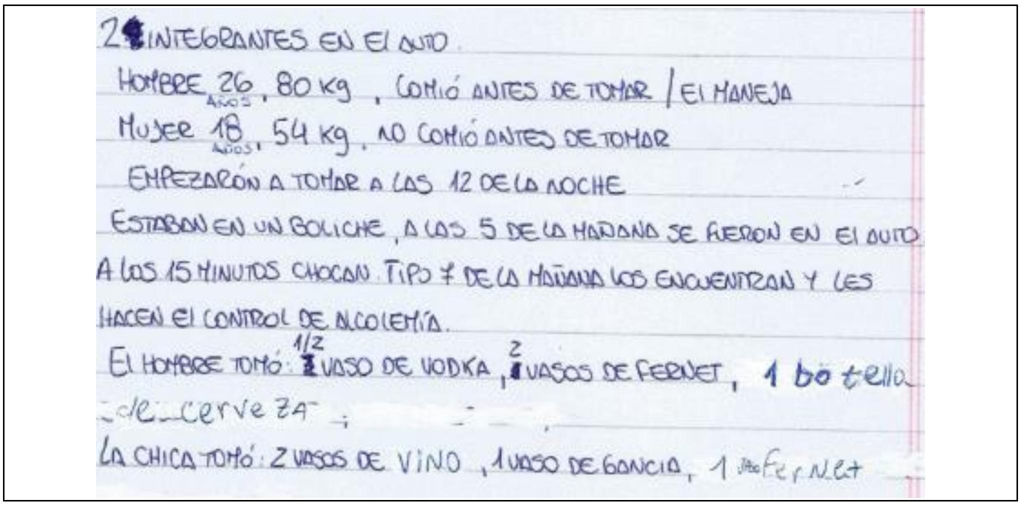

2 INTEGRANTES EN EL AUTO.
HOMBRE 26 AÑOS, 80 kg, COMIÓ ANTES DE TOMAR / EL MANEJA
MUJER 18 AÑOS, 54 kg, NO COMIÓ ANTES DE TOMAR
EMPEZARON A TOMAR A LAS 12 DE LA NOCHE
ESTABAN EN UN BOLICHE, A LAS 5 DE LA MAÑANA SE FUERON EN EL AUTO
A LOS 15 MINUTOS CHOCAN. TIPO 7 DE LA MAÑANA LOS ENCUENTRAN Y LES HACEN EL CONTROL DE ALCOLEMIA.
EL HOMBRE TOMÓ: 1/2 VASO DE VODKA, 2 VASOS DE FERNET, 1 botella de cerveza
LA CHICA TOMÓ: 2 VASOS DE VINO, 1 VASO DE GANCIA, 1 fernet

Figura 3: Datos de los integrantes del problema inicial elegidos por el G4.

Antes de poder abordar la respuesta a Q_2, se planteó a los estudiantes dos preguntas más elementales:

$Q_{2.1}$: ¿Que es la alcoholemia?
$Q_{2.2}$: ¿Cómo se calcula la concentración de alcohol máxima alcanzada en una persona?

Ambas preguntas por su parte, hicieron que los estudiantes se interesen en la cuestión acerca de los efectos de la alcoholemia en el organismo humano, encontrando la respuesta en varios sitios de internet. Luego, se consensuó que la concentración de alcohol máxima que alcanzará una persona luego de haber consumido alcohol puede obtenerse mediante la expresión[1]:

$$C = \frac{d}{m \cdot r}$$

donde *C* representa la concentración de alcohol máxima en el cuerpo [g/l]; *d* la dosis de alcohol ingerido [gramos], *m* el peso de la persona [kg], y *r* la constante de distribución del alcohol en el cuerpo, medido en l/kg. Luego de realizar un análisis que justifique esta expresión, se consensuó que la expresión representa que el valor de concentración alcohólica es directamente proporcional a la dosis de alcohol ingerido, e inversamente proporcional al peso corporal y al sexo de la persona, representada por *r*. Así se representa que las mujeres tienden a tener mayor concentración de grasa corporal que de agua, con respecto a los hombres, lo cual se representa como: r= 0,7 l/kg (hombre) y r= 0,6 l/kg (mujer). En la Figura 4 (izquierda) se pueden apreciar los cálculos realizados por uno de los grupos y en la Figura 4 (derecha) se muestra como, además de realizar el cálculo de la concentración de alcohol de cada persona, los estudiantes supusieron lo que cada persona había comido (mucho, poco o nada), aunque en este momento no supieron como ingresar esta información en sus cálculos.

[1] Fue Widmark, químico sueco quien en 1932 enunció que el metabolismo del alcohol transcurre orgánicamente a una velocidad constante, pero lenta. Para poder averiguar el grado de alcohol máximo en sangre que se alcanzará luego de ingerir alcohol, propuso una fórmula con la que fue posible poder saber la cantidad de alcohol en la sangre y seguir su evolución. Es por eso por lo que la curva que modeliza el circuito de alcohol en sangre también se denomina "curva de Widmark".

