NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 103, marzo de 2020, páginas 81-98

# El concepto de pendiente: estado de la investigación y prospectivas

**Ricardo Abreu Blaya**
**Crisólogo Dolores Flores**
**José L. Sánchez**
**José M. Sigarreta**
(Universidad Autónoma de Guerrero. México)

*Fecha de recepción: 3 de noviembre de 2019*
*Fecha de aceptación: 27 de enero de 2020*

**Resumen** En las últimas dos décadas han proliferado las investigaciones sobre el concepto de pendiente que, si bien en su mayoría atendían al estudio teórico de las conceptualizaciones, a través de ellas abordaban también la estructuración del contenido y los obstáculos asociados al proceso de enseñanza-aprendizaje de dicho concepto. En este trabajo se analizan y sintetizan las principales investigaciones que tratan la pendiente, así como se da noticia de alguno de sus resultados. Finalmente, se plantean posibles prospectivas para las investigaciones sobre el concepto de pendiente.

**Palabras clave** Palabras claves: Epistemología, Pendiente, Conceptualizaciones, Educación Matemática, Enseñanza, Aprendizaje.

**Title** **The concept of slope: state of research and prospects**

**Abstract** In the last two decades there has been a proliferation of research on the concept of slope which, while mostly concerned with the theoretical study of conceptualizations, through them also addressed the structuring of content and the obstacles associated with the teaching-learning process of this concept. In this paper, the main research studies dealing with the slope are analyzed and synthesized, as well as some of their results are reported. Finally, possible prospects for research on the concept of slope are raised.

**Keywords** Epistemology, Slope, conceptualizations, mathematical education, Teaching, Learning.

## 1. Introducción

La pendiente es un concepto matemático, de naturaleza geométrica, ya en la antigüedad el hombre recurría, de alguna manera, a la noción de pendiente para resolver problemas prácticos. Muchos de estos problemas estaban relacionados con la elevación de las montañas, la construcción de edificaciones, rampas y caminos. Un problema concreto que enfrentaron los antiguos fue la construcción de pirámides, cuya dificultad consistía en mantener una inclinación uniforme en cada cara y a su vez la misma en todas sus caras. Según (Boyer, 1989) esta necesidad es lo que llevó a los egipcios a utilizar lo que denominaron "seqt (relación avance versus subida)", equivalente a lo que hoy conocemos como pendiente de una superficie plana.

Desde el punto de vista teórico, matemáticos griegos como: Euclides (325 a. C., 265 a. C.) y Apolonio (262 a. C., 190 a. C.); utilizaron diferentes técnicas y métodos para obtener la tangente a una curva; el concepto de tangente que poseían los griegos era estático; consideraban a la tangente como la recta que toca a la curva sin cortarla. El primero estudió el comportamiento de una recta trazada a una circunferencia y el segundo elaboró técnicas puramente geométricas para la construir rectas tangentes a las cónicas. Las técnicas encontradas solo eran aplicables a curvas particulares, por lo cual se hizo necesario buscar nuevos métodos para encontrar la recta tangente a una curva. Con la introducción de la Geometría de Descartes en 1637, se desarrollaron métodos algebraicos para el trazado de tangentes a cónicas y a otras curvas. Con el Método de las Fluxiones de Newton (1665-1666) y el de las diferenciales de Leibniz (1646-1716) encuentran métodos generales para el trazado de tangentes. Los matemáticos del siglo XVII intuitivamente asumían la idea de la recta tangente a una curva como la posición límite de una secante. En 1823, Cauchy (1789- 1857) resolvió el problema, dando una definición precisa de la derivada en términos del concepto de límite. Para más información sobre el tema ver (Martínez de la Rosa, 2009).

El concepto de pendiente se considera esencial en la formación matemática de los estudiantes, fundamentalmente, porque es base de otros conceptos importantes dentro de la matemática elemental y superior. Este concepto, está presente en los currículos de matemáticas de la enseñanza media y superior de todos los países y es objeto de estudio, de manera formal, a partir del nivel de secundaria (Teuscher y Reys, 2010, 2012; Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martín, 2013; Hoffman, 2015; Rivera y Dolores, 2017; Deniz y Kabael, 2017; Beyerley y Thompson, 2017). Las variantes más utilizadas para introducir el concepto de pendiente en la escuela la asocian o bien con el comportamiento de la recta o bien con la idea de razón de cambio. En el primer caso, se trabaja simultáneamente con las funciones lineales o a partir de situaciones del mundo real (Carlson et al., 2002; Teuscher y Reys, 2010, 2012; Birgin, 2012) y, en el segundo, relacionándola con los elementos básicos de las razones y las relaciones proporcionales (Turner, Wilhelm y Confrey, 2000). En cualquier caso, Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990 consideran que la pendiente es un “concepto de enlace poderoso” porque ayuda a los estudiantes a comprender las funciones y sus gráficas.

Otro elemento que pone de manifiesto la importancia del concepto de pendiente es que permite explorar con mayor facilidad las funciones de dos variables ($f(x, y) = k$) con covariación no constante al compararlas con la característica de pendiente constante de las funciones lineales (Stanton y Moore–Russo, 2012). El concepto de pendiente se aplica en muchos campos de las ciencias en general y, en particular, es relevante para el desarrollo de temas de matemática avanzada; es fundamental para describir el comportamiento de una curva y juega un papel central en el desarrollo del cálculo (Carlson, Oehrtman y Engelke, 2010; Confrey y Smith, 1995; Noble, Nemirovsky, Wright y Tierney, 2001). El cálculo marca una transición significativa en la comprensión matemática de la pendiente por parte de los estudiantes, pasando de funciones lineales a funciones no lineales y de razón de cambio medio a razón de cambio instantáneo (Dolores, 2007; Teuscher y Reys, 2012; McGee, Moore-Russo y Martínez, 2015).

El concepto de pendiente, al ser tratado como objeto en el proceso enseñanza–aprendizaje encierra una gran complejidad debido a la variedad de significados que se le asocian y que van desde el uso cotidiano o común, pasando por sus aplicaciones, hasta las conceptualizaciones que se han determinado en el proceso de enseñanza–aprendizaje de dicho concepto (Stump, 1999; Zaslavsky, Sela y Leron, 2002; Moore-Russo, Conner, y Rugg, 2011a; Nagle y Moore-Russo, 2013).

El paso de un análisis global (general) a un análisis local (puntual) en el problema del estudio de una función es esencial para comprender que, en una vecindad muy próxima de un punto, la función se comporta como su recta tangente en ese punto, es decir, las variaciones que tiene una función a partir de un valor determinado, son proporcionales a las de su variable independiente cuando éstas son muy pequeñas. En ese sentido, los trabajos de Asiala et al., 1997; y de Sofronas et al., 2011, contemplan la aproximación lineal como un elemento funcional para el estudio de la pendiente. Además, Sofronas et al., (2011), recogen que la tercera parte de los expertos en cálculo participantes en su estudio, identifican la comprensión de los estudiantes sobre la aproximación lineal como algo fundamental para una comprensión profunda del cálculo de primer año.

