

Reivindicación del Error en el Aprendizaje de las Matemáticas

Luis Rico

**Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada.**

1.- Introducción

Hace tiempo que quiero poner por escrito algunas reflexiones en torno a la cuestión del error en los procesos de aprendizaje de las matemáticas y a la consideración y tratamiento que el profesor de matemáticas debe dar a tales errores. La ocasión del homenaje al Profesor Gonzalo Sánchez Vázquez me ofrece la oportunidad de concretar estas ideas en un documento, dándoles el tono de diálogo con un amigo con el que se quieren compartir unas preocupaciones y a cuyo juicio se quieren presentar cuestiones de cierta complejidad, cuya aceptación general es controvertida. Este es el tono que quiero dar a este trabajo: traer a reflexión común algunas consideraciones sobre un punto conflictivo en el desempeño profesional de los profesores de matemáticas.

Es mi intención profundizar sobre algunas ideas y compartir unas reflexiones, sin eludir, si es necesario, los aspectos polémicos. Entiendo que la autonomía del profesor de matemáticas se ha de basar en un esfuerzo crítico de clarificación conceptual, no exento de conflictividad, pero sostenido por un estilo de honestidad intelectual y un respeto y cordialidad hacia las personas, del que Gonzalo nos ofreció un claro ejemplo. Trataré de seguir esos criterios en estas reflexiones.

2.- Delimitación del problema

Quizás sea la consideración del error uno de los puntos en los que se establece con mayor precisión una línea divisoria entre dos estereotipos del profesor de matemáticas: aquél que mantiene una posición convencional y tradicional, aquél otro que sostiene posiciones modernas y avanzadas. Para el primero, el error es un dato objetivo que muestra el desconocimiento de un alumno o de un grupo de alumnos y que debe ser controlado, corregido o, en su defecto, penalizado. Para el segundo, el error es la muestra de un conocimiento parcialmente construido, resultado de un proceso en curso a cuya evolución el profesor debe contribuir, cuando ello sea posible, evitando provocar bloqueos, rechazos o sanciones. Hay una serie de consideraciones generales que ambos tipos de profesores comparten tales como que el error es algo natural, que debe diagnosticarse de inmediato y que hay que ayudar a los alumnos a superarlo. Ahora bien, conforme se aproxima la discusión

sobre los modos y fines de la evaluación, ambos tipos de profesores divergen considerablemente en relación con el tratamiento y la sanción que los errores merecen.

Los dos estilos de profesores mencionados son, en efecto, simplificaciones útiles para la lógica de mi discurso, pero no son entelequias. Los hábitos de trabajo del profesor promedio y las propias necesidades de promoción que establece el sistema educativo, han determinado unos usos y costumbres en la comunidad de educadores que sitúan a buena parte de los profesores en la primera tipología.

En un curso de actualización reciente en Andalucía, para profesores de matemáticas que se incorporaban al nuevo currículo de Educación Secundaria Obligatoria, se generó un debate sobre el tratamiento más conveniente para los errores en matemáticas en el que se defendió con convicción y coherencia la siguiente línea argumental. La tolerancia para con los errores de los alumnos puede derivar en una estafa; en la vida cotidiana los errores están penalizados: quién comete un error, del orden que sea, lo paga. Asumir un tratamiento complaciente de los errores en el sistema educativo, en el que cada error vaya acompañado de una revisión y una discusión para mejorar el significado del conocimiento erróneo, puede ser gratificante para los alumnos e, incluso, producir resultados positivos en ocasiones, pero no entrena para los hábitos sociales que los alumnos van a encontrar fuera de las aulas y, por tanto, les proporciona una visión falsa de esa realidad que puede llegar a perjudicarles. El tratamiento punitivo de los errores se entiende como medida profiláctica y como parte del entrenamiento que deben realizar los alumnos para controlar sus propios procesos de pensamiento y ser responsables de las carencias conceptuales derivadas de un aprendizaje incompleto y deficiente.

Desde este planteamiento el error es una conducta inadecuada, resultado de la actuación responsable de una persona, y es a dicha persona a quién corresponde controlar tal conducta; la sanción del error tiene como finalidad llamar la atención de cada alumno sobre la inadecuación de su trabajo y la necesidad de su modificación. Al igual que con los delitos y las faltas morales o pecados, los errores *se cometen*; quién comete un error debe ser, de algún modo, penalizado. Los errores deben ser juzgados, corregidos y castigados, como ocurre con cualquier falta o deficiencia humana que se quiere desterrar.