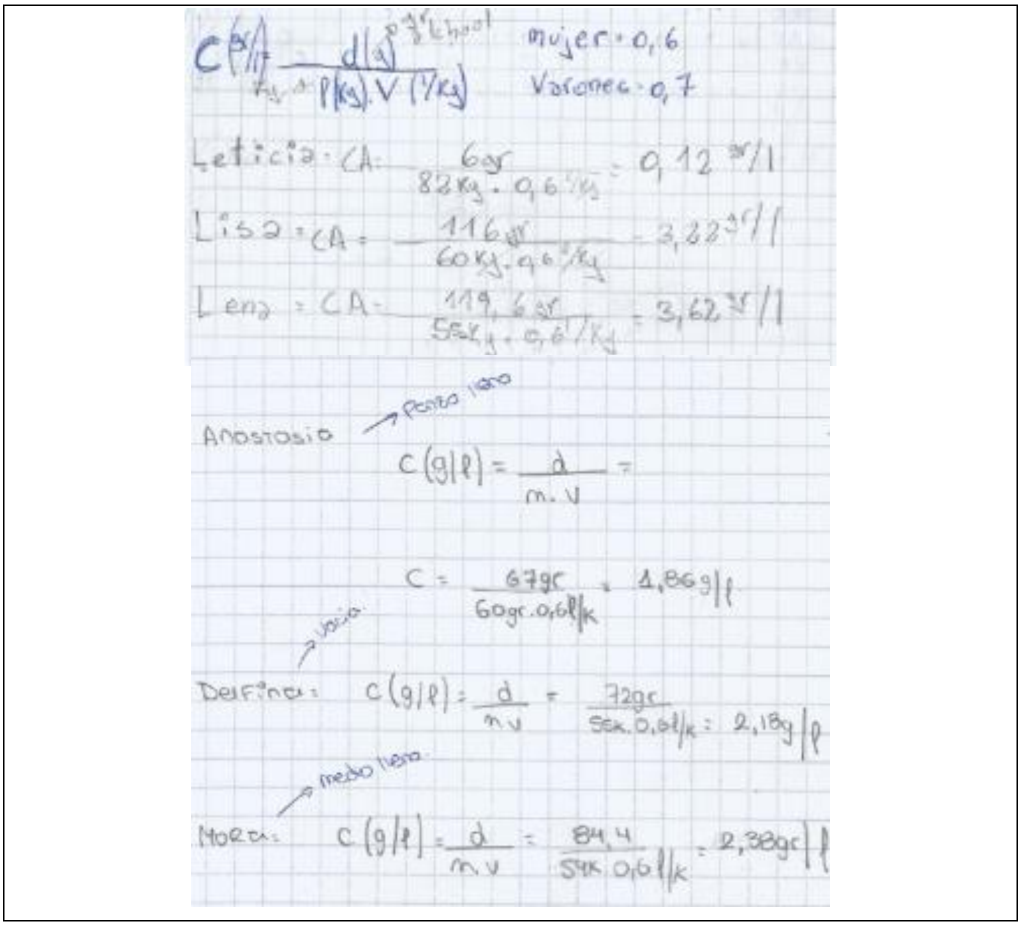


Figura 4: Cálculos de alcoholemia máxima que alcanzarían los integrantes. En la figura de arriba se puede apreciar que los estudiantes sabían que el hecho de beber con el estómago lleno o vacío tiene influencia, aunque esto no pudo ser considerado en este momento de cálculo.

Estos cálculos permitieron a los estudiantes concluir acerca de si el conductor llegaría o no a la alcoholemia máxima permitida actualmente en Argentina (0,5g/l) y despertó la curiosidad de saber en qué momento esta concentración en sangre disminuiría hasta llegar al valor permitido para conducir sin riesgos, o incluso a cero. Es decir, debido a la formación de los estudiantes en la orientación química sabían que el alcohol es metabolizado por el hígado, y entonces en algún momento el alcohol desaparecería totalmente de la sangre. De esta manera, se planteó el siguiente interrogante:

$Q_{2.3}$: ¿Cómo se describe la alcoholemia a través del tiempo?

Gestándose así la idea de modelización funcional para describir la distribución de alcohol, en función del tiempo.

En este punto, era clave que los estudiantes recuperaran los elementos básicos del análisis de funciones. Para esto, se les propuso analizar un conjunto de datos obtenidos de un estudio real de una persona de 75kg que había consumido 15ml de alcohol (extraído de Ludwin (2011)), presentando una tabla con tiempos y concentraciones de alcohol, como se muestra en la parte superior de la Figura 5.

Los estudiantes representaron los pares ordenados ofrecidos en un sistema de coordenadas, uniendo los puntos y concluyeron que: se parte de un tiempo y concentración cero, y luego a medida que aumenta el tiempo se produce un incremento en la concentración, llegado al punto máximo. Luego la curva comienza a descender debido a la metabolización del alcohol en el cuerpo humano. Los estudiantes recuperaron la idea de que como la función primero crece y luego decrece es natural la presencia de un punto máximo (asumiendo así la continuidad de la función). Notaron que éste se producía en el tiempo de 20 minutos y llega a una concentración máxima de 200 mg / litro, como se puede notar en el gráfico de la Figura 5 realizado por uno de los grupos:

