CAPÍTULO I

CONFERENCIAS

La experimentación: una necesidad para generar intuiciones y un pensamiento probabilístico

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER - UIS

GABRIEL YÁÑEZ CANAL
gyanez@uis.edu.co

En los últimos años la probabilidad ha pasado a formar parte del currículo de los programas de matemáticas en la educación básica de una gran cantidad de países del mundo. Esta realidad plantea un reto didáctico que conlleva no sólo la elaboración de los programas para cada nivel educativo, sino su implementación didáctica en el salón de clase. Por la experiencia alcanzada en los cursos universitarios y por las investigaciones didácticas realizadas recientemente, se acepta que la probabilidad es un tema particularmente difícil.

No obstante el arraigo que en la vida social tienen términos como el azar, la incertidumbre, las posibilidades, lo poco o lo muy probable, las intuiciones y concepciones que las personas se forman alrededor de ellos - y aquí surge el problema - no se corresponden con los resultados de la teoría matemática de la probabilidad. Este es precisamente el conflicto: su enorme potencial de aplicabilidad a muchas situaciones sociales y el poco entendimiento que de sus ideas fundamentales tienen las personas.

Si bien es cierto que, a primera vista, el aspecto formal de la teoría matemática que se contempla en los currículos matemáticos escolares no representa mayores dificultades, la falta de ideas y referentes claros que respalden este formalismo y que generen intuiciones válidas hace que la creación de los modelos que permitan resolver problemas de probabilidad se convierta, muchas veces, en reto insuperable para los estudiantes.

Una de las razones para la brecha entre el pensamiento y la realidad de la gente y las ideas matemáticas es la falta de oportunidades que tienen las personas para observar muchas repeticiones de un experimento aleatorio y, por lo tanto, percibir sus regularidades. Esto hace, por ejemplo, que las personas asuman el concepto de probabilidad asociado con el posible resultado en una próxima repetición de un experimento aleatorio, y no con un conjunto grande de repeticiones. Este *enfoque en el resultado aislado*, como lo llamó Konold (1991), es una de las grandes barreras que dificultan una buena comprensión de los procesos aleatorios y de la medida de probabilidad.

Así las cosas, si el problema radica en la falta de un número suficiente de repeticiones, la solución debe ser, entonces, diseñar experimentos y repetirlos un número grande de veces. Fischbein (1982), por ejemplo, resalta la necesidad de la práctica controlada de experimentos aleatorios como el medio más eficaz de desarrollar nuevas intuiciones probabilísticas:

> ... para crear nuevas y correctas intuiciones el estudiante debe involucrarse activamente en un proceso de realización de ex-

> perimentos aleatorios, de predecir resultados y evaluar posibilidades, de confrontar resultados individuales y grupales con unas predicciones calculadas a priori, etc. Nuevas y poderosas intuiciones probabilísticas no pueden ser producidas por la sola práctica de las fórmulas de probabilidad (p. 12).

En este mismo sentido, los Estándares Curriculares de la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), desde su primera edición de 1989 y ratificada en la versión del 2000, destacan el enfoque experimental de la probabilidad, la comparación de sus resultados con los resultados teóricos, las predicciones basadas en probabilidades, la realización de simulaciones para estimar probabilidades, como actividades básicas para generar intuiciones válidas acerca de los procesos aleatorios, de la medida de probabilidad y de la relación de los modelos teóricos con los resultados prácticos o reales.

Ahora bien, lo que los Estándares no mencionan es la forma como se deben implementar estas actividades en el salón de clase para producir los beneficios requeridos, y cuáles son las malas concepciones que se deben combatir.

Para llenar este vacío, en esta charla proponemos un esquema básico de realización de situaciones experimentales o de simulación que satisfagan los lineamientos propuestos.

A partir de dos problemas elementales de urna, uno con sustitución y otro sin ella, presentamos las respuestas más comunes que se presentan en las personas de todas las edades cuando se les proponen estos problemas u otros equivalentes, y proponemos la forma de mejorarlas. El primer problema nos permite introducir el enfoque frecuencial de la probabilidad, en tanto que el segundo se refiere a algunas ideas claves alrededor de los experimentos compuestos y por ende de la probabilidad condicional.