Desde una propuesta alternativa: "Los errores y las ideas imprecisas de los alumnos tienen una dimensión positiva. El conflicto entre sus conocimientos anteriores y determinadas situaciones nuevas que no encajan con ellos es un paso necesario para reorganizarlos, enriquecerlos y ajustarlos; en suma, para que se

produzca un aprendizaje significativo. El papel del profesor no consiste en evitar el error, proponiendo sólo tareas que los alumnos ejecuten correctamente, ni en ignorarlo para partir desde cero. Este cambio de punto de vista implica que error no ha de equipararse a fracaso. Al contrario, el profesor debe transmitir a sus alumnos la sensación de que lo que saben es adecuado para determinadas situaciones, aunque no lo es para otras diferentes o nuevas, y que progresar requiere reconocer estas contradicciones y superarlas. A partir de esta toma de conciencia por parte del alumno, la tarea del profesor consiste en proporcionarles elementos que le permitan reorganizar de nuevo sus esquemas." (MEC, 1989; pp. 521).

En el mismo debate mencionado anteriormente, se consideró que las ideas del párrafo anterior eran una serie de lugares comunes, demagógicas, sin validez práctica y que, a lo sumo, servían para confundir a alumnos y profesores.

3.- Datos relevantes

La descripción anterior es una muestra del rechazo que viene provocando la actual reforma del currículo de matemáticas entre los profesores, y de los fundamentos y razonabilidad de tal rechazo. Los datos del problema que se analizan son los siguientes:

Primero: hay unos hábitos escolares sobre el diagnóstico, tratamiento y corrección de los errores por parte de la comunidad de profesores de matemáticas, que responden a unos usos y necesidades sociales y escolares.

Segundo: los investigadores en educación matemática vienen estudiando la complejidad de los fenómenos de aprendizaje del conocimiento matemático por parte de los escolares y la función que desempeñan los errores en la comprensión de tales conocimientos; los resultados de estos estudios no coinciden con los hábitos escolares.

Tercero: se ha puesto en marcha una reforma del currículo de matemáticas para secundaria en España. A esta reforma se quiere incorporar una parte importante de los resultados de las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los últimos años. Entre estas modificaciones se plantea cambiar el tratamiento relativo a los errores.

Cuarto: las modificaciones al currículo se introducen mediante breves declaraciones generales que aparecen en los documentos curriculares, tal y como hemos visto en el ejemplo anterior. Al profesor se le ofrece la reflexión citada como única referencia para modificar su planteamiento sobre los errores.

Quinto: las modificaciones propuestas se presentan sin base conceptual suficiente y poco argumentadas; el resultado práctico es que se ignoran o se rechazan; se

consideran un elemento propagandístico, sin valor substancial, o una intromisión ideológica, que conviene denunciar; de esta manera se refuerzan los planteamientos tradicionales.

Sexto: la discusión sobre los errores de aprendizaje se convierte en un diálogo de sordos dentro de la comunidad de profesores de matemáticas, entre aquéllos que tienen alguna información sobre estudios relativos a los errores y su tratamiento y aquéllos otros profesores que no han recibido más información que la de los documentos curriculares oficiales. El tratamiento sobre errores no se modifica en la práctica escolar.

Estos datos ejemplifican algunos de los fallos más relevantes que se pueden detectar en la puesta en práctica de los cambios sobre el currículo de matemáticas. Responden plenamente a la siguiente descripción:

"Nuestra tradición en política y administración del currículum ha afianzado muy bien el esquema de pretender cambiar la práctica a base de plasmar ideas y principios pedagógicos en las disposiciones administrativas. Un esquema que sirvió en la etapa no democrática y que en democracia puede justificarse como intentos ilustrados de mejorar la realidad. El estudio de los mecanismos de implantación y modelación del currículo nos ha enseñado que ese esquema no sirve demasiado para el objetivo que declara querer cumplir y que, en caso de valer algo, se apoyará sobre la debilidad profesional de los profesores, la falta de capacidad organizativa de los centros y en los intentos de controlar la práctica." (Gimeno, 1988; pp. 10).