A partir de la revisión de la literatura sobre el tema de la pendiente, se puede observar que la producción científica en los últimos años ha crecido de manera significativa y se ha concentrado en tres direcciones principales: estudio de las conceptualizaciones en estudiantes y profesores; los obstáculos y errores que presentan tanto estudiantes como profesores y el proceso de enseñanza–aprendizaje del concepto de pendiente (Deniz y Kabael, 2017, p. 140); sin embargo, no se ha encontrado ningún estudio general que aglutine las investigaciones sobre dicho tema y marque futuras direcciones en este campo de estudio. La amplitud de tal estudio motiva que este artículo pretenda sólo reseñar los trabajos más relevantes sobre el concepto de pendiente asociados con las conceptualizaciones en estudiantes y profesores.

Como punto de partida para lograr el objetivo de analizar, sintetizar y clasificar la investigación sobre el estudio de las conceptualizaciones en estudiantes y profesores, nos proponemos las siguientes preguntas:

**1.** ¿Cuáles son las principales investigaciones y resultados relativos a la pendiente?
**2.** ¿Qué perspectivas se pueden establecer para las futuras investigaciones sobre la pendiente?

## 2. Método.

El estudio de la literatura publicada sobre la pendiente se realizó utilizando como base el método de análisis bibliográfico clásico sugerido por Gómez, Fernando, Aponte y Betancourt (2014). Mismo que consta de las siguientes etapas:

1. Búsqueda de la información. “Para el proceso de investigación bibliográfica se debe contar con material informativo como libros, revistas de divulgación o de investigación científica, sitios Web y demás información necesaria para iniciar la búsqueda. Una búsqueda bibliográfica debe hacerse desde una perspectiva estructurada y profesional. El material que se emplee debe ser reconocido, es decir, aquellos que han sido revisados cuidadosamente por expertos antes de ser publicados”.
2. Organización de la información. “Esta fase consiste en organizar de manera sistemática la documentación encontrada. Se puede realizar tanto de manera básica o detallada. Una manera de organizar la información es por relevancia, distinguiendo los principales documentos de los secundarios. Así se obtiene una estructura o diagrama que permite identificar los pilares del tema bajo estudio. Es necesario definir una estructura para organizar la información de forma jerárquica y la cantidad de datos que se van a incluir en esta (autores, año, resumen, idea principal, etc.)”.
3. Análisis de la información. “La tercera fase es analizar la información ya organizada, indagando sobre cuáles son los documentos más útiles para la temática en estudio. El análisis de la información es la tarea que toma más tiempo en la investigación bibliográfica, ya que con ella se espera identificar el aporte a realizar”. Gómez, et al. (2014, 159–160).

En una primera etapa se realizó una búsqueda en bases de datos importantes como: (Web of Science, JCR, SCOPUS, ERIC) con la finalidad de identificar la literatura correspondiente al tema. Para ello utilizamos como términos de búsqueda: “Pendiente”; “Conceptualizaciones de pendiente”; “Concepciones sobre pendiente”; “Enseñanza–aprendizaje de pendiente”; “Dificultades en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la pendiente”; “Obstáculos y errores en el proceso de enseñanza–

aprendizaje de la pendiente". En el mismo sentido se realizó una búsqueda general orientada en las bases de datos antes mencionadas e Internet (actas de congresos sobre Matemática Educativa y a las tesis de posgrado); utilizando en este caso los términos de búsqueda tales como "Conexiones entre conceptualizaciones", "El concepto de pendiente en el currículo", "Las conceptualizaciones de pendiente en el currículo", "Estructuración del contenido sobre pendiente".

A partir de un proceso de análisis y síntesis de los hallazgos recogidos en la literatura obtenida, la segunda etapa consistió en la organización e identificación de las investigaciones y resultados más representativos así como de los autores más relevantes en dicha temática (ver Tabla 1).

En una tercera etapa se seleccionó la literatura científica más relevantes para nuestra investigación a partir de los resultados del proceso anterior. De esta forma, el cuerpo principal de las investigaciones seleccionadas para la elaboración de este artículo está conformado por 35 artículos de investigación, en su mayoría en idioma inglés. Cabe destacar que dichas investigaciones son mayoritariamente de índole cualitativa.

| Autor(Año) | Título | Objetivo | Marco teórico fundamental | Hallazgos Fundamentales |
|---|---|---|---|---|
| Stump, S. (1999) | Secondary Mathematics Teachers' Knowledge of Slope. | Investigar las definiciones del concepto de pendiente y la comprensión que poseen los profesores de secundaria sobre dicho concepto; así como su conocimiento para la enseñanza. | La teoría de las imágenes conceptuales desarrolla por (Tall y Vinner, 1981).<br><br>La teoría sobre la comprensión matemática (MKT por sus siglas en Inglés) desarrollado por Shulman (1986). | Las siguientes conceptualizaciones del concepto de pendiente:<br>1. Razón geométrica.<br>2. Razón algebraica.<br>3. Propiedad física.<br>4. Propiedad funcional.<br>5. Coeficiente paramétrico.<br>6. Trigonométrica.<br>7. Cálculo.<br>8. Situación del mundo real. |
| Zaslavsky, Sela y Leron (2002) | Being sloppy about slope: the effect of changing the scale. | Investigar el efecto en los estudiantes y profesores cuando enfrentan situaciones o tareas sobre la pendiente, analizada bajo un cambio de escala no homogéneo. | Teoría de la interpretación-información gráfica (representativa e iconográfica) desarrollada por (Pimm, 1995).<br><br>Uso de las TIC´S asociadas a las representaciones analíticas y geométricas de funciones (Yerushalmy, 1991). | La identificación de dos perspectivas sobre la pendiente (Analítica y Visual).<br><br>Analítica: La pendiente es una propiedad de la función (Ecuación Lineal) y es invariante bajo un cambio de escala no homogéneo<br><br>Visual: La pendiente es una propiedad de la gráfica de una función lineal y varía bajo un cambio de escala no homogéneo. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Moore-Russo, D., Conner, A., Rugg, K. (2011). | Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. | Explorar la argumentación, factores del entorno de aprendizaje y las conceptualizaciones de pendiente. | La teoría de las imágenes conceptuales desarrolla por (Tall y Vinner, 1981; Vinner & Dreyfus, 1989).<br><br>La teoría del co-constructivismo (Valsiner, 1994).<br><br>Elementos de la argumentación de Krummheuer (1995) y de Yackel (2002). | Refina y amplia las ocho conceptualizaciones de pendiente dadas por Stump (1999, 2001), añadiendo las conceptualizaciones siguientes:<br>9. Determinación de la propiedad.<br>10. Indicador de comportamiento.<br>11. Constante lineal.<br>Existe preferencia de los estudiantes por el pensamiento algebraico formal por encima del pensamiento geométrico. |
| Nagle, C. y Moore-Russo, D. (2014) | Slope Across the Curriculum: Principles and Standards for School Mathematics and Common Core State Standards. | Investigar cómo se manifiesta el concepto de pendiente y su estructuración en el currículo de la enseñanza básica. | Conceptualizaciones de pendiente descritas por Stump (1999, 2001) y Moore-Russo, Connor y Rugg (2011). | El número total de referencias, a la pendiente, en ambos currículos de primaria y secundaria fue similar, para PSSM (57) y CCSSM (53).<br>Las conceptualizaciones predominantes, encontrada en los estándares PSSM y CCSSM sobre pendiente son: Propiedad Funcional, Constante Lineal y Situación del Mundo Real.<br><br>CCSSM describe la creación de razonamiento covariacional junto con el razonamiento proporcional en el grado 6, por su parte PSSM se propone construir una base de razonamiento covariacional en los grados 3-5 para comprender las relaciones proporcionales en el grado 6. |
| Cho, P. y Nagle, C. (2017). | An Analysis of Students' Mistakes on Routine Slope Tasks. | Investigar los errores que presentan los estudiantes universitarios en tareas rutinarias que involucran la pendiente. | Conceptualizaciones de pendiente descritas por Moore-Russo, Connor y Rugg (2011).<br><br>Teoría sobre las etapas del razonamiento covariacional propuesta por Carlson et al. (2002). | Identifican 18 errores que cometen los estudiantes en tareas rutinarias sobre la pendiente. Entre ellos destacan los aritméticos y aseveran que son los más generalizados y que fueron trasmitidos a la manipulación algebraica por la mayoría de los estudiantes.<br><br>Explicitan los elementos procedimentales y conceptuales que pueden vincularse con los errores identificados. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Beyerley, C. y Thompson, P. (2017) | Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. | Investigar los significados que poseen los profesores de matemáticas de secundaria sobre los conceptos de pendiente, medida y tasa de cambio. | Teoría sobre las etapas del razonamiento covariacional propuesta por Carlson et al. (2002).<br><br>Teoría de los significados desarrollada por Thompson, P. et al. (2014) y Thompson, P. (2016). | Revela que los significados que poseen los profesores de secundaria sobre la pendiente son limitados y poco productivos.<br><br>Se presentan evidencias de que los profesores no saben el por qué se usa la división en la fórmula de la pendiente. |

**Tabla 1.** Investigaciones más relevantes y significativas sobre la pendiente.

## 3. Sobre las conceptualizaciones-concepciones

Antes de entrar en lo hallado en la literatura, y puesto que los autores investigados no siempre definen los términos que utilizan o les atribuyen sentidos algo diferentes, conviene que se establezca qué significado se asumen en relación con los términos que se emplea en este apartado. Según esto, usará "concepto" para designar la idea de un objeto matemático y por "conceptualización" la representación mental que un individuo posee de un concepto matemático y que irremediablemente estará ligada o condicionada a su formación y experiencia.

Las teorías de Tall y Vinner (1981) y Vinner (1994) sobre imágenes conceptuales y definición de conceptos distinguen entre cómo se define formalmente un concepto en Matemática y el proceso cognitivo que permite concebir el concepto. Estos autores emplean el término "concept definition" en el proceso cognitivo (no formal) para referirse a la definición del concepto asumida por el estudiante, por lo que la definición del concepto tiene un carácter personal. El término "concept image" se refiere a todas las representaciones mentales, procesos y propiedades que conoce el estudiante asociadas a un determinado concepto. La imagen del concepto se construye a lo largo del tiempo, es producto de las experiencias y evoluciona a medida que el individuo se enfrenta a nuevas situaciones y es capaz de resolverlas.

Debe hacerse notar que ni en los trabajos sobre conceptualizaciones desarrollados por Stump (1999, 2001a) ni en los ampliados y refinados por Moore-Russo, Conner y Rugg (2011a) se define el término conceptualización de manera explícita. Cada una de las conceptualizaciones que los autores refieren se basa en alguna representación particular del concepto de pendiente asociada a un contexto específico y toma en consideración una cualidad esencial del concepto. Por ejemplo, cuando se conceptualiza la pendiente como la medida de la inclinación de la recta en relación con la parte positiva del eje horizontal se hace referencia a una representación geométrica (contexto) del concepto de pendiente y dicha inclinación se toma como característica esencial del concepto. En ese mismo sentido, Hoffman (2015) asevera que una conceptualización se refiere a una representación específica del concepto (asociada a una característica esencial), mientras que la imagen del concepto es el número total de conceptualizaciones que los profesores han asociado con dicho concepto.

Thompson, (1992, p. 130) considera las concepciones como "una estructura mental más general, que abarca creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, y gustos". Remesal, (2006) y Moreano, Amad, Cruz y Cuglievan, (2008) consideran las concepciones como un sistema organizado de creencias que se originan y desarrollan a través de las experiencias e interacciones en las que el individuo participa, repercutiendo en las interacciones subsiguientes con el mundo que le rodea y, según añaden Moreno y Azcárate (2003) en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que realiza. En ese sentido, el término "concepción" proporciona un marco para describir la percepción global y el conocimiento de la evaluación de los docentes.

Para Leong (2014) una concepción es un punto de partida inclusivo que tiene en cuenta las formas de conocer, las creencias de los profesores, actitudes, perspectivas, valores y otras construcciones posibles que ellos estimen útiles para describir sus prácticas en el aula. Según Brown (2004), mediante las concepciones un individuo entiende, responde e interactúa con un fenómeno y las experimenta dentro de una cultura (Brown, Hui, Yu & Kennedy, 2011). A los efectos del presente trabajo entenderemos las concepciones en el sentido de Leong (2014).

A partir de lo anteriormente expuesto y a modo de conclusión de esta sección podemos establecer que la concepción es un concepto más amplio y general que el de conceptualización, ya que la conceptualización se entiende como una representación específica asociada a una determinada característica esencial de un concepto en un contexto particular; en tanto que la concepción se considera como un conjunto de elementos asociados con la esfera cognitiva–conceptual (significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, etcétera) que favorecen la estructuración del razonamiento y la toma de decisiones.

## 4. Los primeros estudios sobre la pendiente

Dentro de los estudios relacionados con la pendiente, la tesis doctoral de Janvier (1978) puede considerarse como pionera. Aunque está dedicada fundamentalmente al análisis de gráficas de funciones y sus relaciones e interpretaciones, dicha investigación realiza un estudio de algunas dificultades sobre la comprensión del concepto de función, basado en sus gráficas, y pone de manifiesto errores relacionados con el concepto de pendiente. En particular, se explicita el error conocido como pendiente–altura. En el mismo sentido, en la investigación sobre gráficas y sus relaciones de Barr (1980,1981) analiza la comprensión de los estudiantes del concepto de pendiente y describe un estudio para identificar y cuantificar sus dificultades.

McDermott, Rosenquist y van Zee (1983) encuentran la confusión asociada al error conceptual pendiente–altura en las respuestas de los estudiantes universitarios a los que les propusieron tareas en las que había que manejar gráficas de tiempo y velocidad. Estos autores atribuyen el error a múltiples causas con lo que hacen patente la gran complejidad del concepto de pendiente. También Preece (1983) corrobora los hallazgos de Janvier (1978) y McDermott, et a1. (1983) sobre dicho error conceptual, utilizando para su investigación elementos dinámicos. Respecto al trabajo de McDermott, et al. (1983), Clement (1985) identifica como causa del error el uso indebido que los estudiantes hacen de la característica gráfica de la altura en lugar de utilizar la pendiente para representar la velocidad.

A partir de los estudios realizados sobre gráficas y sus interpretaciones, Clement (1985) estructura y propone una clasificación de los errores que cometen los estudiantes en la resolución de problemas relativos a estas tareas. Así mismo, este autor propone algunas explicaciones cognitivas para los errores detectados. Dicho estudio se sustenta en un modelo por competencias asociadas a los conocimientos básicos para elaborar e interpretar gráficas. Este trabajo ratifica los hallazgos de Janvier (1978) pues encuentra en los estudiantes el error pendiente-altura pero, además, evidencia otro error al que denomina pendiente-curvatura. En su clasificación de conceptos erróneos en el estudio de gráficas, Clement (1985) da una gran importancia a los errores conceptuales relacionados con la pendiente y las características incorrectas de una gráfica.

En la tesis doctoral de Zaslavsky (1987), se exponen algunos obstáculos y errores teórico–conceptuales referentes a la pendiente. Por ejemplo, al proponer a los alumnos encontrar una ecuación para la gráfica de una parábola dados tres puntos, algunos estudiantes, equivocadamente, tienen en cuenta sólo dos puntos para buscar la ecuación. Ello permite suponer que está operando una mentalidad o pensamiento lineal, esto es, que se toman dos puntos porque son suficientes para calcular la pendiente de la recta que los contiene. A continuación, ese "valor de pendiente" hallado lo toman como coeficiente principal de la ecuación de la parábola. Esencialmente esta conducta, es una manifestación de la tendencia a la ejecución procedimental y puede estar provocada, por el abuso de tareas que exigen determinar la ecuación de una recta o función lineal conocidos dos puntos.

El elemento fundamental de la investigación realizada por Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) que pretendemos resaltar, es su estudio sobre la naturaleza del aprendizaje en términos de intuiciones y conceptos erróneos y sobre los enfoques plausibles de la enseñanza a través de secuencias, explicaciones y ejemplos (contraejemplos). Como venimos diciendo, las investigaciones realizadas contienen tareas que sacan a la luz dificultades y conceptos erróneos de los estudiantes en relación con el aprendizaje de las gráficas en general o de parte de ellas. Los autores han agrupado dichas dificultades en tres categorías principales: Confusión de intervalo-punto, Confusión de pendiente-altura e Interpretación icónica. Nótese que la segunda categoría está relacionada con la pendiente y ha sido objeto de estudio en investigaciones precedentes (Janvier, 1978; Bell y Janvier, 1981; Preece, 1983; Clement, 1985; McDermott et al., 1987). Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) sostienen que si los estudiantes consideran la gráfica como fraccionada o en trozos, están poniendo de manifiesto una tendencia general a interpretar las gráficas puntualmente, lo que en definitiva se deriva de la confusión pendiente/altura.

Las repercusiones cognitivas de una escasa comprensión del concepto de pendiente y de la tasa de cambio han despertado también el interés de algunos investigadores motivando varios estudios. Los trabajos de Thompson (1994b), Patrick Thompson y Alba Thompson (1994), señalan las deficiencias detectadas al entrevistar a estudiantes de enseñanza media sobre la comprensión de la tasa constante. Por otra parte, Hauger (1997), utilizando gráficas distancia-tiempo y situaciones tanto de aceleración como de frenado, hace un estudio de casos y encuentra que los estudiantes descubren sus errores y refinan sus conocimientos cuando trabajan con la tasa de cambio.

La investigación desarrollada por Hauger (1997) implica consecuencias para la instrucción pues recomienda a los profesores de cálculo y precálculo que brinden oportunidades a los estudiantes para que usen sus conocimientos y la relación entre pendiente y cambio en intervalos, con lo que favorecerán la comprensión de la tasa de cambio. De manera más general, los profesores deben analizar y sintetizar el conocimiento que los estudiantes utilizan para que determinadas situaciones se doten de sentido y para propiciar que usen sus conocimientos en la construcción de nuevas relaciones y conceptos matemáticos.

Por lo expuesto hasta ahora, se puede asegurar que las investigaciones anteriores a Stump (1999) no trataban específicamente el concepto de pendiente sino que éste subyacía en los estudios sobre funciones, gráficas o tasa de cambio. La investigación de Stump (1999) rompe esa tendencia y examina la forma en que los profesores presentan el concepto de pendiente a sus alumnos, observando que este concepto se definía de diferentes maneras, atendiendo al contexto y a una característica particular del concepto en correspondencia con dicho contexto. En la Tabla 2 figura el conjunto de conceptualizaciones de la pendiente confeccionada por esta autora tras examinar las herramientas utilizadas en un gran número de investigaciones sobre la pendiente.

## 5. Las conceptualizaciones de pendiente en estudiantes y profesores

Las investigaciones que pueden considerarse precedentes al estudio de las conceptualizaciones centradas en la pendiente son las desarrolladas por Barr (1980, 1981) y Azcárate (1992). Barr (1980, 1981) exploró el conocimiento de los estudiantes sobre la pendiente y reportó las dificultades o confusiones encontradas. Azcárate (1992) investigó los esquemas conceptuales y perfiles de estudiantes preuniversitarios sobre la base de los “concept image” y “concept definition” de Tall y Vinner (1981), definiendo tres perfiles: el geométrico, el operativo y el funcional. El perfil geométrico se caracteriza por la asociación de la pendiente con el término “inclinación”, con la gráfica de la recta, con el ángulo de inclinación, con la distancia o con un punto del plano cartesiano; el perfil operativo es el relacionado con el algoritmo para calcular la pendiente; y el perfil funcional hace referencia a la correspondencia entre los incrementos de las variables.

Stump (1999) prosigue esta línea pero le da mayor precisión y lo centra en la comprensión matemática de los profesores sobre la pendiente y en el dominio que éstos poseen sobre el contenido de la enseñanza. Al igual que Azcárate (1992), investiga el conocimiento del contenido desde la teoría de las imágenes y las definiciones conceptuales de Tall & Vinner (1981), el conocimiento del contenido pedagógico desde la posición de Shulman (1986) y la comprensión desde la perspectiva de las conexiones de McDiarmid, Ball y Anderson, (1989, p. 193) y del conocimiento conceptual y el procedimental de Hiebert y Lefevre, (1986). Identificó siete categorías relativas a las definiciones de pendiente: razón geométrica (G), razón algebraica (A), propiedad física (P), propiedad funcional (F), coeficiente paramétrico (PC), trigonométrica (T) y cálculo (C). En 2001(a), la propia Stump propuso una octava categoría, la denominada, situaciones del mundo real (R). Posteriormente, Moore-Russo (2011a) aún añadió tres conceptualizaciones más: propiedad determinante (D), constante lineal (L) e indicador de comportamiento (B). (Véase Tabla 2).

| Categoría | Pendiente como | Código |
|---|---|---|
| **Razón geométrica** | Rise over run, razón entre los desplazamientos vertical y horizontal en la gráfica de una recta (cuyas representaciones dan pequeños triángulos rectángulos con la recta). | G |
| **Razón Algebraica** | Cambio en $y$ entre cambio en $x$, expresado en la razón algebraica $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ó $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. | A |
| **Propiedad física** | Propiedad de una recta descrita con expresiones como: grado, inclinación, tendencia, ladeo, declive, etc. | P |
| **Propiedad funcional** | Razón de cambio constante entre dos variables o cantidades, bien encontrada en representaciones como tablas, descripciones verbales, etc. (v. gr. cuando $x$ aumenta 2, $y$ aumenta 3); o bien observada en situaciones que implican razones de proporcionalidad constante, donde la razón referida a la unidad es la pendiente. | F |
| **Coeficiente Paramétrico** | Coeficiente $m$ (o su valor numérico) en $y = mx + b$ o $y - y_1 = m(x - x_1)$ | PC |
| **Trigonométrica** | Propiedad relacionada con el ángulo que forma una recta con la horizontal (eje $x$); tangente del ángulo de inclinación. | T |
| **Cálculo** | Medida relacionada con la derivada como la tangente a la curva en un punto, o cómo razón de cambio instantánea para cualquier función (incluso una no lineal). | C |

| | | |
|---|---|---|
| **Situación del mundo real** | Situación física (estática): rampas, escaleras, montañas, cimas.<br>Situación funcional (dinámica): relación entre dos variables en otros contextos, v. gr., distancia versus tiempo, velocidad versus tiempo. | R |
| **Propiedad determinante** | Propiedad que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares; propiedad con la que una recta puede ser determinada si se conoce un punto de ella. | D |
| **Constante lineal** | "Recta" o "plana" que denota ausencia de curvatura y que permanece inalterable cualquiera que sea el desplazamiento que se haga en una determinada dirección de traslación; propiedad única para la "rectitud" de figuras, (lo que hace que una línea sea "recta" o la "rectitud" de una línea); la constante o pendiente se obtiene con cualquier par de puntos de la recta | L |
| **Indicador de comportamiento** | Número real con signo que indica crecimiento (+), decrecimiento (−), tendencia horizontal de la línea (0). Si no es cero, indica la existencia de intersección con el eje $x$. | B |

**Tabla 2.** Conceptualizaciones de la Pendiente. Adaptado de Nagle y Moore-Russo (2014)

Stump (2001b) prosigue la investigación sobre comprensión de la pendiente pero ahora como medida y en estudiantes de precálculo. Para ello los estudiantes respondieron a preguntas acerca de situaciones del mundo real, como situaciones físicas que involucraban la pendiente como una medida de inclinación (T) y de situaciones funcionales que involucraban la pendiente como una medida de la razón de cambio (F). Para las situaciones físicas, los estudiantes midieron la inclinación con ángulos en lugar de utilizar las razones. En general, demostraron una mejor comprensión de la pendiente en situaciones funcionales, pero muchos tuvieron problemas para interpretar la pendiente como una medida de la razón de cambio.

Recuperando los estudios sobre profesores pero en un contexto diferente del de USA, Mudaly y Moore–Russo (2011) analizaron el concepto de pendiente de un grupo de 251 profesores de matemáticas de secundaria, sudafricanos, que enseñaban en poblaciones consideradas históricamente desfavorecidas. Sin haberles impartido ninguna instrucción previa, se les aplicó un cuestionario y se obtuvo que algunos de los encuestados tenían una comprensión muy escasa o nula del concepto, mientras que otros evidenciaban un buen entendimiento de la pendiente al ser capaces de conceptualizarla de muchas maneras diferentes. Las conceptualizaciones mayoritariamente evocadas por los profesores fueron coeficiente paramétrico (PC), trigonométrica (T) e indicador de comportamiento (B); contrariamente, la propiedad funcional (F), la situación del mundo real (R) y la propiedad física (P) fueron evocadas con muy escasa frecuencia.

Nagle, et al. (2013a) estudiaron las conceptualizaciones de pendiente en un curso introductorio de cálculo, esto es, en nivel universitario, examinando tanto a alumnos como a profesores. Encontraron que los estudiantes confían en conceptualizaciones de pendiente basadas en procedimientos, mostrando poca evidencia de razonamiento covariacional. En contraste, los profesores demostraron una comprensión multidimensional de la pendiente como una propiedad funcional, que se aplica a situaciones del mundo real y desempeña un papel integral en el desarrollo de conceptos clave del Cálculo. No resultó frecuente que los profesores utilizaran la determinación creciente / decreciente utilizando la pendiente, al contrario de lo que sucedió en el caso de los alumnos. En estos últimos se identificó la influencia cultural (académica y geográfica) en la conceptualización de pendiente tal y como se había encontrado en investigaciones anteriores, en las que se detectaba la repercusión del plan de estudios de matemáticas de secundaria en la preferencia por el uso de una u otra conceptualización.

Aun volviendo a trabajar con estudiantes y profesores, Nagle, Moore–Russo y Styers (2013b) dan un giro a sus observaciones pues estudian lo que los profesores creen que piensan los alumnos sobre la pendiente una vez que examinan sus declaraciones circunscritas al plan de estudios. Las respuestas de los profesores proporcionaron información sobre su Conocimiento de Contenido y Estudiantes (KCS) y Conocimiento de Contenido y Currículo (KCC). Los resultados sugieren que los profesores valoran la terminología académica relacionada con la pendiente, tienen perspectivas limitadas sobre la pendiente en contextos del mundo real e intentan extender la noción de pendiente al cálculo previo. Los profesores no mostraron seguridad sobre cómo interpretar la conceptualización constante lineal (L) que se refiere a la "rectitud de la recta", particularmente al pasar de relaciones lineales a no lineales y comprender la tasa de cambio variable. Además, tendían a proporcionar interpretaciones algebraicas de la pendiente (A), incluso cuando las declaraciones estaban abiertas a interpretaciones más trigonométricas (T) o geométricas (G). Este trabajo hace patente la necesidad de que los profesores deben tener un conocimiento suficiente del plan de estudios (KCC) y de las repercusiones del mismo en los estudios posteriores si quieren preparar a sus alumnos para estudios superiores. Ese es el caso del concepto de pendiente que, al resultar fundamental para conceptos más avanzados como la derivada (HCK), debe interpretarse de la forma más amplia posible.

Stanton y Moore–Russo (2012) examinan los currículos de la enseñanza primaria, secundaria y bachillerato de los 50 estados de USA para determinar cómo tratan el concepto de pendiente. Encuentran que la conceptualización más frecuente en estos documentos es la razón geométrica (G) (aparece en 45 estados), seguida muy de cerca por las de indicador de comportamiento (B), propiedad determinante (D), propiedad funcional (F) y la razón algebraica (A) (cada una encontrada en 43 estados). Las conceptualizaciones menos frecuentes fueron la de pendiente como una propiedad física (P) (encontrada en seis estados) y trigonométrica (T) (encontrada en 10 estados). Sin embargo, los currículos de la Escuela Primaria y Secundaria incluyen diferencias que reflejan enfoques alternativos para cubrir las nociones y prerrequisitos claves relacionadas con la pendiente y para extender las ideas de pendiente a funciones no lineales.

Hasta 2013 los estudios de las conceptualizaciones de la pendiente se centran en una descripción aislada entre ellas. Ese año, Nagle et al. (2013a) cambian su enfoque y pasan a estudiarlas como una Red de Componentes Conectados, aportando nuevos elementos teóricos. En particular, combinan la investigación sobre la comprensión, procesal versus conceptual, con la investigación sobre las interpretaciones, visuales y analíticas, de la pendiente para así establecer nuevas conexiones entre las conceptualizaciones. La pendiente es un concepto crítico en la educación matemática y sus limitaciones en la comprensión de los estudiantes provienen de la falta de conexiones que hacen entre los diversos componentes y subcomponentes de la pendiente. Esta nueva orientación de la investigación es relevante porque puede ayudar a estudiantes y profesores a desarrollar una mejor compresión del concepto en cuestión.

Nagle, Casey y Moore–Russo (2017), aplicando la teoría de la transferencia del conocimiento de Royer, Mestre, y Dufresne (2005), dirigen su atención a investigar si los alumnos utilizan sus conceptualizaciones de la pendiente cuando, en estadística, partiendo de una recta imprecisa deben encontrar la recta de mejor ajuste. Tanto el contexto situacional de las tareas planteadas (el precio del boleto versus la asistencia al teatro) como el matemático (los puntos alternos dados como datos) influyeron en el conocimiento previo que los estudiantes transfirieron a la nueva tarea. Cabe deducir por ello que la comprensión conceptual de la pendiente no garantiza necesariamente la transferencia a un nuevo contexto problemático y que no resulta superflua la contextualización al mundo real. Afirman que los estudiantes transfirieron las conceptualizaciones de la propiedad funcional (F) y del mundo real (R) de la pendiente mientras empleaban el razonamiento covariacional. En la búsqueda de la línea de mejor ajuste tampoco bastó la conceptualización indicador de comportamiento (B) sino que hubo de concurrir al razonamiento covariacional y la acción mental 2 que, según Carlson et al., 2002, tiene en cuenta el sentido del cambio; ello avala la conjetura de que estas nociones están estructuralmente relacionadas.

Deniz y Kabael (2017) retoman las conceptualizaciones como objetos de estudio pero desde el punto de vista de la teoría APOS (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) propuesta por Dubinsky (1991). Investigaron los procesos de construcción y matematización de la pendiente en estudiantes que cursaban 8º grado, centrándose en las conceptualizaciones razón geométrica (G) y razón algebraica (A). Observaron que los estudiantes que podían construir el concepto de pendiente a nivel de acción no podían construirlo como una razón. Podían calcular la pendiente con el "rise over run" o con la fórmula, sin embargo, no podían conceptualizar la invariabilidad de la pendiente en todos los tramos de la recta (L), ni interrelacionar esta interpretación con la razón algebraica (A) y la interpretación de la razón geométrica (G). Notaron tendencia hacia la interiorización (etapa de proceso) cuando la invariancia de la pendiente entre dos puntos cualesquiera de la recta quedaba justificada por la relación algebraica. Otro indicador que demuestra la construcción de la pendiente en la etapa del proceso es el uso de la relación algebraica $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ asociada a la interpretación geométrica de la pendiente. Afirma que la etapa de objeto ocurrirá durante el aprendizaje de conceptos como la derivada donde el concepto de pendiente es un requisito previo y que en 8º grado los indicadores de la etapa de objeto no se pueden observar explícitamente.

Siguiendo la misma línea, en un estudio más reciente Nagle et al. (2018) extienden la investigación sobre la pendiente conectando las 11 conceptualizaciones de la pendiente con la Teoría APOS. En esencia plantean que el concepto de pendiente puede construirse interrelacionando las "formas de pensar la pendiente" y los "usos de la pendiente". Son formas de pensar la pendiente como acción, proceso u objeto, las conceptualizaciones: razón algebraica (A), razón geométrica (G) y propiedad funcional (F); la fusión de estas da origen a la conceptualización constante lineal (L), que representaría el objeto pendiente. Los usos de la pendiente estarían en las otras siete conceptualizaciones: coeficiente paramétrico (PC), indicador de comportamiento (B), propiedad física (P), propiedad determinante (D), situación del mundo real (R) y, cuando sea apropiado, trigonométrica (T) y cálculo (C). Esta propuesta puede ayudar a los profesores a elaborar actividades matemáticas para desvelar las etapas de comprensión del concepto de pendiente en los estudiantes, o podría usarse en el diseño de materiales para la enseñanza que tengan en cuenta las formas de facilitar la reformulación de las ideas de los estudiantes sobre la pendiente para transitar hacia etapas más avanzadas.

## 6. Conclusiones

Los estudios primarios de la pendiente tienen como objetivo explorar el conocimiento de los estudiantes (Barr, 1980, 1981) y de sus esquemas conceptuales (Azcárate, 1992). La teoría de Tall y Vinner (1981) sobre concept image y concept definition, constituyó una base importante para conocer la estructura cognitiva de los individuos acerca del concepto de pendiente. Sobre esta base y la de la Teoría sobre el Conocimiento Pedagógico del Contenido introducida por Shulman (1981) Stump identificó lo que a la postre los investigadores denominaron conceptualizaciones de la pendiente.

Utilizando las conceptualizaciones de pendiente, se han realizado múltiples estudios que consideran la pendiente en secundaria, bachillerato y universidad, en profesores, en estudiantes y en documentos curriculares. Nagle et al. (2013a) dan un viraje proponiendo la Red de Componentes Conectados combinada con las comprensiones, procesal y conceptual, y las interpretaciones, visuales y analíticas, sugerida por Stump (2001a). Carpenter, 1986; Hiebert y Carpenter, 1992; Hiebert y Lefevre, 1986, consideran la comprensión matemática como derivada del establecimiento de amplias redes de conexión entre conceptos y procedimientos. De aquí devienen lo que se denomina conocimiento procedimental y el conocimiento conceptual que juegan un papel importante en las conexiones matemáticas, ya que ambos están correlacionados positivamente como lo señalan Rittle-Johnson y Koedinger, (2009); Rittle-Johnson y Schneider (2015); Rittle–Johnson, Siegler y Alibali, (2001). El conocimiento o comprensión conceptual y procesal están fuertemente ligados a las conexiones, sin embargo, constituyen un reto para profesores e investigadores, ya que varios investigadores, como Birgin (2012), Deniz y Kabael (2017), Nagle. Moore–Russo y Styers (2013b) y Wagener (2009), han reportado que los estudiantes desarrollan más el conocimiento procedimental que el conceptual.

El estudio de las conceptualizaciones proviene del interés por desentrañar tanto el Conocimiento Pedagógico del Contenido, introducido por Shulman (1981)[1], como las imágenes conceptuales de Tall y Vinner (1981). Sin embargo, recientemente, Beyerley y Thompson (2017) marcan una prospectiva diferente; proponen atender al Significado Matemático para la Enseñanza en vez del Conocimiento Matemático para la Enseñanza de Ball et al. (2008), ya que argumentan que el significado connota algo personal y los significados de una persona están entrelazados, mientras que el conocimiento es menos personal y más declarativo, permaneciendo separado del conocedor. Un profesor que posee significados productivos podrá transmitir y desarrollar significados productivos en sus estudiantes. En virtud de que este enfoque se prioriza el significado sobre el conocimiento de contenidos matemáticos del profesor, mismo que puede generar cambios sustanciales tanto en la investigación como en la docencia en general y del concepto de pendiente en particular.

En los dos últimos años, la teoría APOS, surgida en la década de los 90, ha cobrado nuevo impulso al utilizarse como base teórica para sustentar las conceptualizaciones de la pendiente. APOS es un marco teórico que permite estudiar tanto el desarrollo de estructuras cognitivas o etapas de comprensión, como el proceso mismo de aprendizaje de un concepto. APOS se basa en la teoría piagetiana de la abstracción reflexiva, que describe las ocurrencias cognitivas en la mente en el proceso de aprendizaje de un concepto (Dubinsky, 1991), y, por tanto, sirve para mostrar cómo se aprenden los conceptos matemáticos (Oktaç y Çetin, 2016, p. 164).

Según APOS, la construcción del concepto comienza con acciones, progresa luego a procesos dinámicos mediante la interiorización de las acciones y, finalmente, evoluciona de procesos dinámicos a objetos encapsulados (Tall, 1999). Deniz y Kabael (2017) refieren que los estudiantes de 8º dan muestras de construir el concepto de pendiente como una fórmula o una serie de operaciones sin darle sentido en la etapa de acción. En la etapa de proceso encuentran ciertas dificultades en la interiorización de la pendiente como razón constante en todos los tramos de la recta y afirman que la etapa de objeto ocurrirá hasta el aprendizaje de la derivada. Nagle et al. (2018), sobre la base de misma teoría, plantean una sistematización de las conceptualizaciones más integradora, que consideramos tiene potencialidades para seguirse desarrollando tanto en la investigación como en la docencia. Las formas de pensar versus los usos de la pendiente que incluyen todas las conceptualizaciones marca una dirección específica en la investigación que puede ser desarrollada en un futuro.

Por otro lado, la mayoría de los estudios sobre pendiente se han efectuado a pequeña escala por lo que sus hallazgos son limitados y parciales; lo que implica que, a partir del desarrollo teórico actual, se debe seguir investigando sobre las causas que provocan las dificultades y los obstáculos y sobre el diseño y/o uso de alternativas didácticas que favorezcan el proceso de enseñanza–aprendizaje del concepto de pendiente en la escuela.

En tal sentido somos del criterio que algunas de las futuras investigaciones en este ámbito pueden orientase hacia:

1. Estudiar los obstáculos y/o errores que manifiestan los estudiantes en el proceso de resolución de tareas sobre la pendiente.
2. ¿Cuáles son las causas que provocan los errores que manifiestan los estudiantes en la resolución de tareas sobre la pendiente?
3. ¿Cómo utilizar los obstáculos y/o errores sobre la pendiente para diseñar estrategias metodológicas para favorecer su proceso de enseñanza–aprendizaje?
4. Establecer las conexiones y/o relaciones entre las diferentes conceptualizaciones del concepto de pendiente en función de favorecer el proceso de enseñanza–aprendizaje de la pendiente
5. ¿Qué implicaciones tienen las conceptualizaciones de la pendiente en el proceso de formación y desarrollo de conceptos matemáticos superiores?
6. ¿Qué instrumentos elaborar y/o utilizar para investigar los significados que poseen los profesores sobre la pendiente en un determinado contexto sociocultural (léase país, estado, región)?
7. ¿Qué significados sobre la pendiente promueve o estimula el profesor en el aula? Y ¿cómo aprenden los estudiantes estos significados?
8. Extender el estudio desarrollado sobre las conceptualizaciones a otros conceptos básicos de la matemática escolar.

## 8. Bibliografía

### Básica

Azcárate, C. (1992). Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de unos alumnos de segundo de BUP en relación con el concepto de pendiente de una recta. *Epsilon*, 24, 9-22.
Barr, G. (1980). Graphs, gradients and intercepts. *Mathematics in School*, 9(1), 5-6.
Barr, G. (1981). Some student ideas on the concept of gradient. *Mathematics in School*, 10(1), 14-17.
Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics*, 2(1), 34-42.
Beyerley, C. y Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *Journal of Mathemaical Behaviour*, 48, 168–193.
Birgin, O. (2012). Investigación de la comprensión de los estudiantes de octavo grado de la pendiente de la función lineal, Bolema: *Boletín de Educación Matemática*, 26(42), 139–162.
Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. *Presented at the Ninth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 369–375, Utrecht University: Netherlands.
Courtney, N., Martínez-Planell, R. & Moore-Russo, D. (2018). Using APOS theory as a framework for considering slope understanding, *Journal of Mathematical Behavior*, en prensa.
Deniz, Ö. y Kabael, T. (2017). 8th Grade Students' Processes of the Construction of the Concept of Slope, *Education and Science*, 42(192), 139–172.
Dolores, C., Rivera, M. y García, J. (2018). Exploring mathematical connections of pre–university students through task involving rate of change, International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology. URL: http://doi.org/10.1080/0020739x.2018.1507050.
Hauger, G. (1997). Growth of Knowledge of Rate in Four Precalculus Students. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association* (Chicago, IL, March 24-28).

Hoffman, W. (2015). Concept image of slope: Understanding middle school mathematics teachers' perspective through task-based interviews. (Doctoral dissertation). The University Of North Carolina At Charlotte.

Janvier, C. (1978). The interpretation of complex cartesian graphs representing situations-studies and teaching experiments. (Doctoral Dissertation, University of Nottingham, England).

McDermott, L., Rosenquist, M. y van Zee, E. (1983). Student difficulties in connecting graphs, concepts and physical phenomena. Presented at the *American Educational Research Association meetings*, Montreal, Canada.

McGee, D., Moore-Russo, D. y Martinez, R. (2015) Making Implicit Multivariable Calculus Representations Explicit. A Clinical Study, *PRIMUS*, 25 (6), 529-541, DOI: 10.1080/10511970.2015.1038858.

Moore-Russo, D., Conner, A., & Rugg, K. (2011a). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 3–21.

Mudaly, V. y Moore-Russo, D. (2011). South African teachers' conceptualisations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an Advanced Certificate in Education programme. *Pythagoras*, 32(1), 1−8

Nagle, C. y Moore–Russo, D. (2013a). Slope: A Network Of Connected Components. In Martinez, M. & Castro Superfine, A. (eds.). *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 127–135, University of Illinois: , Chicago.

Nagle, C., & Moore-Russo, D. (2013). Connecting slope, steepness, and angles. *Mathematics teacher*, 107(4), 272-279.

Nagle, C. y Moore–Russo, D. (2014). Slope Across the Curriculum: Principles and Standards for School Mathematics and Common Core State Standards. *The Mathematics Educator*, 23 (2), 40–59.

Nagle, C., Casey, S. & Moore-Russo, D. (2017). Slope and Line of Best Fit: A Transfer of Knowledge Case Study, *School Science and Mathematics*, 117(1−2), 13−26.

Nagle, C., Moore-Russo, D. and Styers, J. (2013b). Teachers' Interpretations of Student Statements about Slope. In E. Galindo, and J. Newton, (eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 589–596, Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators: Indianapolis.

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013a). Calculus student´s and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1491-1515.

Rivera, M. y Dolores, C. (2017). Concepciones de la Pendiente en el Curriculum Oficial de la Educación Básica. En Congreso Nacional de Matemática Educativa – *COMIE*. San Luis Potosí.

Stanton, M. y Moore–Russo, D. (2012). Conceptualizations of Slope: A Review of State Standards. *In School Science and Mathematics*, 112 (5), 270–277.

Stump, S. (1999): Secondary Mathematics Teachers' Knowledge of Slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11 (2), 124-144.

Stump, S. (2001a). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *Journal of Mathematical Behavio*r, 20, 207–227.

Stump, S. (2001b). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, 101, 81– 89.