Problema 1

Consideremos una urna que contiene una bola blanca y una bola negra. El experimento consiste en extraer con sustitución una bola de la urna e identificar su color.

1) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?
2) Si realizamos 10 extracciones, ¿cuántas bolas negras se extraerán?

La investigación en didáctica de la probabilidad ha reportado que muchas personas responden de la siguiente forma a cada una de las preguntas anteriores:

1) *"Como existen dos bolas y una de ellas es negra, la probabilidad de obtener una bola negra es ½".*

Esta respuesta, en un sentido positivo, puede estar reflejando una *intuición válida de la probabilidad clásica*[1] como modelo teórico a priori. Sin embargo, desde otro punto de vista puede ser el reflejo de un esquema de proporcionalidad que las personas en general poseen y que aplican en el caso de la probabilidad, sin mucha claridad sobre las condiciones subyacentes y mucho menos sobre sus consecuencias predictivas, tal como lo muestran las respuestas a la segunda pregunta.

2) *"Por lo tanto, si realizo 10 extracciones se deben obtener 5 bolas negras". Otra respuesta muy popular es que "puede obtenerse cualquier cantidad".*

La primera respuesta evidencia una concepción determinista en la interpretación del valor de la probabilidad, que muchas veces hace que se niegue su carácter predictor cuando, al realizar las repeticiones, observen que su predicción no concuerda en la mayoría de los casos con los resultados obtenidos. La segunda respuesta muestra una concepción muy generalizada entre las personas, en el sentido de que lo aleatorio es incontrolable y por lo tanto carente de regularidades y donde todos los eventos son equiprobables.

Para combatir tanto el enfoque aritmético del valor de probabilidad como la idea de equiprobabilidad de los eventos aleatorios, lo mejor es repetir el experimento un número "suficiente" de veces. En el salón de clase se puede pedir a los estudiantes que se agrupen en parejas y que realicen 100 extracciones con sustitución de una bolsa con dos bolas (o que realicen el experimento equivalente de lanzar una moneda) y que lleven el registro de los resultados obtenidos en una tabla con varias columnas, donde además de los resultados individuales se registre el número de bolas negras obtenidas acumuladas y la frecuencia relativa asociada a este resultado. El gráfico 1 muestra algunas gráficas diferentes de las frecuencias relativas que se podrían producir con la experimentación de los estudiantes.

[1] Si un experimento aleatorio tiene un número finito N de resultados posibles, se obtiene el modelo clásico de probabilidad, que define la probabilidad de obtener un evento A de la forma siguiente: $$P(A) = \frac{\text{total de resultados favorables a A}}{N}$$

Las diferentes gráficas de las frecuencias relativas nos permiten observar tres hechos fundamentales:

1. La existencia de la variabilidad, es decir de los diferentes valores que toman las frecuencias relativas. Esta variabilidad, además, es diferente para las diversas muestras obtenidas.
2. La variabilidad de las frecuencias relativas obtenidas disminuye a medida que se aumentan el número de repeticiones del experimento.
3. Se infiere que si se siguen aumentando el número de repeticiones, la variabilidad se hará cada vez más pequeña, y por tanto el valor de las frecuencias relativas debe tender a un valor constante.

Para corroborar la última conjetura, juntando los resultados de todas las parejas de estudiantes, o simulando el experimento en un computador que permite repetir miles de veces el experimento, se puede percibir la convergencia de las frecuencias relativas para cualquiera de las muestras que se generen.

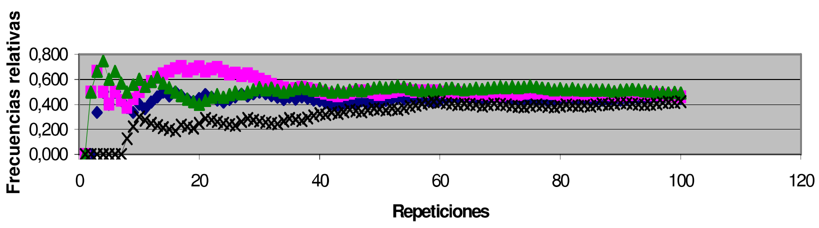


Gráfico 1. Frecuencias relativas vs repeticiones

Los resultados de la experiencia se resumen en la siguiente expresión que, además de introducir el concepto de probabilidad frecuencial, ratifica la cercanía entre el resultado proporcionado por el modelo clásico y los resultados de la experimentación:

$$P(negra) = \frac{1}{2} \approx \frac{n_{bn}}{n}, \quad (1)$$

siendo n_{bn} las extracciones donde se obtuvo un bola negra y n el total de extracciones efectuadas.