La conclusión es que, si hay alguna información o dato relevante sobre errores que pueda justificar las innovaciones consideradas, tales informaciones no se transmiten de manera adecuada y no tienen implicaciones en la práctica.

Esta solución nos deja insatisfechos, ya que el tratamiento de los errores en el aprendizaje de las matemáticas no es una cuestión trivial ni demagógica que pueda resolverse con aseveraciones voluntaristas o con descalificaciones generales. La conceptualización del error en educación matemática afecta a la construcción del conocimiento matemático, a su transmisión, comprensión y valoración, tal y como se realiza por medio de los sistemas educativos. Por ello conviene mejorar nuestros conocimientos sobre este tópico.

En lo que sigue nos proponemos presentar una serie de argumentos con los que profundizar conceptualmente sobre los errores, que permitan justificar la legitimidad del error como parte de los procesos de aprendizaje. Sólo un cambio fundado en la consideración del error permitirá, en su caso, proponer cambios en su tratamiento curricular.

Para este propósito elegimos tres líneas de reflexión: epistemológica, cognitiva y social.

3.- Aproximación epistemológica.

Algunas paradojas

La presencia permanente de errores en la adquisición y consolidación del conocimiento humano es una cuestión compleja y delicada, no exenta de contradicciones. Esto se concreta en que:

El error es conocimiento deficiente e incompleto. El error es una posibilidad, y una realidad, permanente en el conocimiento científico.

La ciencia es conocimiento verdadero. El desarrollo del conocimiento científico está plagado de errores.

La fiabilidad del conocimiento humano, es decir, la capacidad de considerar como verdaderos conceptos y procedimientos que están deficientemente desarrollados, que incluyen ideas contradictorias o interpretaciones y justificaciones falsas, ha sido una preocupación constante en filósofos y pensadores que se han ocupado de estudiar la capacidad del hombre por conocer y comprender. El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos. Esta posibilidad no es una mera hipótesis, basta con observar lo que ha ocurrido a lo largo de la historia de diversas disciplinas en las que se han aceptado como conocimiento válido multitud de conceptos que, hoy día, sabemos que son erróneos.

La preocupación por el conocimiento erróneo, por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que puede desempeñar en el dominio y avance de la ciencia, ha ocupado parte importante de las reflexiones de filósofos de la ciencia y epistemólogos, entre los que queremos destacar a Popper, Bachelard y Lakatos. En lo que sigue vamos a seleccionar algunas ideas de los autores mencionados, que sirven de fundamentación a este trabajo.

Popper

En "*Conjeturas y refutaciones*", Popper pone a examen la siguiente cuestión: ¿cuál es la fuente última del conocimiento?; a partir de ella deriva el papel destacable que tienen los errores en la adquisición del conocimiento científico.

Para ello desarrolla la siguiente línea argumental:

1) Considera que hay, básicamente, dos respuestas clásicas a la cuestión anteriormente planteada, la proporcionada por el empirismo, que señala la observación como fundamento último del conocimiento; la proporcionada por el

racionalismo o intelectualismo clásico, que considera como fundamento la intuición intelectual de ideas claras y distintas. Destaca en estas dos posiciones el optimismo epistemológico sobre las posibilidades humanas de conocimiento: todo hombre lleva en sí mismo las fuentes del conocimiento, bien en su facultad de percepción sensorial o en su facultad de intuición intelectual. El hombre es capaz de conocer; por lo tanto, puede ser libre.

Contrapone estas posiciones con la creencia según la cual, en ausencia de una verdad objetiva y discernible, hay que optar entre aceptar la autoridad de la tradición o el caos, posición a la que llama tradicionalista. El racionalismo epistemológico ha defendido el derecho de la razón y de la ciencia a criticar y rechazar toda autoridad cuando se encuentra basada en la sin razón, el prejuicio o el accidente. El rechazo del autoritarismo lleva a someter las propias teorías y conocimientos a un examen crítico minucioso.

2) Las posiciones clásicas se sustentan en lo que Popper denomina “*teoría de la verdad manifiesta*”. La verdad es siempre reconocible como verdad; si no es así, sólo es necesario desvelar esa verdad o descubrirla. Esta doctrina de que la verdad es manifiesta plantea la necesidad de explicar la falsedad. El conocimiento no necesita ser explicado, pero ¿cómo podemos caer en el error si la verdad es manifiesta?. Una respuesta posible considera que la ignorancia es obra de poderes que conspiran para mantenernos en ella, que fomentan nuestros prejuicios para que no podamos ver la verdad manifiesta.

Popper sostiene que esta explicación conspiracional es, básicamente, un mito. La realidad es que la verdad es difícil de alcanzar y, una vez encontrada, se puede volver a perder fácilmente. Las creencias erróneas pueden tener un poder asombroso de supervivencia, en franca oposición a la experiencia y sin ayuda de ninguna conspiración. La teoría de la verdad manifiesta puede conducir también al autoritarismo. Esto puede deberse a que la verdad, simplemente, no es manifiesta y por tanto necesita de modo constante de re-interpretación y re-afirmación, es decir, de una autoridad que proclame y establezca cual es la verdad.

3) Aunque las epistemologías de Bacon y Descartes eran claramente antiautoritarias tienen una fundamentación de carácter religioso y no fueron capaces de renunciar a pensar en términos de autoridad; uno con la autoridad de los sentidos, el otro con la autoridad del intelecto.

La disyuntiva de tener que admitir que nuestro conocimiento es humano sin tener que aceptar que es mero capricho o arbitrariedad intelectual, no queda resuelta ni con el empirismo ni con el racionalismo.

Sócrates adelantó una solución con la doctrina de la falibilidad: todos nosotros podemos errar, y con frecuencia erramos individual y colectivamente; pero la idea del error y la falibilidad implica que podemos buscar la verdad, la verdad objetiva, aún cuando por lo general nos equivoquemos por amplio margen. También implica que, si respetamos la verdad, debemos aspirar a ella examinando persistentemente nuestros errores: mediante la infatigable crítica racional y mediante la autocrítica.

4) Popper propone reemplazar la pregunta acerca de las fuentes de nuestro conocimiento como pregunta fundamental, por la pregunta totalmente diferente:

“¿Cómo podemos detectar y eliminar el error?”.

Una respuesta adecuada a la cuestión anterior es la siguiente: criticando las teorías y presunciones de otros y, si somos capaces de hacerlo, criticando nuestras propias teorías y presunciones. A esta posición la denomina racionalismo crítico.

5) Popper resume en nueve tesis los resultados epistemológicos de su reflexión:

“1. No hay fuentes últimas del conocimiento. Debe aceptarse toda fuente y toda sugerencia y, en primer lugar, deben ser sometidas a un examen crítico.

2. La cuestión epistemológica adecuada no es la relativa a las fuentes; más bien preguntaremos si la afirmación hecha es verdadera, si concuerda con los hechos. Esto se determina examinando o sometiendo a prueba la afirmación misma, de modo directo, o bien sometiendo a prueba sus consecuencias.

3. En conexión con el examen y revisión críticas tienen importancia todo tipo de argumentos.

4. La fuente más importante de nuestro conocimiento es la tradición. La mayor parte de las cosas que sabemos las hemos aprendido por el ejemplo o por que las hemos leído u oído previamente.

5. Toda parte de nuestro conocimiento por tradición es susceptible de examen crítico y puede ser abandonado.

6. El conocimiento no puede partir de la nada. El avance del conocimiento consiste, principalmente, en la modificación del conocimiento anterior.

7. No hay ningún criterio que permita reconocer la verdad. Pero sí poseemos criterios que, con suerte, permiten conocer el error y la falsedad. La claridad y distinción no son criterios de verdad, pero la oscuridad y la confusión indican el error. Análogamente, la coherencia no basta para establecer la verdad pero la incoherencia y la inconsistencia permiten establecer la falsedad.

8. La función más importante de la observación y el razonamiento, y aún de la intuición y la imaginación, consiste en contribuir al examen crítico de las conjeturas con la que se sondea lo desconocido.

9. La solución de un problema plantea nuevos problemas sin resolver, y ello es tanto más así cuanto más profundo era el problema original y más audaz su solución”.

Aunque la reflexión de Popper se refiere al conocimiento en general, y de un modo más explícito al conocimiento en las ciencias experimentales, lo que haría necesarias algunas matizaciones al referirnos a las matemáticas, hay algunas ideas importantes que queremos destacar. En primer lugar, señalar que no hay fuentes últimas del conocimiento, admitir que todo conocimiento es humano, que está mezclado con nuestros errores y nuestros prejuicios.

Esto lleva a admitir el error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento. Las organizaciones insuficientes o claramente deficientes, las hipótesis tentativas, las conceptualizaciones incompletas son parte legítima de nuestro acceso al conocimiento, forman parte de nuestro modo de conocer. Aún así, no es válida cualquier conclusión, ya que hay una verdad objetiva a la que hemos de tratar de ajustarnos.

Idea complementaria de la presencia del error es la necesidad de un ejercicio constante de la crítica, sometiendo a prueba nuestros conocimientos y aproximaciones a la verdad. La búsqueda crítica del error para modificar nuestros conocimientos deficientes es un corolario inevitable de las consideraciones anteriores.

Bachelard

En otro orden de ideas, Bachelard planteó la noción de obstáculo epistemológico como explicación para esa aparición inevitable de errores que, hemos visto, constituye parte importante de nuestro avance en el conocimiento. Así, al comienzo de su obra *“La formación del espíritu científico”* glosa las siguientes ideas:

“Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos; en el acto mismo de conocer, intimamente, es donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones; es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí, donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra; jamás es inmediata y plena. Al volver sobre un pasado de errores se encuentra la verdad. En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza.

La noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación. El epistemólogo tendrá que esforzarse en captar los conceptos científicos en síntesis psicológicas efectivas; vale decir, en síntesis psicológicas progresivas, estableciendo respecto de cada noción una escala de conceptos, mostrando cómo un concepto produce otro, cómo se vincula con otro. En educación, la noción de obstáculo epistemológico es igualmente desconocida; son poco numerosos los que han sondeado la psicología del error, de la ignorancia y de la irreflexión.”

En otra obra, *“La filosofía del no”*, al tratar de diferenciar las funciones del filósofo de la ciencia de las del científico profesional, desarrolla algunas de las ideas anteriores:

“Para el científico el conocimiento surge de la ignorancia, como la luz surge de las tinieblas. El científico no ve que la ignorancia es una trama de errores positivos, tenaces, solidarios. No advierte que las tinieblas espirituales poseen una estructura y que, en esas condiciones, toda experiencia objetiva correcta debe siempre determinar la corrección de un error subjetivo. Pero los errores no se destruyen uno por uno con facilidad. Están coordinados. El espíritu científico solo puede constituirse destruyendo el espíritu no científico. A menudo, el hombre de ciencia se confía a una pedagogía fraccionada, mientras que el espíritu científico debiera tender a una reforma subjetiva total. Todo progreso real en el pensamiento científico necesita una conversión.”

Con esta noción de obstáculo epistemológico, Bachelard realiza una aproximación sistemática a los procesos de creación y constitución del conocimiento dentro de la comunidad científica y, al mismo tiempo, a los procesos de transmisión y asimilación del conocimiento en el sistema educativo. La noción de obstáculo epistemológico, y las sucesivas tipificaciones y caracterizaciones de la misma, se ha utilizado como clave para el estudio, sistematización, análisis y explicación de los errores que se presentan en el pensamiento científico.

Lakatos

En el estudio realizado por Lakatos en *“Pruebas y refutaciones”*, relativo a la lógica del descubrimiento y la elaboración de conceptos en Matemáticas, se sostiene que en el proceso usual de construcción de los conocimientos matemáticos aparecen de forma sistemática errores. Mediante la dialéctica de plantear conjeturas

que aproximen una respuesta a un problema o cuestión abierta, crítica de las conjeturas mediante contraejemplos globales y locales, y superación mediante un aumento del contenido y una limitación en la extensión de los conceptos, Lakatos ofrece una metodología basada en los principios de la falsabilidad para la construcción del conocimiento matemático que permita superar los errores. Por tanto el proceso de construcción de conceptos matemáticos deberá incluir el diagnóstico, detección, corrección y superación de errores mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones.

Uno de los denominadores comunes entre Popper y Lakatos es la idea de que hay que considerar como posible la retransmisión de la falsedad en un sistema deductivo, en oposición a la idea clásica de la retransmisión de la verdad como única opción. Se trata de un cuestión clave, que tuvo importancia en la segunda crisis de fundamentos de la matemática (Gödel, 1930). En esencia, se cambia el estatuto positivo (epistemología positivista), que toma la verdad como patrón, por el vaciado en negativo de la verdad, la falsedad. Así, la verdad objetiva pasa a ser una verdad relativa a unos conocimientos, unos esquemas de interpretación y unas reglas metodológicas que permiten acceder a esos conocimientos.

Conclusión

Los autores considerados no son los únicos que han reflexionado sobre la importancia de los errores en los procesos de construcción del conocimiento. También Russell y Wittgenstein hicieron consideraciones importantes sobre este tópico. Sin embargo, detenemos aquí nuestra reflexión ya que las ideas aportadas son suficientes para sostener algunos argumentos relativos a los procesos de enseñanza- aprendizaje de las Matemáticas, importantes para nosotros. Entre esos argumentos destacamos los siguientes.

En primer lugar, señalar que los errores forman parte del proceso de construcción y elaboración del conocimiento humano, en general, del conocimiento científico, en particular, y, por tanto, de los procesos de construcción del conocimiento matemático. El error es parte legítima de los procesos de construcción de conocimiento matemático.

En segundo término, indicar que los errores no aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente.

En tercer lugar, considerar como inadecuada la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes de los mismos, destacando la necesidad de reemplazarla por la previsión de errores y su consideración en el proceso de

elaboración y aprendizaje de conceptos. No se cometen errores, el error no es una deficiencia o falta específica de los jóvenes en formación que hay que penalizar.

Desde un planteamiento epistemológico hay que hacer conscientes a los profesores de la naturalidad y legitimidad del error y a los alumnos de la necesidad de revisar críticamente las propias producciones matemáticas, para depurarlas de inconsistencias y convertirlas en herramientas eficaces. Se trata de una aproximación no penal ni punitiva, sino pragmática y positiva.

4. Aproximación cognitiva.

Desde un punto de vista cognitivo las contradicciones analizadas anteriormente tienen expresión propia, cuyo resumen es que la adquisición de conocimiento verdadero es objetivo del aprendizaje, sin embargo, los procesos de aprendizaje incluyen errores sistemáticos. Por ello, el error es un objeto de estudio en educación matemática.

La reflexión actual sobre los errores en los estudios sobre aprendizaje de las matemáticas los considera como parte normal en los procesos de aprendizaje, Brousseau, Davis y Werner expresan claramente esta idea:

“Observaciones hechas en el aula ponen de manifiesto que:

1. Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores.
2. Cuando esta vía de pensamiento original se muestra inesperadamente útil, admiramos su poder y decimos que el estudiante ha tenido una comprensión inusual; pero cuando, por el contrario, este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial, decimos usualmente que el estudiante ha cometido un error. De hecho, ambos casos tienen mucho en común, en particular el dato de que las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera.”

Una reflexión importante en didáctica de la matemática considera los procesos de enseñanza/aprendizaje como procesos de comunicación, pero esta comunicación debe fluir en ambas direcciones: desde los estudiantes hacia el profesor igual que desde el profesor hacia los estudiantes. Tarea principal del trabajo del profesor consiste en dirigir y guiar el desarrollo de ideas en las mentes de sus estudiantes, por ello es importante para el profesor conocer qué es lo que sus estudiantes se encuentran pensando, y no limitarse a hacer suposiciones sobre esas ideas.

Al comenzar una observación cuidadosa del trabajo de los alumnos, los profesores se encuentran con una serie de sorpresas que, de nuevo, Brousseau, Davis y Werner describen del siguiente modo:

- “1. Se hace evidente rápidamente que los errores de los alumnos son, con frecuencia, el resultado de un procedimiento sistemático que tiene alguna imperfección; pero el procedimiento imperfecto lo utiliza el alumno de modo consistente y con confianza. En estos casos, los errores muestran un patrón consistente.
2. Los alumnos tienen con frecuencia grandes concepciones inadecuadas (*misconceptions*) acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.
3. Cuando es posible observar a los alumnos y también intercambiar información con sus profesores usuales, se ve que los alumnos emplean con frecuencia procedimientos imperfectos y tienen concepciones inadecuadas que no son reconocidas por sus profesores.
4. También se hace evidente que los estudiantes son con frecuencia más inteligentes para inventar sus propios métodos originales de lo que se espera de ellos. Incluso cuando un método ha sido presentado por el profesor, un alumno puede desarrollar su propio método original, llegando hasta ignorar el método del profesor”.

Esta serie de fenómenos se vienen observando desde hace muchos años, pero no ha sido hasta fechas recientes cuando se ha tenido en cuenta la complejidad en la que se encuadran. Al estudiar los errores, de acuerdo con las dificultades encontradas por los alumnos, se debiera reconocer que los errores también son función de otras variables del proceso educativo: el profesor, el currículo, el entorno social en el que se enmarca la escuela, el medio cultural y sus relaciones, así como las posibles interacciones entre estas variables. Los errores en el aprendizaje de las matemáticas son, en nuestra consideración, el resultado de procesos muy complejos. Una delimitación clara de las causas posibles de un error dado o una explicación de cada error con la posibilidad de actuar sobre él, es con frecuencia bastante difícil debido a que hay una fuerte interacción entre las variables del proceso educativo y, a menudo, es muy difícil aislar relaciones.

Gran parte de los investigadores y especialistas (Radatz, 1979; Mulhern, 1989) coinciden en considerar como características generales de los errores de los alumnos las siguientes:

1. Los errores son sorprendentes. Con frecuencia los errores cometidos por los alumnos surgen de manera sorprendente, ya que por lo general se han mantenido ocultos para el profesor durante algún tiempo.
2. Los errores son a menudo extremadamente persistentes, debido a que pueden reflejar el conocimiento de los alumnos sobre un concepto o un uso particular de reglas nemotécnicas. Son resistentes a cambiar por sí mismos ya que la

corrección de errores puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos.

3. Los errores pueden ser o bien sistemáticos o por azar. Los primeros son muchos más frecuentes y, por lo general, más efectivos para revelar los procesos mentales subyacentes; estos errores se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera y utiliza como correcto. Los errores por azar reflejan falta de cuidado y lapsus ocasionales, y tienen relativamente poca importancia.
4. Los errores ignoran el significado; de este modo, respuestas que son obviamente incorrectas, no se ponen en cuestión. Los alumnos que cometen un error no consideran el significado de los símbolos y conceptos con los que trabajan.

Constructivismo

Las ideas anteriores pueden completarse con planteamientos constructivistas. Recordamos que hay un acuerdo general entre los constructivistas sobre los siguientes puntos:

1. Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.
2. Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.
3. Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación de las estructuras existentes.
4. Reconocer el constructivismo como una posición cognitiva conduce a adoptar el constructivismo metodológico.

Si, por otra parte, los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero, hemos de concluir que en el proceso usual de construcción de los conocimientos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y, por tanto, en los procesos de aprendizaje de las matemáticas habrá que incluir actividades mediante las que detectar, controlar y corregir los errores construidos por los escolares.

Hay que admitir, como consecuencia de las reflexiones anteriores, que, a partir de sus errores, un joven o un niño puede aprender distintas propiedades de un concepto de las que no era previamente consciente. Cuando se presenta un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarle a completar el conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal.

Finalmente, conviene señalar que todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debidos a diferentes causas, algunas de los cuales se presentan inevitablemente.

5 Aproximación social.

La sociología del conocimiento establece que, como en el resto de las disciplinas científicas, los conocimientos matemáticos son construcciones sociales. La conjetura de la construcción social ubica el conocimiento, la cognición y sus representaciones en los campos sociales de su producción, distribución y utilización. El conocimiento científico es constitutivamente social debido a que la ciencia está socialmente orientada y los objetivos de la ciencia están sostenidos socialmente (Restivo, 1992). El conocimiento matemático, como todas las formas de conocimiento, representa las experiencias materiales de personas que interactúan en entornos particulares, culturas y períodos históricos.

Teniendo en cuenta esta dimensión social, el sistema educativo -y, en particular, el sistema escolar- establece multitud de interacciones con la comunidad matemática, ya que se ocupa de que las nuevas generaciones sean iniciadas en los recursos matemáticos utilizados socialmente y en la red de significados (o visión del mundo) en que se encuentran enclavados; esto es, organiza un modo de práctica matemática. En las modernas sociedades el sistema escolar es una institución compleja, que implica a multitud de personas y organismos y trata de satisfacer, simultáneamente, una diversidad de fines no siempre bien delimitados y coordinados. Dentro del sistema escolar tiene lugar gran parte de la formación matemática de las generaciones jóvenes; esta institución debe promover las condiciones para que los más jóvenes lleven a cabo su construcción de los conceptos matemáticos mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos. Por ello mismo, ningún sistema educativo puede permitirse expulsar de la cultura básica común a ningún grupo de ciudadanos. El sistema educativo de una sociedad democrática tiene que proporcionar herramientas de reflexión comunes a todos los ciudadanos, sin distinción; ayudar en el logro de la superación de los errores conceptuales de los alumnos es una obligación moral para todos los profesores.

La dimensión educativa lleva a considerar el conocimiento matemático como una actividad social, propia de los intereses y la afectividad del niño y del joven, cuyo valor principal está en que organiza y da sentido a una serie de prácticas útiles, a cuyo dominio hay que dedicar esfuerzo individual y colectivo. El educador se ocupa de iniciar a los niños y adolescentes en la cultura de la comunidad a la que

pertenecen y de transmitirles sus valores sociales; de esta cultura también forma parte el conocimiento matemático, que debe transmitirse en toda su plenitud a cada generación (Rico, 1997). No se trata de una cuestión trivial: si determinadas piezas del conocimiento matemático no son adecuadas ni necesarias para todos los ciudadanos deben salir fuera de los contenidos del currículo para la Educación Obligatoria; mientras tanto, cualquier contenido de este currículo debe dominarse con fluidez por todos los escolares, ya que las referencias culturales básicas de la sociedad se van a construir en base a esos contenidos. No es trivial la delimitación de los contenidos del currículo ya que la sociedad asume la obligación de transmitirlos a todos los ciudadanos y basar los conocimientos básicos compartidos en tales contenidos.

6. Reflexión final

Hemos reivindicado la legitimidad del error como vía de acceso al conocimiento científico, lo cual se justifica desde una perspectiva histórica y epistemológica. Hemos visto también como el error es parte destacable de los procesos de construcción de conocimientos por parte de los seres humanos. Los errores forman parte del conocimiento de nuestros alumnos, no porque sean seres incompletos, sino en tanto que seres humanos con capacidad de raciocinio.

Obligación del sistema educativo es ayudar a los escolares en la superación de los errores más frecuentes, en particular, de los errores en la interpretación y utilización del conocimiento matemático. Se trata de una obligación moral; en tanto que el Sistema Educativo proporciona la formación cultural común a todos los ciudadanos de un país, el logro, para todos ellos, de un conocimiento verdadero en este campo es una meta irrenunciable.

El estudio de los errores de los escolares en matemáticas, su tipología, clasificación, diagnóstico, tratamiento y corrección forman parte del conocimiento profesional del profesor de matemáticas a cuyo dominio hay que dedicar tiempo y esfuerzo. El estudio de los errores no consiste en el control de una jerga y la asimilación de una ideología. Se trata de una competencia profesional imprescindible para el educador matemático en el ejercicio honesto de su profesión.

Referencias:

- Brousseau G., Davis R., Werner T.** (1986). Observing Students at work, en Chistiansen B., Howson G., Otte M. (Edts): *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Bachelard G.** (1978). *La filosofía del no*. Buenos Aires: Amorrortu.
- Bachelard G.** (1988). *La formación del espíritu científico*. Mexico: Siglo XXI.

- Borassi R.** (1987). Exploring Mathematics Through the Analysis of Errors. *For the learning of Mathematics*. Vol 7 págg. 2-9.
- Gimeno, J.** (1988) *El currículum: una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Morata.
- Lakatos I.** (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.
- Mulhern G.** (1989). Between the ears: making inferences about internal processes, en Greer B. & Mulhern G. (Edts.) *New Directions in Mathematics Education*. Londres: Routledge.
- Ministerio de Educación y Ciencia** (1989) *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid.
- Nesher P.** (1987). Toward an Instructional Theory: the Role of Students' Misconceptions. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 7, págg. 33-39.
- Popper, K.** (1979) *El desarrollo del conocimiento científico*. Buenos Aires: Paidós.
- Radatz H.** (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 9, págg. 163-172.
- Restivo, S.** (1992) *Mathematics in Society and History*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Rico, L.** (1995) Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. *Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Rico, L.** (1997) *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Socas, M.** (1997) Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria. En Rico, L. (edt.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.