Tesuscher, D. y Reys, R. (2012). Rate of Change: AP Calculus Students' Understandings and Misconceptions After Completing Different Curricular Paths. In School Science and Mathematics, 112 (6), 359–376.

Teuscher, D. y Reys, R. (2010). Slope, rate of change, and steepness: Do students understand these concepts? *Mathematics Teacher*, 103, 519–524.

Tyne, J. (2016) "Calculus Students' Reasoning About Slope and Derivative as Rates of Change". Electronic eses and Dissertations. 2510. http://digitalcommons.library.umaine.edu/etd/2510.

Wagener, LL. (2009). A worthwhile task to teach slope. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(3), 168–174.
Walter, J. G., y Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: Making sense of slope through additive structures. Educational Studies in Mathematics, 65(2), 203-233.
Zaslavsky, O., Sela, H. y Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 119–140.

## Complementaria

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399–431.
Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.
Borello, M. (2007). Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte. Tesis de maestría no publicada, Cicata, IPN, México, D.F., México.
Boyer, C. (1989). A History of Mathematics. John Wiley & Sons, inc., New York.
Brown, G., Hui, S., Yu, W. y Kennedy, K. (2012). Teachers' conceptions of assessment in Chinese contexts: A tripartite model of accountability, improvement, and irrelevance. *International Journal of Educational Research*, 50 (5-6), 307-320.
Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 352-378.
Carlson, M. P., Oehrtman, M. C., & Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assessment (PCA) instrument: A tool for assessing students' reasoning patterns and understandings. *Cognition and Instruction*, 28, 113-145.
Carpenter, T.P. (1986) Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic, in J. Hiebert (ed.), *Conceptual and Procedural knowledge: The Case of Mathematics*, 13-132, Erlbaum, Hillsdale, NJ.
Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86. http://doi.org/10.2307/749228
Dolores, C. (2007). Elementos para una aproximación variacional a la derivada. México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.
Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (ed.) *Advanced mathematical thinking*, 95-126, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.
Dubinsky, E. D., & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton (ed.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level, 275-282, Kluwer Academic Publishers: NY.
Gómez, E., Fernando, D., Aponte, G. y Betancourt, L. (2014). Metodología para la revisión bibliográfica y la gestión de información de temas científicos, a través de su estructuración y sistematización. *Dyna* [en linea] 81. Disponible en:<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=49630405022> ISSN 0012-7353
Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*: A project of the National Council of Teachers of Mathematics, 65-97. Macmillan Publishing Co, Inc: New York.
Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (ed.*)*, *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, 1-28. Lawrence Erlbaum: Hillsdale, NJ.
Leinhardt, G., Zaslavky, O. y Stein, M. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.

Leong, W. (2014). Knowing the intentions, meaning and context of classroom assessment: A case study of Singaporean teacher's conception and practice. *Studies in Educational Evaluation*, 43, 70 –78.

Martínez, F. (2009). La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula. En Suma+, 61, 7–

Martínez, M. y Gorgorió, N. (2004). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 6(1), 1–15.

McDiarmid, G. W., Ball, D. L., & Anderson, C. W. (1989). Why staying one chapter ahead doesn't really work: Subject-specific pedagogy. In M. C. Reynolds (ed.), *Knowledge base for the beginning teacher*, 193-205, Pergamon: Oxford, UK.

Moreano, G., Asmad, U., Cruz, G. y Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de Psicología*, 26(2), 299- 334.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Enseñanza de las Ciencias: *Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 21(2), 265-280.

Noble, T., Nemirovsky, R., Wright, T. y Tierney, C. (2000). Experiencing Change: The Mathematics of Change in Multiple Environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(1), 85–108.

Oktaç, A. y Çetin, İ. (2016). APOS teorisi ve matematiksel kavramların öğrenimi. E. Bingölbali, S. Arslan, & İ. Ö. Zembat (eds.) *Matematik eğitiminde teoriler*, 163- 182, Pegem: Akademi. Ankara.

Pajares, M.F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307-332.

Preece, J. (1983). Graphs are not straightforward. En T. R. G–Green y S. J. Payne (eds.) *The Psycology of Computer Use: A European Perspective*, 41–56. Academic Press: London.

Remesal, A. (2006). Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria: perspectiva de profesores y alumnos, tesis doctoral, Barcelona: Universidad de Barcelona (www.tesisenxarxa.net/TDX–1023106–140538/index.html).

Rittle-Johnson B, Schneider M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Cohen and A. Dowker (eds) *Oxford handbook of numerical cognition*, 1118–1134, Oxford University Press: Oxford.

Rittle-Johnson, B. and Koedinger, K. R. (2009). Iterating between lessons concepts and procedures can improve mathematics knowledge. *British Journal of Educational Psychology*, 79, 483–500.

Rittle-Johnson, B., Siegler R.S., Alibali, M.W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: an iterative process. *Journal Educational Psychology*, 93(2), 346–362.

Royer, J. M., Mestre, J. P., & Dufresne, R. J. (2005). Introduction: Framing the transfer problem. In J. Mestre (ed.) *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective*, vii–xxvi. Greenwich, CT: Information Age.

Shulman, L. (1981). Disciplinas de investigación en educación: una visión general. *Investigador educativo*, 10 (6), 5–23.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Sofronas, K., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L. y Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the firs-year calculus? Perspectives of 24 experts. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(2), 131-148.

Tall, D. O. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. O. Zaslavsky (ed.), *Proceedings of the 23rd conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol. 1, 111-118. Haifa, Israel.

Tall, D. O., y Vinner, S. (1981). Concept images and concept definitions in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research, en Grouws, D. (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 127-146. Macmillan: Nueva York.

Thompson, P. W. (1994b). The development of the concept of speed and its relationship to the concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 179-234. SUNY Press: Albany, NY.

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning. In Leatham, K. (ed.) *Vital directions for research in mathematics education*, 57-93. Springer: New York.

Thompson, P. W., & Thompson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, Part I: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 279-303.

Turner, E., Wilhelm, J. y Confrey, J. (2000). Exploring Rate of Change through Technology with Elementary Students. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*, New Orleans, LA, April 24-28).

Vinner, S. (1994). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, 65–81. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Holland.

Zaslavsky, O. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 18(1), 3–14.

**Ricardo Abreu Blaya.** Es Catedrático de Matemática en la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Doctor en Ciencias Matemáticas (Cuba) y Doctor en Ciencias (segundo grado de doctor, Cuba). Ha publicado más de 100 artículos de investigación. Email: rabreublaya@yahoo.es

**Crisólogo Dolores Flores.** Es Catedrático de Matemática en la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Doctor en Ciencias Pedagógicas (Metodología de la Matemática) (Cuba). Ha publicado más de 50 artículos de investigación. Email: cdolores@gmail.com

**José L. Sánchez.** Es Máster en Metodología de la Matemática (Cuba) y Máster en Matemáticas (México). En la actualidad es Candidato a Doctor en Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero. Ha publicado 6 artículos en Matemática y Matemática Educativa. Email: jlsanchezsantiesteban@gmail.com

**José M. Sigarreta.** Es Catedrático de Matemática en la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Doctor en Ciencias Pedagógicas (Metodología de la Matemática) (Cuba), Doctor en Matemáticas (México) y Doctor en Ingeniería Matemática (España). Ha publicado más de 100 artículos de investigación. Email: jsmathguerrero@gmail.com