Con base en modelos semejantes, donde en lugar de dos bolas se cuente con un mayor número y en proporciones diferentes, es factible que los estudiantes lleguen a la siguiente conclusión, que presentamos en su forma simbólica, donde el infinito es asumido en términos de una cantidad enorme de repeticiones:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}, \quad (2)$$

donde N_A son los resultados favorables a A y N son el total de resultados posibles, en tanto que n_A son las repeticiones donde se obtuvo un resultado favorable a A y n el total de repeticiones.

Las actividades diseñadas para obtener las expresiones (1) y (2) nos permiten resaltar las siguientes ideas fundamentales asociadas con el concepto de probabilidad:

1. La identificación del valor de probabilidad frecuencial sólo es posible cuando se realiza una gran cantidad de repeticiones del experimento.
2. La probabilidad frecuencial es solo una; lo que son múltiples son las aproximaciones obtenidas, que dependen tanto de la muestra generada como de su tamaño. Las aproximaciones son mejores cuanto mayor sea el tamaño de la muestra.
3. Existen dos formas de controlar los resultados que se obtienen al realizar el experimento: por el número de repeticiones y por la relación que existe entre los resultados posibles. Estas formas son equivalentes cuando en realidad los resultados son igualmente probables, lo que justifica el modelo teórico clásico.
4. El carácter predictivo de la probabilidad se asocia con conjuntos de repeticiones y no con el siguiente resultado al realizar una repetición más del experimento aleatorio.

De la expresión (2), y considerando un número finito de realizaciones de un experimento, podemos obtener una expresión que, además de caracterizar el carácter predictor de la probabilidad, tiene consecuencias operativas muy interesantes en problemas de inferencia probabilística (cuando se trata de deducir probabilidades a partir de probabilidades conocidas), como veremos en el problema 2 más adelante:

$$n_A \approx n \,.\, P(A). \quad (3)$$

Problema 2

Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Se extraen sin sustitución dos bolas.

1) Si se extrae una bola blanca en la primera extracción, ¿cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca en la segunda extracción?
2) Si se extrajo una bola blanca en la segunda extracción, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído una bola blanca en la primera?
3) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca en la segunda extracción?

Se han reportado las siguientes respuestas:

1) *"Como ya se extrajo una bola blanca que-*

dan dos bolas negras y una blanca, por lo tanto la probabilidad de obtener una blanca en la segunda es 2/3". Intuición válida de probabilidad condicional cuando la relación "causal" es directa, o, desde otro punto de vista, la relación condicional está en la misma dirección del tiempo: el evento condicionante es anterior al evento condicionado. Esta intuición sobre la condicionalidad se complementa con el enfoque clásico de la probabilidad.

2) *"½ porque la primera extracción no se ve afectada por la segunda".* Esta respuesta responde a una concepción causal-cronológica de la probabilidad condicional (Falk, 1979) en la que se asume que el evento condicionante no puede suceder después del evento condicionado.

Respondiendo a una intuición de la probabilidad condicional relacionada con el enfoque frecuencial de la probabilidad, para combatir esta mala creencia se realizarían varias repeticiones del experimento para luego calcular el cociente del número de repeticiones, donde se obtienen bolas blancas en ambas extracciones sobre el total de extracciones donde la segunda bola extraída es blanca.