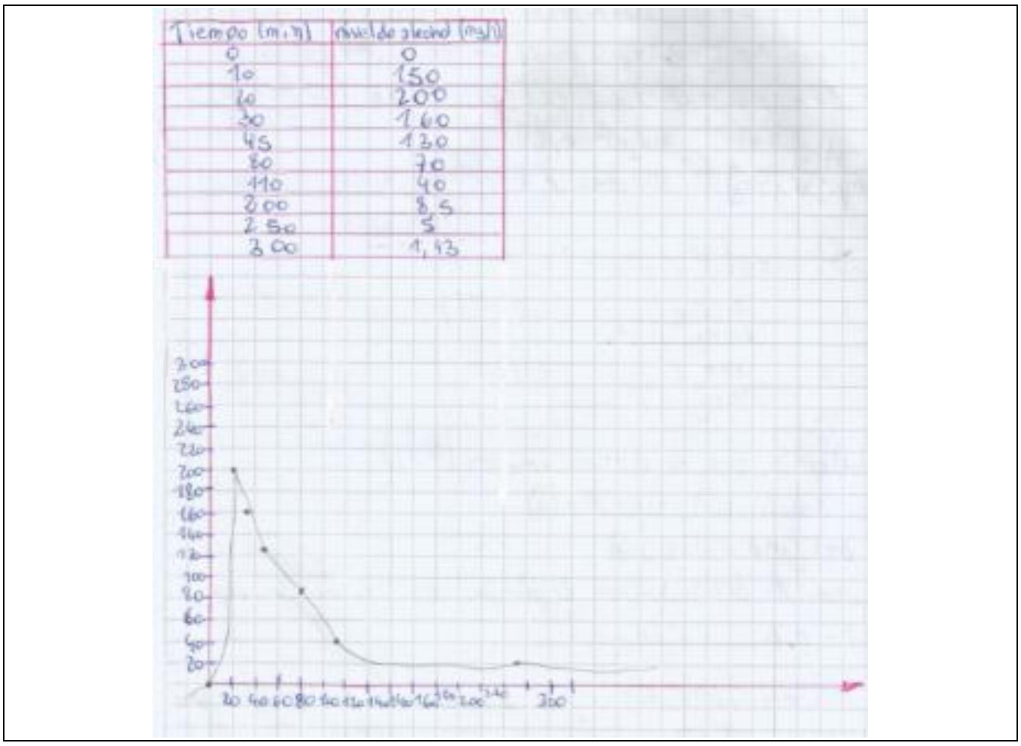


Figura 5: Construcción del gráfico a partir de los datos proporcionados por la profesora, realizado por uno de los grupos

Según Flanagan (2003) la farmacocinética del alcohol etílico se define como el comportamiento del alcohol en el organismo, desde su ingreso (etapa ascendente) hasta su eliminación (etapa descendente) y comprende cuatro etapas o fases: fase de absorción, fase de distribución, fase de metabolismo y fase de eliminación. En el contexto escolar, luego de interpretar la forma de la función, identificando el dominio, la imagen y las coordenadas del punto máximo de la función con el par ordenado (tiempo; concentración de alcohol en sangre), la profesora les propuso identificar la "fase ascendente" es decir la fase en la cual la función es creciente, y va desde el (0;0) hasta el punto máximo (30min; 200mg/l) y la fase descendente, o decreciente, considerada desde el punto máximo hasta casi el cero del eje de abscisas.

Luego se instaló la duda de cuál es el tiempo donde la alcoholemia resulta ser cercana a cero, respuesta que fue fácilmente encontrada en internet: aproximadamente es 90 minutos, pero los estudiantes sospechaban que ese valor sería distinto si la persona había consumido bebida alcohólica con estómago lleno o vacío. Concluyeron, tras la búsqueda en distintos medios, que el tiempo varía entre 60 a 90 minutos (consumida comida previamente) y 30 a 45 minutos (ingestión con el estómago vacío), concluyendo que este valor es aproximado, dado lo complejo del sistema metabólico del ser humano.

Se propuso entonces, aproximar la curva obtenida como dos trozos de funciones lineales, para comenzar la modelización de esta situación, ya que estas son funciones son conocidas por los estudiantes, puesto que ya fueron estudiadas en años anteriores. Para esto, los estudiantes utilizaron los datos inventados por ellos, y así en la Figura 6 podemos apreciar sus cálculos para dos personas de distinto sexo y sus conclusiones acerca de la modificación de la concentración máxima, dando que la mujer tiene una concentración de 0,12 g/l y el hombre de 0,10g/l. Con relación a la función lineal en la fase ascendente los estudiantes concluyeron que cambiar sólo el sexo dejando fija la cantidad de alcohol consumido, mantiene invariante el dominio de la función, y se modifica la imagen. En la parte central de la misma Figura 6, los mismos estudiantes realizaron el análisis de dos personas del mismo sexo pero de pesos diferentes y llegaron a la conclusión que nuevamente se modificaba la imagen: así la persona que pesa más tiene una concentración máxima de 2,57 g/l y la persona que tiene menos peso la concentración máxima alcanzada es de 3,22 g/l.

Por último en la parte inferior de la Figura 6 se puede apreciar cómo los estudiantes realizaron el análisis para una hipotética situación en el cual una persona había consumido alcohol en un caso con el estómago vacío y en el otro, lleno. Así concluyeron que en este caso sí se modificaba el dominio, ya que la que no había comido llegaba más rápido a la concentración máxima: a los 45 minutos llegó a una concentración de 3,62 g/l, mientras que si había comido antes de consumir alcohol el tiempo para llegar a la concentración máxima fue a los 90 minutos con la misma concentración alcohólica.

Luego, el grupo de clase abordó el proceso fisiológico de la eliminación del alcohol, resaltando el tiempo que tarda el alcohol en eliminarse completamente del cuerpo. Los estudiantes plantearon sin dificultades que debía tratarse de una función decreciente, que si se aproximaba a una función lineal, su pendiente debe ser negativa.

La profesora sugirió comenzar el análisis colocando el tiempo en cero, y no a continuación del análisis precedente, por una cuestión de construcción de la función a tramos, que ellos no conocían aún, y se planeaba realizar a partir de las funciones por separado. La cuestión a responder ahora es:

$Q_{2.3.1}$: *¿En qué tiempo se llega a la concentración mínima de alcohol en sangre?*

Como estaba planteada la situación, los estudiantes no sabían cómo hallar la pendiente de dicha función lineal decreciente, ya que sólo conocían un punto perteneciente a la recta. Por eso, para no desviar el foco de la cuestión la profesora intervino proponiendo aceptar que ésta viene dada por el llamado coeficiente "β" que al igual que el coeficiente r, éste también depende del sexo, siendo 0,0025 g/l.min. para el varón toma el valor y 0,0026 g/l.min. si es mujer. El argumento que se sostuvo fue a que biológicamente se sabe que el ritmo de eliminación se puede considerar constante, representando la cantidad de alcohol eliminado por minuto y por kg peso (aproximado e independiente de lo que haya bebido la persona).

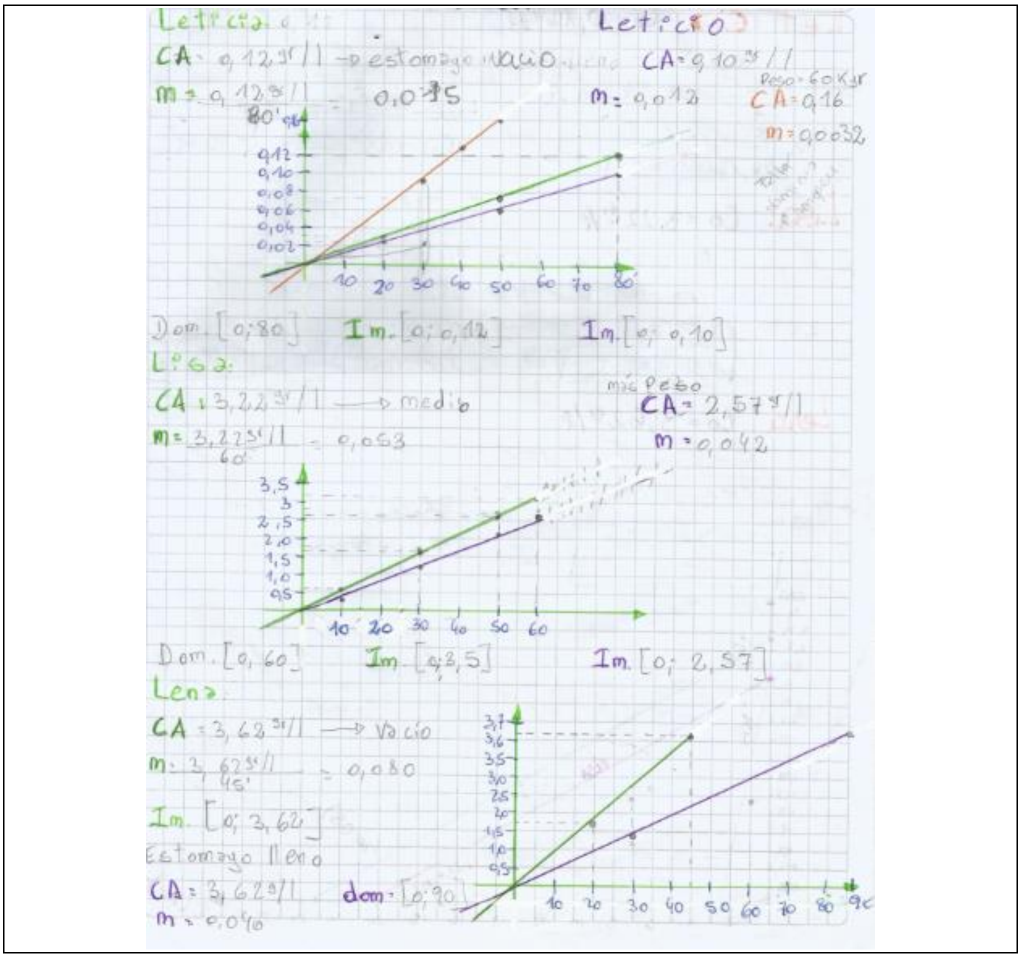


Figura 6: En la parte superior de la Figura se presenta el análisis realizado por los estudiantes para dos personas de distinto sexo, y en la parte del medio el análisis de la misma persona con distinto peso. En la parte inferior se puede observar el análisis que ellos realizaron de una misma persona suponiendo que había ingerido alimentos antes de consumir (tramo de recta color verde), o no (tramo de recta color azul).

Así, con este valor de pendiente de la función lineal descendiente, los estudiantes lograron realizar el cálculo del tiempo en el que todo el alcohol se metabolizaría en el cuerpo, llegando a cero de concentración alcohólica, recuperando la noción de raíz de la función como se puede observar en la Figura 7. En la parte superior de la Figura 7 se aprecian sus cálculos para cada persona. Los estudiantes podían así notar que la inclinación no variaba, ya que la pendiente era la misma, porque ellos habían analizado para tres personas del sexo femenino.

También en la misma Figura 7, se nota como los estudiantes señalaron el tiempo en la que en que las personas involucradas llegaron a la cantidad permitida de alcohol para conducir, en la intersección de las funciones lineales decrecientes (fase descendente) con la función constante y=0,5.

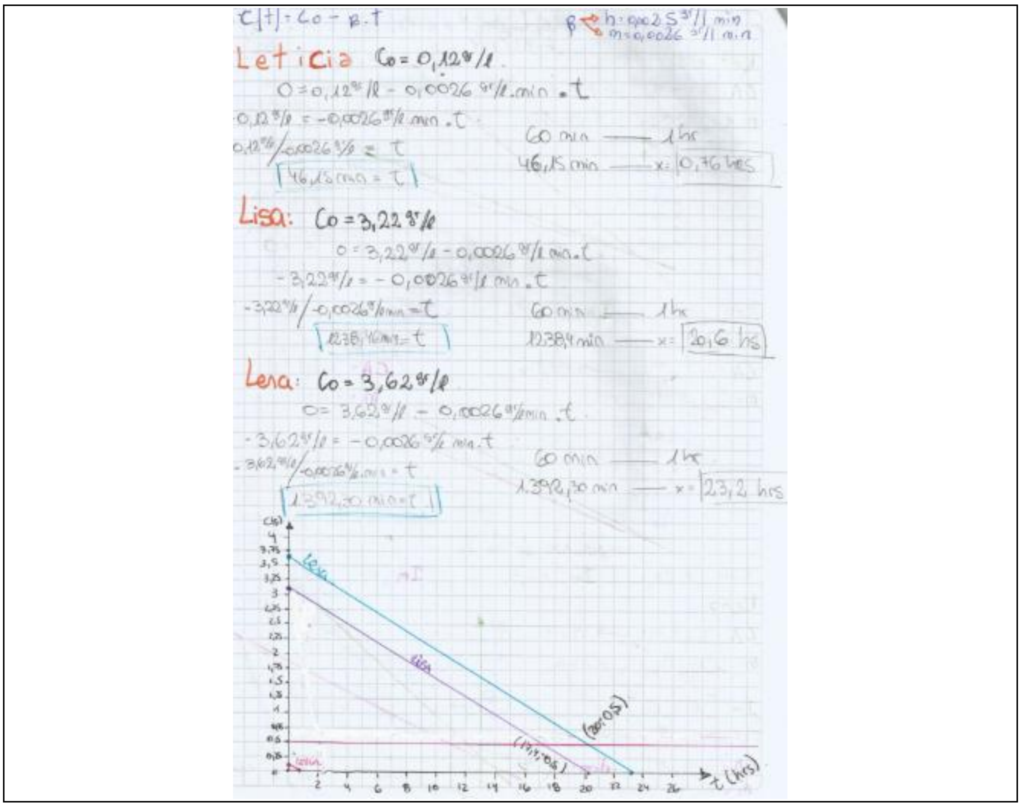


Figura 7: Representación gráfica de la fase descendente realizada por los estudiantes

Finalmente, la profesora les propuso construir la función (expresada en una única forma algebraica y en un mismo par de ejes cartesianos) que involucre ambas etapas, modelizando así el recorrido desde que una persona comienza a tomar hasta la eliminación total del alcohol en el cuerpo. Así se dio el encuentro con la noción de función definida a trozos.

En la Figura 8 se puede apreciar el análisis de los estudiantes al representar las funciones gráficas y algebraicamente, analizando el caso de que la persona hubiera ingerido o no comida antes de la bebida, y también propusieron analizar dos personas de distintos sexo y peso (las cuales denominaron "Marta" y "Marto"), indicando el cambio en la expresión algebraica de la función.

Con el objetivo de afianzar el concepto de función definida a trozos, se propuso a los estudiantes analizar el caso de la ingesta continua de alcohol, invitándolos así a modelizar un caso más general que permita abordar a la función conocida como "función serrucho". Para acotar la forma de la función "serrucho" o función "diente de sierra", y delimitar el problema, se propuso la construcción de, como máximo dos etapas de absorción y dos de eliminación, hasta que su concentración llegara a cero. En la Figura 9 se nota como los estudiantes trasladaron a esta situación todas las construcciones anteriores. Así se aprecia que en la parte superior copiaron todo lo que ya había construido para "Lisa" en la función en tramos, y en la parte inferior agregaron otra función donde vuelve a tomar pasada las dos horas un vaso de whisky, por lo tanto, pasado los 120 minutos la concentración bajo a 2,88 g/l y luego pasada una hora vuelve a subir debido a lo que había consumido (3,1 g/l) y luego pasado los 240 minutos comienza a descender hasta pasar casi un día para la concentración alcohólica sea nula.

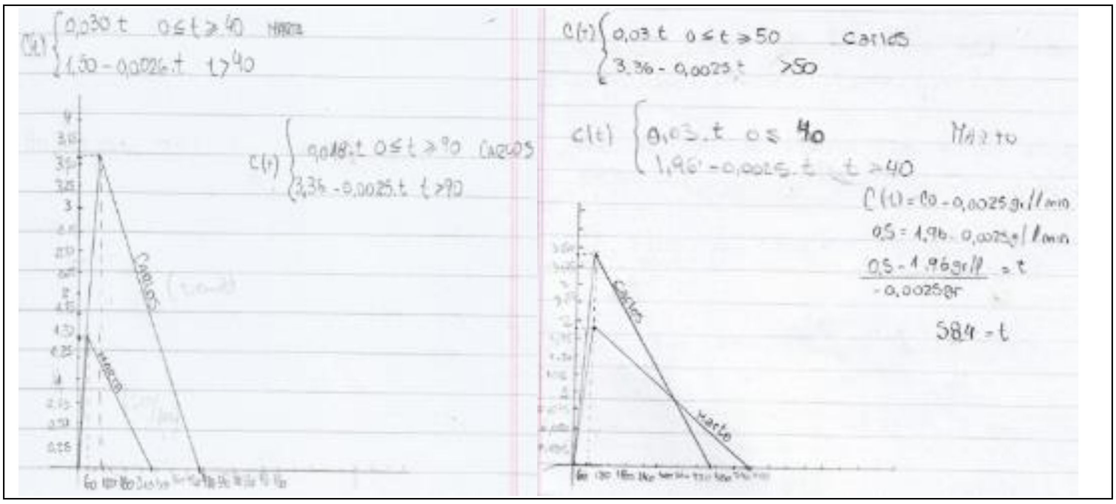


Figura 8: Reconstrucción de la expresión y la gráfica para las fases ascendente y descendente, por dos estudiantes

Figura 9: Función "serrucho" elaborada por los estudiantes para representar la ingesta continuada de alcohol

Como cierre de la actividad se propuso retornar a la actividad inicial, que entra en la categoría de problemas conocidos en casos judiciales y legales como "cálculos retrospectivos". En estos casos, como primer paso, se realiza una extracción de sangre, se mide la alcoholemia en ese momento y luego en base a éste, se calcula la alcoholemia en el momento del accidente (de ahí el nombre de retrospectivo).

La diferencia entre la situación donde los estudiantes hipotetizaban valores de bebidas, y hacían una descripción del modelo del circuito del alcohol con esta situación, es que en una situación real, aún desconociendo la cantidad de alcohol ingerida, se puede, a partir de una muestra de sangre (conociendo el tiempo transcurrido desde la última ingesta), y asegurándose de tomar la muestra en la fase descendente, realizar una retrospección y determinar el máximo valor de alcoholemia alcanzado en el organismo. Así, se planteó retomar la expresión de la función lineal de la concentración alcohólica en función del tiempo en la fase de eliminación, para conocer el valor de concentración máxima alcanzada en el tiempo *t*, a partir de la concentración que ofrece el análisis realizado:

$$C_{máx} = C_{muestra} + \beta .\ t$$

En la Figura 10 se presenta la resolución de un grupo que, con las condiciones iniciales propuestas por ellos: ser una mujer la conductora (coeficiente β= 0,0026 g/l.min) haber ingerido ciertas bebidas alcohólicas con la comida (con lo cual, el tiempo en que llega a la concentración máxima es de 60 min).

Con estas condiciones, habían obtenido inicialmente que la concentración máxima sería de 3,22g/l. Además, supusieron que la policía había interceptado el auto para hacerle el test de alcoholemia 4 horas después del accidente, y a su vez éste había ocurrido 3 hs. después de la última ingesta. Se puede apreciar cómo a partir de todas estas condiciones, realizaron los cálculos, y establecieron la concentración alcohólica en el momento del accidente, obteniendo un valor de 2,59 g/l. Con esto llegaron a la conclusión que el conductor tenía un valor superior al permitido en sangre (mayor a 0,5), no solamente en el momento de la extracción de la muestra de sangre, sino también dado el alto valor en el momento del accidente, fuera muy posible que éste hubiese sido provocado por éste. Como se puede notar en el gráfico de la función en tramos que ellos modelizaron, ubicaron los pares ordenados: (1; 3,22), que corresponde al máximo, el tiempo en que llegaba a su concentración máxima, también el momento que había sido el accidente (240; 2,59) y también la hora de la multa (8; 1,9), corroborando gráficamente sus cálculos. Luego calcularon el momento en donde la CA=0 concluyendo que, alrededor de 20 horas recién el cuerpo estaría libre de alcohol. Además de los cálculos, los estudiantes pudieron reflexionar acerca de cómo se ve afectado el organismo ante esta ingesta de alcohol, advirtiendo que para la alcoholemia lograda la persona mostraría severos signos de intoxicación alcohólica. En ese caso, la persona inclusive podría caer en un estado de coma, considerando que ya un valor de entre 0,5g/l y 0,6g/l produce una disminución del tiempo de reacción y de la coordinación.

5. Conclusiones

En este trabajo se muestra que fue posible partir de un problema con sentido para los estudiantes, dada su cercanía a la problemática del consumo del alcohol, con el planteo de un problema cuya pregunta generatriz tiene suficiente potencial para hacer surgir preguntas derivadas. Esta Actividad de Estudio e Investigación, que supuso un cambio de lugares y papeles tanto del profesor como de los estudiantes, dio lugar un proceso en el cual emergieron las nociones relativas a la función definida a trozos, que era nueva para los estudiantes, aunque también permitió a los estudiantes reencontrar y resignificar otras nociones matemáticas como función lineal. Una ganancia que también se suma a partir de este proceso de estudio, y que no es menor considerando que en las clases de Matemática buscamos formar ciudadanos críticos, fue la concientización acerca del consumo de alcohol, ya que los cálculos obtenidos de fuentes reales sensibilizaron a los estudiantes sobre los efectos de su consumo excesivo.

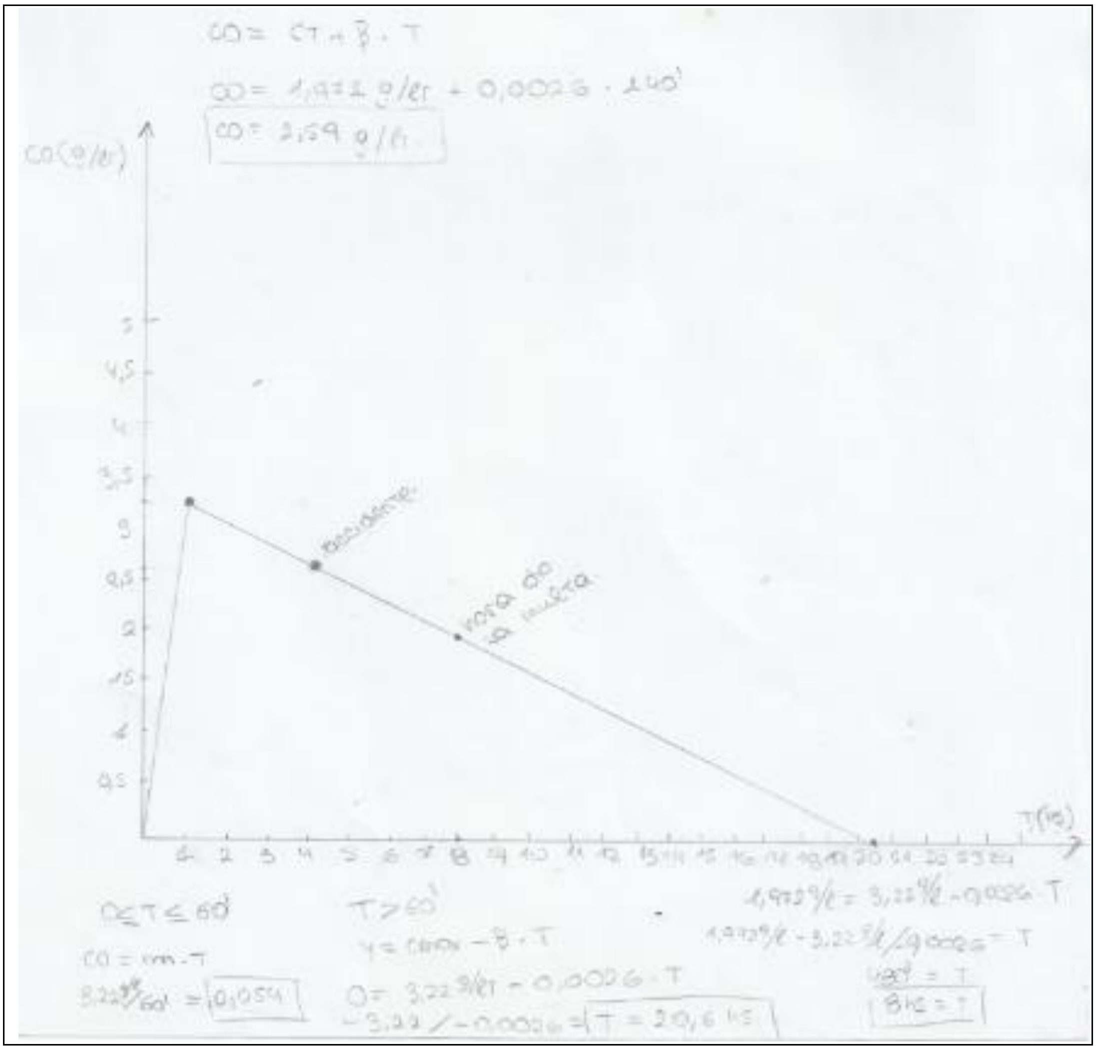


Figura 10: Representación gráfica y cálculos retrospectivos realizados por los estudiantes. En la parte inferior de la imagen se aprecia el análisis realizado por los estudiantes: para la parte ascendente (izquierda) calcularon la pendiente; para la parte descendente colocaron la expresión de la recta, e igualando la concentración igual a cero, hallaron el tiempo. De forma análoga, reemplazaron la alcoholemia detectada al momento de la multa, concluyendo que ésta había ocurrido 8 horas posteriores al final de la ingesta de alcohol

Los resultados obtenidos se consideran muy alentadores, ya que se trata de una implementación en un curso regular de una escuela secundaria cuyos actores, habituados a un sistema tradicional de enseñanza-aprendizaje, que aceptaron el nuevo rol: preguntarse, cuestionar e investigar hasta dar con una respuesta que los convenza. Esta aceptación, naturalmente fue gradual, ya que este nuevo rol del docente y de los propios estudiantes se fue afianzando a medida que ellos se sentían confiados en sus suposiciones y lograban corroborarlas matemáticamente. Por su parte, el rol del docente también se fue adaptando de a poco, para hacerse a un lado del rol de otorgar respuesta inmediata a las preguntas de los estudiantes, proceso que se fue naturalizando con el avance de sus estudiantes.

Quedan muchas cuestiones pendientes para seguir investigando, en especial relativas a la posibilidad de organizar la mayor parte posible del currículo de forma de Actividades de estudio e Investigación, con los potenciales problemas y beneficios que esta forma de abordar la enseñanza produce.

6. Referencias bibliográficas

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD*, 553-577. CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica

Berenguel A. (2017) Diseño de una Actividad de Estudio e Investigación en torno a Cuerpos Geométricos: Descripción de una implementación en segundo año del Nivel Secundario. *Tesis de Licenciatura en Educación Matemática a Distancia*. Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA

Bon C., Pérez J. y Lucas C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 17 (3), 289-318

Bonacina, M; Teti, C.; Haidar, A.; Bortolato, S. y Philippe, V. (2014). Un dispositivo didáctico para la enseñanza funcional de las matemáticas: Las Actividades de Estudio e Investigación - AEI. En Lestón, Patricia (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* p. 833-842. México, DF. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Bosch, M.; Espinoza L.; y Gascón J. (2003) El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23 (1).

Caro Acevedo S. (2013) Propuesta de enseñanza sobre la modelación de funciones por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto. *Tesis de Maestría.* Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias Medellín, Colombia. (En línea) Recuperado el 16 de septiembre de 2018 de http://bdigital.unal.edu.co/12376/1/71295941.2014.pdf

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en TAD, en *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266

Chevallard, Y. (2006). *Steps towards a new epistemology in mathematics education*. Conférence plénière d'ouverture du 4e congrès de la European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4), Sant Feliu de Guíxols, 17-21 février 2005. Paru dans les *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Universitat Ramon Llull, Barcelone, 2006, 21-30. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=95

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemática en la Sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemáticas*, 2(2), 161-182

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*. 20(1), 159-169.

Corica, A R. y Marin, E A. (2014). Actividad de Estudio e Investigación para la enseñanza de nociones de geometría. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 85, 91-114.

Corica, A. (2016). Una propuesta para estudiar las funciones en trozos. En *Enseñanza por investigación en el marco de la Teoría Antropológica Didáctica*. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Flanagan N. (2003) Alcohol Toxicology for Prosecutors Targeting Hardcore Impaired Drivers. *Special topics series*. Alexandria: American Prosecutors Research Institute.

Fonseca, C.; Gascón, J. y Oliveira, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17 (3) 189-318.

García, F. J. (2005), La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales. *Tesis doctoral*, Universidad de Jaén.

García, F. J., J. Gascón, L. Ruiz-Higueras y M. Bosch (2006) Mathematical Modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 38 (3), 222-246

Gatica, N.; Maz-Machado, M.; May, G.; Cosci, C.; Echevarría, G. y Renaudo, J. (2010) Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas. *Unión* Núm. 22, 121-131

Huincahué, J., Borromeo-Ferri, R. y Mena Lorca, J. (2018) El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 36(1), 99-115

Ludwin, C. (2011) Blood Alcohol Content. Undergraduate *Journal of Mathematical Modeling: One + Two*. University of South Florida. 3(2). Article 1.

Llanos, V.C.; Otero, M.R y Gazzola, M.P. (2011) Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI). *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias* (6) 1

Leguizamón C. y Caicedo C. (1999). Funciones a trozos. Un camino hacia su comprensión. *Educación Matemática*. 11(1), 103-118.

Vernaza, A. y Tapia, A. (2013) Una propuesta de enseñanza de la función por tramos usando el periódico y Geogebra. *Trabajo de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas*. Universidad del valle. Disponible en http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/6774/1/CD-0395402.pdf

María de los Ángeles Fanaro. Lugar de trabajo: Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología, de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. (UNCPBA) Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Título: Doctora en Enseñanza de las Ciencias por la Universidad de Burgos (España), Profesora de Matemática y Física por la UNCPBA**.** Trabaja en el área de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de la Física. Email: mfanaro@exa.unicen.edu.ar

María Andrea Almada. Lugar de trabajo: Escuela de Educación Técnica Nº2 de la ciudad de Tandil. Títulos: Licenciada en educación Matemática, Profesora de Matemática por el ISFD Nº10. Email: andraalmada000@gmail.com