Si bien de esta forma se obtiene una respuesta que contradice la intuición inicial y que conduce a la respuesta acertada, la experimentación en sí misma no concede una razón intuitiva que justifique el resultado obtenido. Como es claro que la aplicación de la regla de Bayes no genera una intuición acerca del problema y de su solución, proponemos dos formas diferentes de hacerlo: una primera idea es percibir que el experimento de las dos extracciones, una después de la otra, es equivalente a extraer las dos extracciones simultáneamente, y por lo tanto, la condicionalidad no se asocia con el tiempo y puede realizarse en los dos sentidos con resultados iguales. La segunda forma se aprovecha de una intuición que las personas poseen y que se manifiesta cuando la pregunta se propone en los siguientes términos: Si se extrajo una bola blanca en la segunda extracción, qué es más probable: ¿extraer en la primera extracción, una bola blanca o una negra? Las personas responden que "si se extrajo una bola blanca en la segunda es porque había más bolas blancas en la bolsa al realizar la segunda extracción, cosa que sólo se produce extrayendo una bola negra en la primera extracción. Luego es más probable obtener una bola negra en la primera". Este razonamiento y el resultado de la experimentación pueden provocar un razonamiento semejante a este: "Si ya salió una blanca en la segunda extracción, quiere decir que en la primera solo se deben considerar dos bolas negras y una blanca, por lo tanto la probabilidad requerida es 1/3".

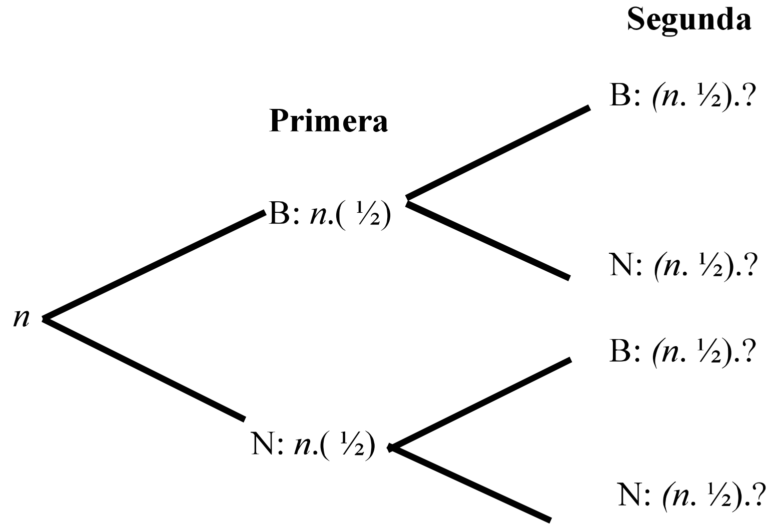
3) *"Depende de la primera extracción: Si en la primera extracción la bola es blanca, la probabilidad de que la segunda sea blanca es 1/3; si por el contrario, la bola de la primera extracción es blanca, la probabilidad de que la segunda sea blanca es 2/3".*

Esta respuesta es típica del uso del llamado enfoque en el resultado aislado que mencionamos previamente, y que se caracteriza por asumir el valor de probabilidad como una medida de certeza respecto a un solo resultado del experimento aleatorio. El razonamiento utilizado tiene un cierto sabor lógico que no es compatible con el razonamiento probabilístico asociado con muchos resultados. Un forma de resolver esta pregunta utilizando la intuición que existe sobre las probabilidades condicionales directas, y que muestra que las simulaciones se pueden realizar mentalmente y que los resultados se pueden obtener como una consecuencia de la definición frecuencial de la probabilidad utilizando la expresión (3), es la siguiente: Al realizar n repeticiones del experimento, según (3) en aproximadamente n. ½ de ellas se obtiene una bola blanca, y en otro tanto bolas negras. De cada una de estas cantidades se obtienen (n. ½).? y (n. ½).? bolas blancas en la segunda extracción, respectivamente. Luego por el mismo enfoque frecuencial de la probabilidad se tiene que la probabilidad de obtener una bola blanca en la segunda extracción es igual a

$$P(B_2) = \frac{(n.1/2).1/3 + (n.1/2).2/3}{n} = (1/2)(1/3) + (1/2)(2/3) = 1/2$$

Una representación gráfica de este procedimiento se asocia con el diagrama de árbol que aparece en la gráfica 2 que en sí mismo es una opción operativa para problemas de probabilidad condicional que debe ser incentivada en el salón de clase.

Gráfica 2. Representación del enfoque frecuencial restringido en un diagrama de árbol



Conclusiones

Como se observa, el enfoque frecuencial de la probabilidad le imprime un carácter de laboratorio al tratamiento de la probabilidad, y se constituye en un referente para dirimir las discusiones que alrededor de la creación de modelos en probabilidad muchas veces se dan. La realización de experimentos aleatorios en el salón de clases, además de considerar la equivalencia de experimentos aleatorios, permite confrontar las intuiciones erradas que las personas poseen respecto al comportamiento de las secuencias aleatorias y del significado de la probabilidad. Por su limitación en la formación de intuiciones, las experimentaciones en clase deben acompañarse de razonamientos relacionados que permitan la justificación de los resultados y la formación de buenas intuiciones probabilísticas. El enfoque frecuencial, cuando se aborda de acuerdo a la expresión (3) y que llamamos enfoque frecuencial restringido, permite resolver problemas de inferencia probabilística sin tener que realizar físicamente el experimento (Yáñez, 2003).

Referencias bibliográficas

FALK, R. (1979). *Revision of Probabilities and the Time Axis*. In: Proceedings of the third international conference for the psychology of mathematics education, 64-66, Warwick, England.

FISCHBEIN, E., (1982). *Intuitions and proof.* In: For the Learning of Mathematics, 3(2), 9-19.

KONOLD, C. (1991). *Understanding Students' Beliefs about Probability*. In: Von Glasersfeld (ed.). *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 139-156. Kluwer.

YÁÑEZ, G. (2003). *Estudios del efecto del enfoque frecuencial de la probabilidad implementado a través de la simulación computacional en la comprensión de los procesos aleatorios, la probabilidad y la probabilidad condicional.* Tesis Doctoral, CINVESTAV-IPN, México.

Extensiones del modelo de van Hiele fuera del ámbito de la geometría elemental

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA | ANDRÉS DE LA TORRE GÓMEZ

Entre los continuadores de Piaget se cuentan los esposos Pierre y Dina van Hiele, quienes introdujeron en Holanda, a partir de 1957, el modelo de los niveles de pensamiento con el propósito de desarrollar en los alumnos de la escuela elemental el *insigtht* en la geometría [14], [15]. El modelo despertó de inmediato el interés de los psicólogos en la Unión Soviética, hasta el punto que A. M. Pyshkalo, en 1963, lo tomó como base para su programa de enseñanza de la geometría. En los Estados Unidos, Izaak Wirszup introdujo formalmente las ideas de los van Hiele mediante la conferencia titulada *Some Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry,* ante el encuentro anual del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), de Atlantic City, realizado en 1974. Algunas publicaciones, como las de Hans Freudenthal [7], Alan Hoffer [9] y A. Coxford [2], ayudaron a despejar el camino.

Aunque los van Hiele recibieron una fuerte influencia de Piaget, se separaron de éste en puntos cruciales, como los siguientes:

i) La teoría psicológica de Piaget se refiere primordialmente al desarrollo del niño, más que al aprendizaje. En el modelo de van Hiele, en cambio, es esencial el asunto de cómo estimular a los niños para que asciendan de un nivel al siguiente. La teoría de las fases de aprendizaje de van Hiele responde a esta necesidad.

ii) Piaget no captó en toda su dimensión el papel que juega el lenguaje en el paso de un nivel a otro por parte del aprendiz. En el modelo de van Hiele, en cambio, el aprendiz desarrolla un lenguaje específico para cada nivel de pensamiento.

iii) Piaget no veía la existencia de estructuras en un nivel superior como resultado del estudio de un nivel inferior. En el modelo de van Hiele sólo se alcanza el nivel superior si las reglas que gobiernan el nivel inferior han sido hechas explícitas y estudiadas, convirtiéndose así en una nueva estructura.

Siguiendo a Hoffer [8], quien se inspira para ello en la interpretación de los niveles de pensamiento como categorías, se pueden identificar los objetos para cada uno de los niveles en la siguiente forma: