NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 104, julio de 2020, páginas 239-260

¿Cómo promover la alfabetización probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para la Educación Secundaria

Claudia Vásquez (Pontificia Universidad Católica de Chile. Chile)
Luis J. Rodríguez-Muñiz (Universidad de Oviedo. España)
Laura Muñiz-Rodríguez (Universidad de Oviedo. España)
Ángel Alsina (Universidad de Girona. España)

Fecha de recepción: 29 de mayo de 2020
Fecha de aceptación: 30 de junio de 2020

Resumen En este artículo se realiza una propuesta de actividades de aula para Educación Secundaria (12-16 años) a partir de la COVID-19, con base en una fundamentación teórica sobre la alfabetización probabilística. En la primera parte, se describen los conocimientos que debe movilizar el profesorado de esta etapa educativa para una comprensión adecuada de la probabilidad y, a la vez, para promover la alfabetización probabilística, considerando el objeto de la probabilidad y su relación tanto con la estadística descriptiva como inferencial. Desde esta visión, se abordan los distintos significados (intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático) que conforman la Teoría de la Probabilidad. En la segunda parte, se presentan cuatro experiencias de aula para fomentar la adquisición de estos conocimientos a partir de datos de la COVID-19. Se concluye que la alfabetización probabilística, junto con la alfabetización estadística y de datos, contribuye a formar ciudadanos y ciudadanas con un pensamiento crítico y, sobre todo, conscientes del rol que cada uno desempeña en la sociedad y en el bienestar global.

Palabras clave Alfabetización probabilística, conocimiento matemático para la enseñanza, enseñanza de las matemáticas en contexto, COVID-19, educación para la sostenibilidad, Educación Secundaria.

Title **How to promote probability literacy in context? Strategies and resources from COVID-19 for Secondary Education**

Abstract In this article, we present a proposal of classroom activities for Secondary Education (12-16 years old) from COVID-19, based on a theoretical foundation on probability literacy. In the first part, we describe knowledge that secondary education teachers must mobilize for an adequate understanding of probability and, additionally, to promote probabilistic literacy, considering the aim of probability and its relation to both descriptive and inferential statistics. From this vision, the different approaches (intuitive, classic, frequentist, subjective and axiomatic) that are included within the Probability Theory are addressed. In the second part, four classroom experiences considering COVID-19 data are presented to promote the acquisition of this knowledge. It is concluded that probabilistic literacy, together with statistical and data literacy, contributes to train citizens with critical thinking and, above all, aware of the role that each one plays in society and in global well-being.

Keywords Probability literacy, mathematical knowledge for teaching, teaching mathematics in context, COVID-19, education for sustainability, secondary education.

Sociedad Canaria *Isaac Newton*
de Profesores de Matemáticas

1. Introducción

Este artículo viene a completar el trabajo en torno a la alfabetización estadística y de datos en Educación Secundaria presentado en esta misma sección de Propuestas de Aula, a la vez que está enlazado con el estudio de Alsina, Vásquez, Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz (2020), en el que se abordan conjuntamente la alfabetización estadística y probabilística en Educación Primaria. Como continuación de estos trabajos preliminares, y con el propósito de ofrecer una visión integrada que, por un lado, no suponga una fragmentación entre la estadística y la probabilidad y, por otro, una rotura en la transición entre las etapas de Educación Primaria y Secundaria, la primera finalidad de este artículo es describir los conocimientos o ideas fundamentales clave que debería movilizar el profesorado de Educación Secundaria para tener una comprensión adecuada de la probabilidad y, a la vez, promover la alfabetización probabilística, considerando el objeto de la probabilidad y su relación con la estadística tanto descriptiva como inferencial.

Como señala Batanero (2005), la probabilidad tiene un significado polifacético que no se limita a una única perspectiva, sino que es imprescindible abordar el conjunto de perspectivas que se muestran en la Figura 1: significados intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático, que conforman la Teoría de la Probabilidad (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Estos significados están relacionados dialécticamente ya que la probabilidad puede contemplarse como razón de posibilidades a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que ayuda a comprender la realidad.

Figura 1. Significados de la probabilidad en el contexto de la matemática escolar (Batanero, 2005). Fuente: Vásquez y Alsina (2019).

Desde este prisma, en la primera parte se describen los conocimientos disciplinares y didácticos que la investigación recomienda que debería movilizar el profesorado de Educación Secundaria para promover la alfabetización probabilística del alumnado a partir de sus diferentes significados; y en la segunda parte se presentan diversas experiencias de aula para trabajar estos conocimientos en contexto, a partir de datos de distinta naturaleza obtenidos de la COVID-19.

2. Conocimientos acerca de la probabilidad y su enseñanza

La probabilidad, además de ser un área importante del currículo de matemáticas que permite la modelización y la resolución de problemas de distintos ámbitos (Vásquez y Alsina, 2014), es una herramienta esencial para el desarrollo de conceptos estadísticos y de la estadística inferencial (NCTM, 2013). Así, en el estudio de la probabilidad, es importante destacar y diferenciar su uso como un modelo matemático para predecir el comportamiento en situaciones aleatorias y su uso como herramienta para el razonamiento estadístico. Para ejemplificar esta diferencia, el marco GAISE (Franklin et al. 2007, p. 8) propone los dos problemas siguientes:

> Problema 1: Suponga que se cuenta con una moneda “justa” (no cargada). Si lanzamos la moneda cinco veces, ¿cuántas caras obtendremos?
>
> Problema 2: Tú eliges una moneda, ¿es esta una moneda justa?

Si bien ambos problemas involucran una respuesta no determinista, puesto que el lanzamiento de una moneda genera resultados aleatorios, se enfocan en usos diferentes de la probabilidad. El problema 1 es un problema de probabilidad matemática, que bajo el supuesto de que se cuenta con una moneda honesta, implica elaborar un modelo para deducir la probabilidad para cada número de caras al lanzar la moneda, indicando con qué frecuencia puede ocurrir cada resultado. Por su parte, el problema 2 es un problema de estadística que utiliza el modelo de probabilidad matemática determinado en el problema 1 como una herramienta para tomar una decisión sobre si la moneda es o no justa.

Estos problemas permiten visualizar la conexión entre probabilidad y estadística, además de ejemplificar que la resolución de problemas estadísticos es diferente a la modelización probabilística. En este sentido, es importante que el profesorado proporcione al alumnado experiencias que permitan diferenciar el uso de la probabilidad, además de entender que estadística y probabilidad no son lo mismo, pues la estadística utiliza como herramienta a la probabilidad (Figura 2), como se ha puesto de manifiesto en el artículo sobre alfabetización estadística y de datos de esta misma sección.

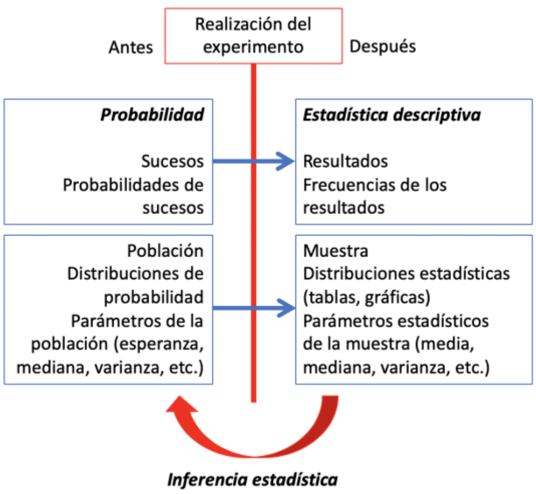

Figura 2. Esquema del tipo de tratamiento matemático de los experimentos aleatorios. Fuente: elaboración propia.

Desde este prisma, para comprender el razonamiento de la inferencia estadística, es necesario que el alumnado entienda la probabilidad como una medida de la posibilidad de que algo ocurra, una medida de incertidumbre. Estos conocimientos son necesarios para que posteriormente, desde un punto de vista más formal, puedan comprenderla como una frecuencia relativa de ocurrencia de una situación dada, donde al repetir un número suficientemente grande de veces un experimento, de manera independiente y en las mismas condiciones, tales frecuencias tienden a estabilizarse o acercarse cada vez más a cierto valor. Por ejemplo, en el experimento aleatorio "lanzamiento de una moneda", cuando se lanza una moneda al aire hay sólo dos resultados posibles, cara o cruz. El resultado no se puede predecir de antemano y variará cuando se lance de forma repetida; sin embargo, se observa una cierta regularidad en los resultados, regularidad que habitualmente emerge después de muchas repeticiones, como se ilustra en la Figura 3.

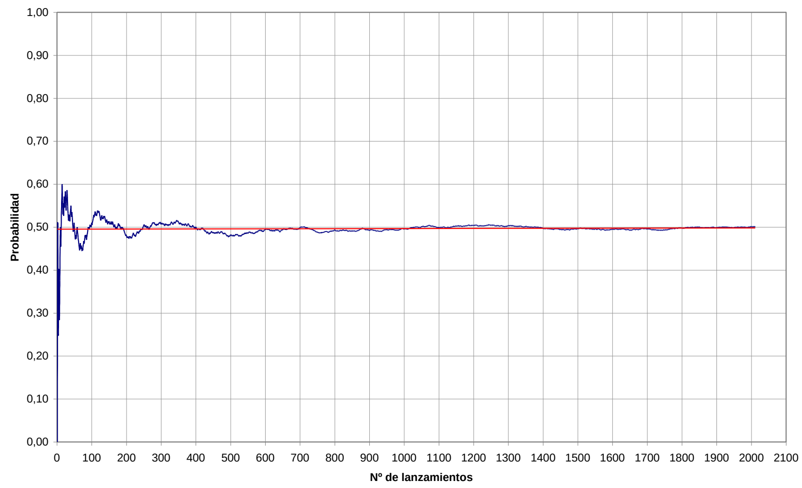

Figura 3. Regularidad observada al lanzar una moneda 2 000 veces. Fuente: Elaboración propia.

Después de lanzar la moneda 2 000 veces, la proporción de lanzamientos (frecuencia relativa) en los que se obtiene "cara" es bastante variable al principio, pero a medida que se hacen más y más lanzamientos, esta se estabiliza acercándose a 0.5 y manteniéndose en dicho valor. La probabilidad de obtener "cara" es, pues, de 0.5, lo que significa que el suceso "cara" ocurre aproximadamente la mitad de las veces, después de muchos lanzamientos. De lo anterior podemos deducir que, cuando lancemos una moneda al aire, un gran número de veces, aproximadamente el 50 % de ellas se observará el resultado "cara". Este valor es el que se define como la probabilidad de obtener una cara al lanzar una vez una moneda. En la medida en que repetimos más y más veces un experimento, la frecuencia relativa de ocurrencia de un resultado se acerca cada vez más a un valor. El valor al cual se acerca, se denomina probabilidad de ocurrencia del resultado de interés. En este sentido, resulta interesante preguntarse ¿siempre se estabilizará una secuencia de frecuencias relativas? ¿qué condiciones deben darse para que esto ocurra? Es importante destacar que se requiere que las repeticiones del experimento se realicen en las mismas condiciones, y que tales repeticiones del experimento se realicen de manera independiente. Por consiguiente, se debe promover la comprensión del concepto de independencia desde la perspectiva de que dos sucesos son independientes si la asignación de probabilidad de que un determinado suceso ocurra no se ve influenciada (afectada) por el conocimiento de que el otro suceso haya ocurrido. Esta noción es valiosa para la inferencia estadística, pues se emplea en la configuración de muestreos, la selección aleatoria de una población, ya que muchos de los métodos que se utilizan para extraer conclusiones sobre una población basada en datos de una muestra requieren que las observaciones en la muestra sean independientes.

La comprensión de estas nociones es clave para el desarrollo de la alfabetización probabilística; entendida esta como la capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas del mundo real que implican incertidumbre y riesgo (Gal, 2002, 2005). Para conseguir este propósito, resulta imperativo alcanzar una comprensión de la probabilidad desde la amplitud de significados (Figura 1) que deben ser considerados a la hora de enseñar este tema (Batanero, 2005), como ya se ha indicado en la introducción. A continuación, pues, se describe cada significado y se describen algunos conocimientos específicos que deben ser trabajados en Educación Secundaria.

a) Significado intuitivo: asigna cualitativamente probabilidades a sucesos a partir de preferencias individuales. En este contexto las ideas intuitivas sobre el azar aparecen en la utilización de términos de uso común para referirse a la incertidumbre, expresar y cuantificar, por medio de frases coloquiales, el grado de creencia en relación con sucesos inciertos.

b) Significado clásico: considera la probabilidad de un suceso como la razón entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles en el experimento, siempre que todos los resultados sean igualmente probables. Esta definición predomina en el contexto escolar, dada su simplicidad, aun cuando no puede ser aplicada en experimentos con un número infinito de posibilidades o cuando el espacio muestral es finito, pero no equiprobable. Así, pues, se debe ser prudente al aplicar esta definición, ya que puede provocar el sesgo de la equiprobabilidad, si se aplica igualmente la fórmula cuando no se cumple esta condición.

c) Significado frecuencial: plantea la asignación de probabilidades a partir de la frecuencia relativa observada en un gran número de repeticiones, permitiendo estimar la probabilidad del suceso. Así, la Ley de los Grandes Números indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones tienda a la probabilidad teórica, puede aproximarse suficientemente a 1, sin más que aumentar el número de pruebas. Desde este enfoque, el principal elemento es la objetividad del concepto probabilidad, ajeno a la consideración de factores personales y sujeto a la demostración práctica por medio de la experimentación. Pese a que la concepción frecuentista de la probabilidad brinda objetividad, contribuye a solucionar las dificultades que presentaba la concepción clásica de la probabilidad y al mismo tiempo permite ampliar los campos de aplicación conectando la estadística con la probabilidad, este significado presenta ciertas limitaciones en el aula (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Entre estas limitaciones destacan la imposibilidad de realizar un experimento una infinidad de veces bajo las mismas condiciones para poder determinar la probabilidad de ocurrencia de un suceso cualquiera; no permite obtener un valor exacto, sino aproximaciones; se desconoce la cantidad necesaria de ensayos que permiten una buena estimación; y, por último, es inaplicable a sucesos que, si bien son aleatorios, son irrepetibles.

d) Significado subjetivo: se fundamenta en la confianza que una persona deposita sobre la veracidad de una determinada proposición, por lo que no está unívocamente determinada. La probabilidad depende del observador y de lo que este conoce del suceso en estudio. Este enfoque es útil e interesante en el aula como herramienta didáctica, puesto que permite vincular el estudio de la probabilidad con las experiencias previas del alumnado, que en una primera instancia (significado intuitivo) permitían medir la posibilidad de ocurrencia de forma cualitativa. Existen numerosos experimentos aleatorios en nuestra vida cotidiana en los que no se puede utilizar la regla de Laplace o que no son reproducibles en idénticas condiciones, por lo que el significado frecuencial tampoco es aplicable. Sin embargo, mediante el significado subjetivo es posible determinar cuantitativamente la probabilidad de ocurrencia de esos sucesos, a partir de la intuición y revisando la asignación inicial con la información adicional que pueda aparecer sobre el suceso (frecuencias relativas, razones de equiprobabilidad, etc.). Esto nos permite una aproximación didáctica para discutir, en el seno del grupo, cuánta información maneja cada miembro para emitir sus juicios y de qué calidad es esta. Por ejemplo, si nos planteamos la probabilidad de que mañana llueva, la primera respuesta del grupo puede estar basada en la intuición, podemos preguntar cuáles son los motivos de su asignación de probabilidad, y, después, podemos ir incorporando información adicional (lleva toda la semana lloviendo, parece que el tiempo sigue inestable, en este mes nunca suele llover tanto, etc.) para que el alumnado vaya procesándola y revisando su asignación inicial, aunque obviamente al tratarse de una asignación subjetiva, no tenemos por qué llegar a un valor de probabilidad de consenso para todo el grupo.

e) Significado axiomático: concibe la probabilidad como un tipo especial de medida, vinculándola con la teoría de la medida, estableciendo axiomas a satisfacer. Bajo este enfoque, los sucesos se pueden identificar con conjuntos, donde el espacio muestral (Ω) es el conjunto de todos los resultados posibles y los diferentes sucesos corresponderían a subconjuntos de este. En este sentido, la probabilidad es considerada una medida normada, acotada entre 0 y 1, definida sobre estos conjuntos. Un suceso con probabilidad 0 implica que no hay ninguna posibilidad de que este ocurra (es un suceso imposible), mientras que un suceso con probabilidad 1 implica que siempre ocurre (es un suceso seguro). Además, debe cumplir con los siguientes axiomas:

1. La probabilidad de cualquier suceso A es positiva o cero, es decir, $P(A) \geq 0$.
2. La probabilidad del suceso seguro es 1, es decir, $P(\Omega)=1$.
3. La probabilidad de la unión de un conjunto cualquiera de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de los sucesos. Esto es, si A y B son sucesos incompatibles, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ cuando $A \cap B = \emptyset$.

De este modo, a cualquier función P que satisfaga estos tres axiomas se le llama medida de probabilidad, o simplemente probabilidad.

Es necesario clarificar que, en relación con la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, es esencial adoptar una perspectiva de modelización de manera que tales significados se complementen, ya que una comprensión adecuada del concepto no puede limitarse solo a uno de ellos (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Por tanto, es fundamental que los profesores y las profesoras sean conscientes de estos significados, pues de lo contrario difícilmente podrán comprender los obstáculos y dificultades a los que se verá enfrentado el alumnado, quien en su proceso de construcción y aprendizaje "se encontrará con las mismas paradojas y situaciones contraintuitivas que aparecieron en el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades" (Batanero, 2007, p. 28). De este modo, se espera que los maestros y las maestras sean capaces de orientar el proceso de enseñanza de una manera progresiva a partir de las ideas intuitivas del alumnado sobre azar y probabilidad, para luego incorporar de manera gradual y complementaria los diferentes significados e ir construyendo poco a poco el concepto de probabilidad, pues tal y como afirmó Laplace: "el aprendizaje de la probabilidad nos ayuda a evitar ilusiones en la toma de decisiones y por ello no hay ciencia más digna de nuestro estudio ni más útil para que se incluya en el sistema público de educación" (Laplace, 1985/1814, p. 206-207).

3. Propuesta de actividades de aula a partir de la COVID-19, organizadas por edades

A continuación, se describe un conjunto de propuestas de actividades contextualizadas en la COVID-19, cuyo objetivo es promover la alfabetización probabilística en Educación Secundaria. Concretamente, se muestran cuatro experiencias, organizadas progresivamente por edades desde los 12 a los 16 años, que se corresponden a los cursos de Educación Secundaria en la mayor parte de los países. La estructura que se sigue es siempre la misma: en primer lugar, se indica el nivel o edad sugerida para su implementación; en segundo lugar, los contenidos vinculados a la alfabetización probabilística que se abordan en cada experiencia; y, finalmente, una descripción de cada actividad con diversas orientaciones para su implementación en el aula.

Experiencia 1. ¿Cómo se propaga la COVID-19 en un avión?

Nivel: 12-13 años

Contenidos implícitos: posibilidad de ocurrencia como escala cualitativa, probabilidad de ocurrencia como medida cuantitativa, relación entre distintas representaciones numéricas de la probabilidad (razones, fracciones, decimales y porcentajes)

Descripción de la actividad: Se presenta la actividad a partir de la discusión sobre: ¿qué tipo de mensaje transmite la Figura 4? ¿cómo interpretarlo? ¿es suficiente el uso de mascarillas para reducir la probabilidad de contagio de COVID-19?

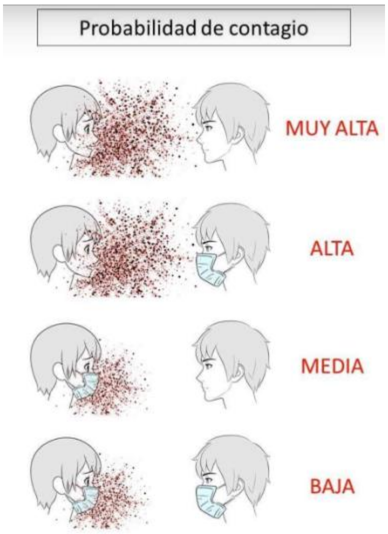

Figura 4. Probabilidad de contagio en función del uso de mascarillas. Fuente: www.lasexta.com

De esta manera, se espera que el alumnado identifique el riesgo de contagio como una situación de incertidumbre. En este sentido, la Figura 4 representa una escala cualitativa que permite valorar la probabilidad de contagio en función del uso de mascarillas, lo que permite introducir y discutir en torno a la escala cualitativa la posibilidad de ocurrencia de un suceso (Figura 5).

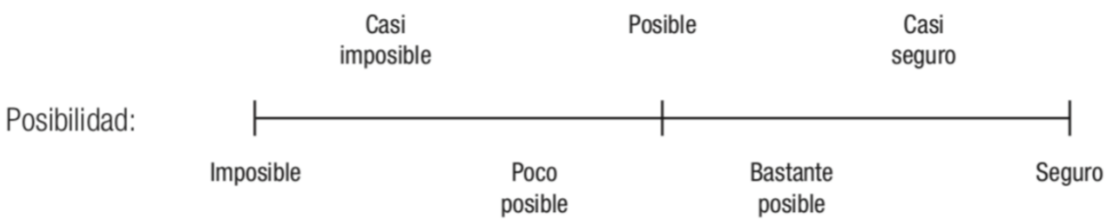

Figura 5. Escala cualitativa de posibilidad de ocurrencia. Fuente: Elaboración propia.

En este momento, el profesor o la profesora centra la discusión sobre ¿qué tipo de medidas es necesario tomar, más allá del uso o no de mascarillas, para reducir y controlar el número de contagiados?, pues el uso de mascarillas no es suficiente por sí solo, hay que complementarlo con las medidas de distanciamiento físico e higiene recomendadas en el contexto de la pandemia de la COVID-19. En este sentido, se debe orientar la discusión respecto a ¿cómo reducir el riesgo de contagio en los medios de transporte?, ¿qué sucederá, por ejemplo, si viajamos en un avión donde a bordo hay un contagiado?, ¿cómo se propaga la COVID-19 en un avión?, ¿podemos decidir cuál es el lugar más seguro para sentarse?

En la discusión en torno a estos interrogantes, surgirán afirmaciones variadas, por ejemplo: las personas tienen movilidad durante el vuelo, van al baño, caminan para estirar las piernas, retiran objetos desde los compartimentos superiores, etc. En este contexto, para guiar la discusión, se puede iniciar el diálogo presentando el reportaje del *National Geographic* (https://www.nationalgeographic.com/science/2020/01/how-coronavirus-spreads-on-a-plane/) en el que se explica cómo se transmite el coronavirus en un avión y cuál es el asiento más seguro (con menos riesgo de contagio), para luego presentar al alumnado la Figura 6, que muestra la probabilidad de tener contacto directo con una persona contagiada a bordo de un avión, a partir de un estudio sobre cómo los movimientos aleatorios dentro de la cabina del avión podrían cambiar la probabilidad de infección de los pasajeros.

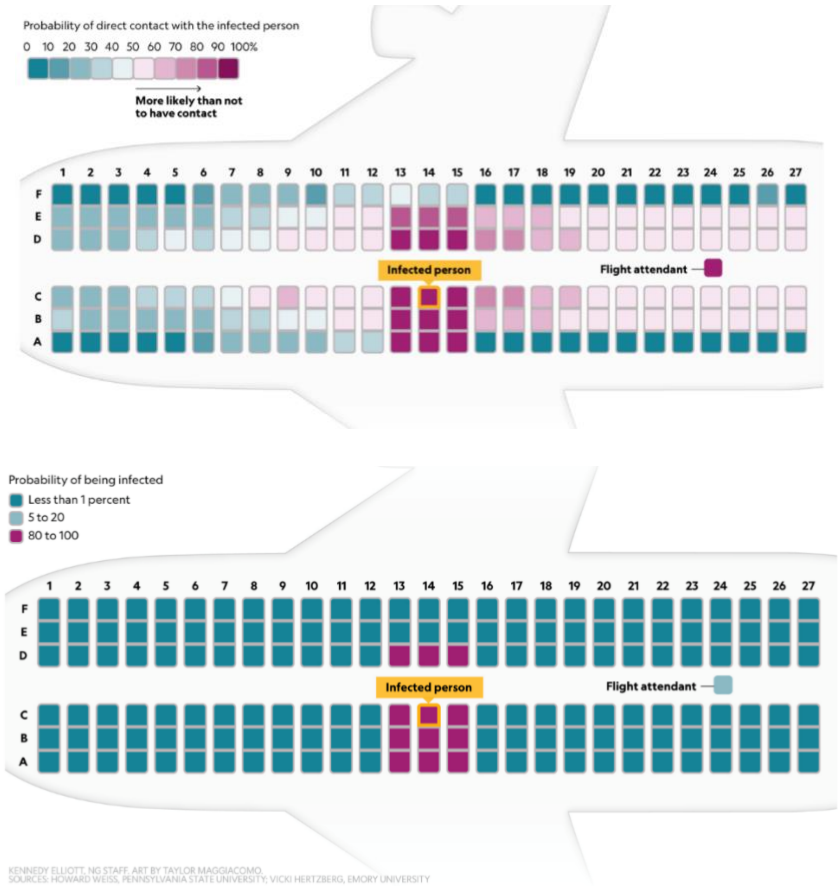

Figura 6. Probabilidad de contagio COVID-19 a bordo de un avión. Fuente: www.nationalgeographic.com.

En este momento, además de discutir sobre el tema, es importante hacer notar al alumnado la manera en que está presentada dicha probabilidad de contagio, pues ya no es definida por medio de una escala cualitativa que va desde lo imposible a lo seguro (Figura 5), sino que ahora la posibilidad de ocurrencia de una situación es cuantificada por medio de un valor entre 0 y 1 (Figura 7) ¿a qué se deberá esto?, ¿qué relación existe entre la escala cualitativa y esta escala cuantitativa?

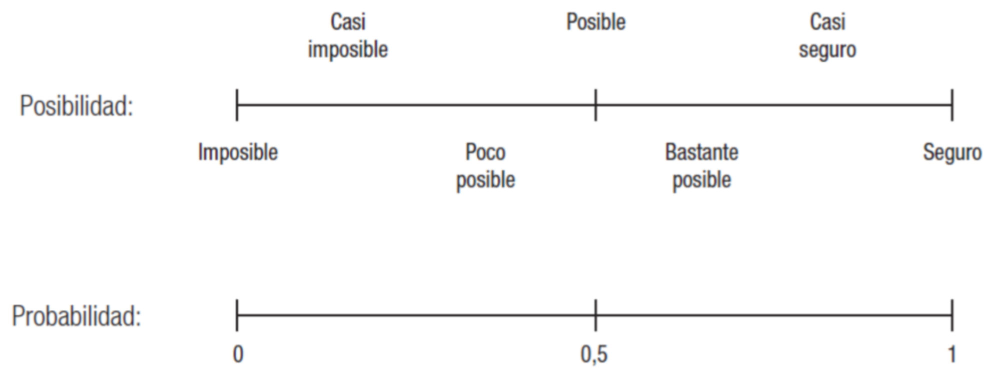

Figura 7. Correspondencia entre la escala cualitativa de posibilidad de ocurrencia y la escala cuantitativa de probabilidad de ocurrencia. Fuente: Elaboración propia.

Hay que hacer hincapié que el poder cuantificar la probabilidad de ocurrencia de un suceso no solo permite poder medir la incertidumbre y el azar, sino también poder establecer comparaciones entre probabilidades de ocurrencia de distintos sucesos. En este sentido es importante dilucidar la relación entre las distintas representaciones numéricas de la probabilidad (razones, fracciones, decimales y porcentajes) y las relaciones existentes entre ellas, favoreciendo el diálogo en torno a las distintas formas de representar la cuantificación de la probabilidad.

Así, en la Figura 7 la probabilidad de contacto directo con una persona infectada y la probabilidad de ser infectado son expresadas como un porcentaje entre 0 y 100 % de modo que una situación catalogada como “imposible” tendrá probabilidad de ocurrencia 0 y, en el otro extremo, una situación catalogada como “segura” tendrá probabilidad de ocurrencia 1. En la medida en que una situación tiene mayor posibilidad de ocurrir, su probabilidad de ocurrencia se acercará a 1 o a 100 %. Cuando la situación es catalogada como “posible”, su probabilidad de ocurrencia será de 0.5 (50 %). Es decir, existe una correspondencia entre grados de posibilidad y valores de probabilidad, ambos asociados a la ocurrencia de una misma situación.

También en relación con la situación planteada, es importante cuestionarse acerca de ¿qué significa, por ejemplo, tener una probabilidad de un 20 % de entrar en contacto directo con una persona infectada? El poder interpretar adecuadamente este tipo de información es importante para la toma de decisiones. En este momento el profesor o la profesora centra la discusión sobre ¿qué tipo de medidas es necesario tomar, más allá del uso o no de mascarillas, para reducir y controlar el número de contagiados en los medios de transporte? Esto lleva a evidenciar la necesidad de conocer e interpretar datos y cifras reales y actuales sobre la transmisión y propagación del virus.

Experiencia 2. Fiebre y hospitalización por COVID-19

Nivel: 13-14 años

Contenidos implícitos: tablas de contingencia, eventos simples, cardinalidad del espacio muestral, cálculo de probabilidad, asignación de probabilidades.

Descripción de la actividad: Se inicia la actividad preguntando al alumnado ¿qué conocéis respecto de los principales síntomas asociados a la COVID-19? La idea es provocar la discusión respecto de lo que han visto o escuchado en los distintos medios de comunicación, para así generar una lluvia de ideas sobre la información con la que cuentan. Luego, se les presentan imágenes como la de la Figura 8 para orientar la discusión, sobre todo de la presencia de fiebre dentro de los síntomas iniciales más comunes de la COVID-19.

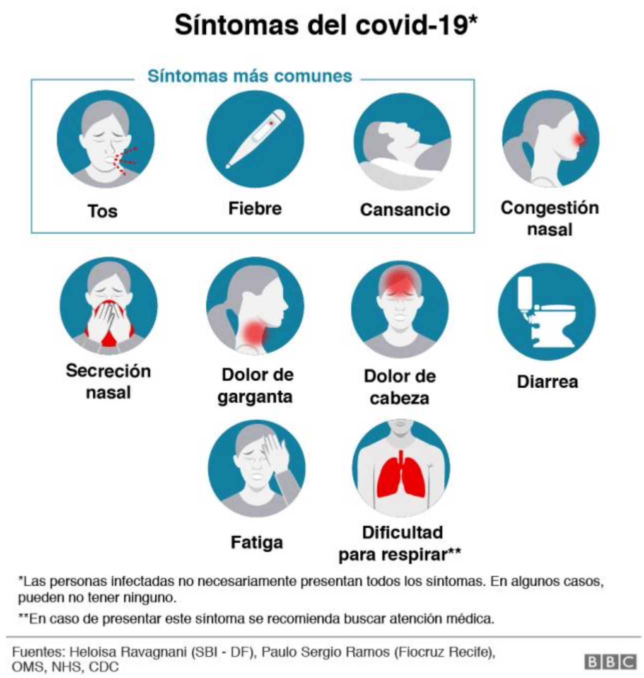

Figura 8. Principales síntomas COVID-19. Fuente: www.bbc.com.

Se discute sobre la imagen realizando preguntas del tipo ¿estás de acuerdo o en desacuerdo respecto de la información presentada? ¿por qué? ¿será la fiebre uno de los principales síntomas asociados a la COVID-19? ¿qué quiere decir esto?

Con el propósito de indagar respecto de si la fiebre es o no el principal síntoma de COVID-19, se presenta la Tabla 1 (elaborada a partir de los datos del informe epidemiológico número 18 del Ministerio de Salud chileno).

	Hospitalizado	No hospitalizado	Total
Fiebre	2 232	15 835	18 066
No fiebre	2 144	25 837	27 982
Total	4 376	41 672	46 048

Tabla 1. Presencia o no de fiebre en pacientes con COVID-19 hospitalizados y no hospitalizados en Chile al 17 de mayo de 2020.

En primer lugar, hay que señalar que la Tabla 1 es una tabla de contingencia que resume la información referente a la presencia de fiebre o no, en relación con la hospitalización de los pacientes enfermos de COVID-19. Es importante leer y analizar la información que presenta la tabla, para evitar dificultades en su comprensión, destacando la información que aportan las filas y columnas, así como la información presente en cada una de las celdas que corresponden a la intersección de los eventos en que se cumplen ambas características, por ejemplo: estar hospitalizado y presentar fiebre. Señalando además que los totales por columna o por fila corresponden a los eventos simples, y el total fila-columna a la cardinalidad del espacio muestral.

También es importante destacar que el cálculo de probabilidades es una herramienta que ayuda en el análisis de si la fiebre es el principal síntoma asociado a la COVID-19. En este sentido es de interés plantear, a partir de los datos presentados, preguntas como ¿cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar entre los hospitalizados por COVID-19 no presente fiebre?

Como podemos ver, en esta pregunta está involucrado el cálculo de probabilidades simples. Por lo tanto, a partir de la Tabla 1 se tiene que:

$$P\text{ (un hospitalizado no presente fiebre)} = \frac{2\,144}{4\,376} = 0.49$$

Luego, la probabilidad de que una persona elegida al azar entre los hospitalizados por COVID-19 no presente fiebre es de un 49 %. Para interpretar este valor, es necesario insistir en el concepto de experiencia aleatoria y de cómo la probabilidad tiene sentido cuando se plantea de manera previa a la experiencia (ver Figura 2, antes del experimento). Antes de seleccionar a una persona concreta de entre los hospitalizados, podemos afirmar que la probabilidad de que tenga fiebre es del 49 %, pero una vez elegida al azar una persona concreta, tendrá fiebre o no la tendrá, lo que comprobaremos con un termómetro, pero ya no tiene sentido hablar de probabilidad puesto que ya conoceremos el resultado de la experiencia aleatoria (ver Figura 2, después del experimento).

Podemos continuar la actividad suponiendo ahora que nos encontramos a cargo del servicio de urgencias de una pequeña localidad rural que no cuenta con los recursos para realizar el test PCR (*Polymerase Chain Reaction*) a los pacientes, e ingresa una persona con fiebre (Figura 9), ¿qué tan probable consideras que esté contagiado por COVID-19?

Figura 9. Paciente con fiebre, ¿posible COVID-19? Fuente: Elaboración propia.

Fácilmente, algún alumno o alumna se planteará si podemos utilizar la información de la Tabla 1, y posiblemente lo haga contando cuántos casos de los diagnosticados tienen fiebre, que serían 18 066 de los 46 048, lo que ofrecería una probabilidad de 0.39. Sin embargo, debemos explicar que la Tabla 1 nos habla de los pacientes ya diagnosticados, por lo tanto, ese cómputo, no corresponde a la probabilidad buscada sino a: P (un paciente de COVID-19 presente fiebre). Es muy importante ilustrar que, más allá de determinar conteos y obtener valores sobre una tabla de contingencia, debemos entender qué probabilidad se nos pide.

En el caso que nos ocupa, ¿cómo podríamos determinar la probabilidad de que ese paciente con fiebre esté contagiado por COVID-19?, aunque la probabilidad calculada antes nos pueda orientar, ya que parece que aproximadamente un 40% de los pacientes de COVID-19 tienen fiebre, esa no es la probabilidad de estar contagiado. Entramos, por lo tanto, en el terreno del significado subjetivo de la probabilidad. Podemos utilizar la información de la Figura 8 para realizar una estimación de dicha probabilidad, incluyendo también el dato de probabilidad de fiebre que nos daría la tabla. Es fundamental que pidamos al alumnado que explique su asignación de probabilidad: en qué se está basando y cómo lo calcula, es mucho más rico ese razonamiento que aportar un valor numérico exacto.

Damos una última vuelta de tuerca a la actividad: después de examinar al nuevo paciente y de mirar su ficha de registro, nos damos cuenta de que, además, presenta otros síntomas y enfermedades crónicas (Figura 10).

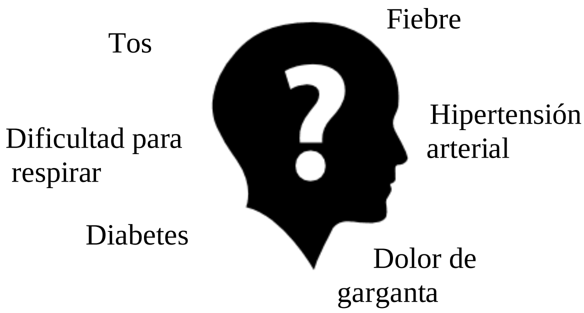

Figura 10. Paciente con otros signos y síntomas ¿posible COVID-19? Fuente: elaboración propia.

En base a lo anterior, podemos plantear las siguientes cuestiones al alumnado: a partir de la información de que dispones ahora sobre esta persona, ¿modificarías la probabilidad inicialmente asignada? ¿por qué?, ¿qué otro dato te gustaría conocer para poder saber la probabilidad de que esta persona esté contagiada por COVID-19? ¿por qué? Seguramente el alumnado incrementará la asignación inicial, ya que a la vista de la Figura 8, parece más probable que esa persona, con ese cuadro clínico, esté contagiada. De este modo, manejamos el significado subjetivo de la probabilidad y permitimos que experimenten cómo las asignaciones iniciales se modifican cuando se incorpora nueva información.

Por último, se cierra la discusión ante la pregunta ¿el hecho de presentar fiebre implica estar contagiado por COVID-19?, lo que permitirá insistir en la diferencia entre aleatoriedad y causalidad.

Experiencia 3. Las pruebas diagnósticas en la infección COVID-19: ¿test PCR o test rápido?

Nivel: 14-15 años

Contenidos implícitos: cálculo de probabilidades, tablas de contingencia, diagrama de árbol.

Descripción de la actividad: Se da inicio a la actividad discutiendo acerca de las formas de diagnosticar la COVID-19, así como la importancia de realizar un diagnóstico oportunamente para tomar las medidas sanitarias necesarias.

Figura 11. ¿Test PCR o test rápidos? Fuente: www.theconversation.com.

De acuerdo con la información de la que se dispone, para detectar la carga viral que produce la COVID-19 podemos emplear dos tipos de test: “la PCR”, que detecta el genoma del virus, y “los test inmunológicos”, que detectan las proteínas (antígenos) del virus. El tercer tipo es el que detecta los anticuerpos producidos como respuesta a la infección son los “test serológicos de detección indirecta (test rápidos)”.

A continuación, se discute sobre los aspectos a considerar en el momento de realizar un test diagnóstico en medicina, y que dan cuenta de su fiabilidad (Tabla 2), tales como:

- Sensibilidad del test: capacidad de considerar como positivos los casos realmente enfermos.
- Especificidad del test: capacidad de considerar como negativos los casos realmente sanos.
- Falso positivo: considerar como positivo a una persona sana.
- Falso negativo: considerar como negativo a una persona enferma.

	Enfermo	**Sano**	
Test +	Verdaderos positivos	Falsos positivos	Total positivos
Test –	Falsos negativos	Verdaderos negativos	Total negativos
	Total enfermos	Total sanos	Total pacientes

Tabla 2. Aspectos que dan cuenta de la fiabilidad de un test.

Es importante enfatizar que, detrás de estos conceptos, están las probabilidades. Posteriormente, se discute acerca del test PCR, cómo funciona, así como la forma en que se aplica (Figura 12), con el propósito de generar conciencia en el alumnado sobre la importancia de respetar las normas sanitarias y medidas de mitigación.

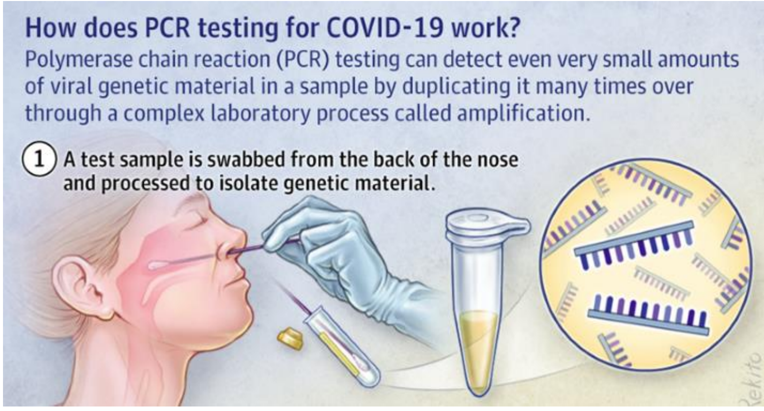

Figura 12: Aplicación test PCR COVID-19. Fuente: https://www.farmaciagermana.com.

A continuación, se discute que, de acuerdo a la información disponible en diversas fuentes, se sabe que el test PCR que diagnostica la COVID-19 tiene una sensibilidad promedio del 75 %, y una especificidad cercana al 99 %, por lo que daría un (falso) positivo en un 1 % de las personas sanas (Yang et al., 2020). Esto da pie a plantear el siguiente problema, que es una adaptación al contexto actual del problema planteado por Batanero y Díaz (2011).

Actualmente en Chile, a 17 de mayo de 2020, la proporción de la población que está afectada por la COVID-19 es de un 0.2 %, es decir, 2 de cada mil personas están infectadas por COVID-19. Supongamos que una persona que reside en una ciudad de 100 000 habitantes decide realizarse el test, si sabemos que una persona ha dado positivo en el test PCR, ¿cuál es la probabilidad de que esté contagiada por COVID-19?

Para dar respuesta al problema, la información puede ser representada mediante una tabla de contingencia (Tabla 3).

	Test PCR +	**Test PCR –**	**Total**
Infectado por COVID-19	150	50	200
No infectado por COVID-19	998	98 802	99 800
Total	1 148	98 852	100 000

Tabla 3. Representación de los datos del problema en una tabla de contingencia o de doble entrada.

La información expuesta en la Tabla 3 se puede complementar con un diagrama de árbol (Figura 13), de manera que facilite la comprensión de los datos expuestos.

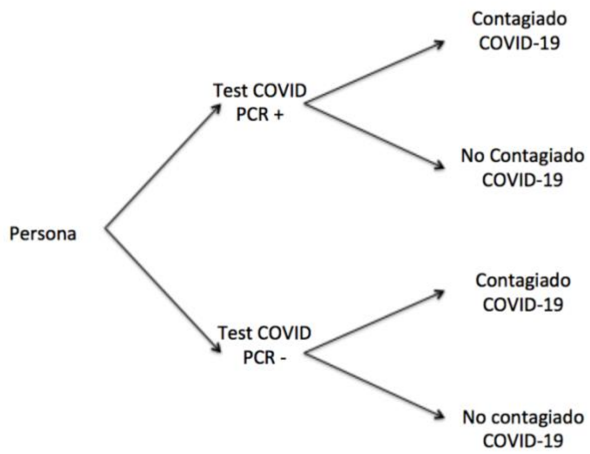

Figura 13. Diagrama de árbol para representar los posibles casos al hacernos el test PCR para diagnosticar COVID-19. Fuente: Elaboración propia.

Respecto del diagrama de árbol es importante enfatizar la información que entrega el diagrama. Cabe señalar, que el diagrama de árbol es un recurso didáctico potente en probabilidad, que permite determinar el espacio muestral, es decir, todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Además, ayuda a comprender de manera visual, rápida y sencilla la estructura de los experimentos y problemas a resolver. Por lo que es considerado una de las principales herramientas de representación y de deducción en el ámbito de la probabilidad y de la combinatoria (Roldán, Batanero y Beltrán-Pellicer, 2018).

De este modo, a partir de la tabla y del diagrama de árbol, y bajo el supuesto de que nos encontramos en una ciudad de 100 000 habitantes, y de acuerdo con los datos proporcionados, se tienen 200 personas infectadas por COVID-19. Por tanto, tenemos las siguientes probabilidades:

- la probabilidad de seleccionar al azar una persona infectada por COVID-19 en esta ciudad es de 0.002.
- si sabemos que una persona ha dado positivo en el test PCR, la probabilidad de que esté contagiada por COVID-19 es:

$$\text{P(contagiada por COVID19 si test PCR+)} = \frac{150}{1\,148} = 0.13$$

¿Cómo podemos interpretar este valor? ¿es posible relacionar este valor con aquellos aspectos que dan cuenta de la fiabilidad del test? ¿qué crees que es más grave: un falso positivo o un falso negativo? Finalmente, planteamos un problema de decisión: alternativamente en el mercado existen otro tipo de test alternativos al test PCR para detectar la presencia de la COVID-19, los llamados test rápidos que, a diferencia del test PCR que se demora cerca de 4 horas en arrojar su resultado, estos test rápidos se demoran 15 minutos. Sin embargo, su efectividad depende mucho del momento en que se toma la muestra (Figura 14.)

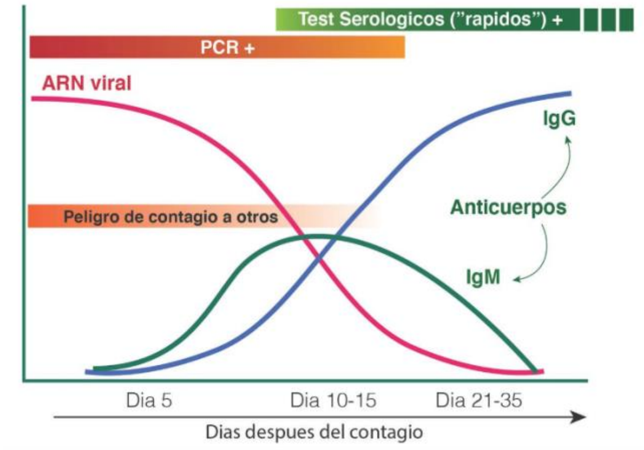

Figura 14. Comportamiento en el tiempo test PCR vs test rápidos. Fuente: www.theconversation.com.

Supongamos que requieres aplicarte un test de detección de la COVID-19, y te dan a elegir entre el test PCR y un nuevo test rápido del cual se cuenta con poca información respecto de su sensibilidad y especificidad, pero sabes que su capacidad de diagnóstico se comporta como la mayoría de los test rápidos que se muestran en la gráfica anterior, ¿cuál escogerías? ¿por qué? De este modo, el alumnado tiene que valorar no solo la incertidumbre ligada a la aleatoriedad de los falsos positivos y negativos, sino también otras variables como el tiempo y la calidad de la información. Así, le acostumbramos a que maneje problemas que se dan en la vida diaria de muchas profesiones, en los que no hay una respuesta única, y se deben asumir los riesgos derivados de su decisión, ponderándolos conforme a su criterio, pero utilizando la probabilidad.

Experiencia 4: Probabilidad de contagio por COVID-19 en función de la edad

Nivel: 15-16 años

Contenidos implícitos: diagrama de árbol, cálculo de probabilidades, independencia de sucesos, probabilidad condicionada.

Descripción de la actividad: Para iniciar la actividad se discute acerca de cómo cree el alumnado que se distribuyen los casos de COVID-19: ¿afecta principalmente a personas de una determinada edad? ¿afecta a cualquier persona independientemente de su edad? ¿cuál será el rango de edad que requiere mayormente de hospitalización? La mayor parte del alumnado ha estado informado, a través de los medios de comunicación y de sus propias vivencias personales, sobre estos factores, por lo tanto, podemos aprovechar la discusión para hacer aflorar asignaciones intuitivas e incluso subjetivas de probabilidad: ¿cuál crees que es la probabilidad de que una persona anciana esté contagiada por COVID-19?

Proseguimos la actividad estudiando el caso de Chile con la Tabla 4, que muestra cómo se distribuyen por tramos de edad tanto la población total como los casos positivos. Un punto importante a desatacar es cómo se encuentran presentados los datos, pues las amplitudes de los distintos intervalos no son las mismas para cada tramo de edad, lo que podría llevar a una confusión pues los datos se muestran de manera desproporcionada. Sin embargo, los datos en algunas ocasiones se encuentran de este modo, aun cuando se produce distorsión. A partir de la información de la Tabla 4, podemos ver si las asignaciones subjetivas respecto a la probabilidad de que una persona anciana esté contagiada cambian al disponer de información. La propia forma en la que se liberan los datos nos sirve para reflexionar sobre cómo pueden inducir a error. Por ejemplo, en este caso, se aprecia la mayor concentración de positivos en el tramo 18-49 años, pero este tramo tiene mucha más amplitud que los demás, por lo que es razonable que concentre más casos.

Tramos de edad	**Distribución de la población**	**Distribución de casos positivos**
menor de 5	1 166 146	1 065
05-17	3 104 422	2 673
18-49	8 220 531	29 045
50-59	2 232 733	6 624
60-69	1 499 917	3 748
70-79	879 498	1 785
80 y más	470 756	1 108
Total	17 574 003	46 048

Tabla 4. Distribución según tramos de edad de la población, según el Censo 2017 de Chile, y de los casos confirmados contagiados por COVID-19 en Chile a 17 de mayo de 2020. Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del informe epidemiológico número 18 (www.minsal.cl) y del Censo 2017 (https://datosabiertos.ine.cl/).

A partir de los datos de la Tabla 4 podemos también plantear probabilidades que se puedan responder con facilidad utilizando la regla de Laplace. Por ejemplo, si elegimos al azar una persona de Chile de entre 18 y 40 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea positivo por COVID-19? En este caso:

$$P\ (\text{positivo de } 18-49 \text{ años}) = \frac{29\ 045}{8\ 220\ 531} = 0.0035$$

O también, si elegimos al azar una persona, ¿cuál es la probabilidad de que sea positivo y esté entre 60 y 69 años? Contando casos favorables y positivos obtenemos:

$$P\ (\text{caso positivo y de } 60-69 \text{ años}) = \frac{3\ 748}{17\ 574\ 003} = 0.0002$$

Además, podemos plantearnos probabilidades condicionadas para compararlas con las de la intersección, por ejemplo: si elegimos al azar un caso positivo, ¿cuál es la probabilidad de que esté entre 60 y 69 años?

Así, diferenciamos de la probabilidad anterior, que computaba los casos sobre el total:

$$P\ (\text{de } 60-69 \text{ años, sabiendo que es positivo}) = \frac{P\ (\text{positivo} \cap \text{de } 60-69 \text{ años})}{P\ (\text{positivo})} =$$

$$= \frac{\frac{3\ 748}{17\ 574\ 003}}{\frac{46\ 048}{17\ 574\ 003}} = \frac{3\ 748}{46\ 048} = 0.081$$

De este modo, también ilustramos cómo la fórmula de la probabilidad condicionada, se reduce a la aplicación de la fórmula de Laplace sobre los casos condicionados, ya que el resultado es el mismo que si hubiéramos contado las personas de 60-69 años respecto a los positivos, es decir, contando los casos posibles sobre la columna de la derecha. El siguiente paso es plantearse la pregunta: ¿crees que tener 60-69 años influye en el contagio? es decir, ¿es independiente o no tener 60-69 años y dar positivo por COVID-19? Aconsejamos, como siempre, comenzar razonando a la vista de estos datos, cotejando las columnas central y derecha de la Tabla 4, y no sólo para el grupo de edad considerado sino para todos, aunque posiblemente disponer de los datos en bruto, y no en porcentaje, dificulte la comparación, por ello resulta idóneo para plantearlo probabilísticamente, mediante la condición de independencia, en cualquiera de sus expresiones. Por ejemplo, si fueran independientes, saber que ha sido positivo no debería modificar la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga 60-69 años, es decir:

$$P\ (\text{de } 60-69 \text{ años, sabiendo que es positivo}) = P\ (\text{de } 60-69 \text{ años})$$

La primera de las probabilidades se ha calculado arriba (0.081) y la segunda la obtenemos mediante la aplicación de la regla de Laplace a los datos de la Tabla 4:

$$P\ (\text{de } 60-69 \text{ años}) = \frac{1\ 499\ 917}{17\ 574\ 003} = 0.085$$

Como se observa, no es la misma probabilidad, aunque varía solamente en 4 milésimas. Por lo tanto, no hay independencia, sino que cuando sabemos que la persona es positiva, se reduce ligeramente la probabilidad de que esté entre 60-69 años. Podemos utilizar este resultado para discutir sobre qué margen de tolerancia estaríamos dispuestos a asumir, ya que, como sabemos, cuando trabajamos sobre tablas de contingencia y aplicamos probabilidades mediante la regla de Laplace, la independencia entre sucesos solo se alcanzaría si hubiese total proporcionalidad entre las filas o columnas consideradas, lo cual es prácticamente imposible si la tabla recoge datos reales.

Finalizamos presentando la Tabla 5, que muestra cómo se distribuyen los contagios y los hospitalizados en Chile, a 17 de mayo de 2020, según tramos de edad. A partir de la información de la Tabla 5, podemos volver a discutir las asignaciones subjetivas realizadas sobre las probabilidades de contagio en personas ancianas. Como se observa al comparar porcentajes, a pesar de que hay más casos positivos entre las personas más jóvenes, los casos hospitalizados aumentan con la edad. Dicho de otro modo, la edad agrava la enfermedad.

Tramos de edad	**Distribución de los casos positivos**	**Distribución de los positivos hospitalizados**
menor de 5	2.31 %	2.22 %
05-17	5.47 %	1.62 %
18-49	63.41 %	34.3 %
50-59	14.38 %	18.51 %
60-69	8.14 %	18.17 %
70-79	3.88 %	15.4 %
80 y más	2.41 %	9.78 %

Tabla 5. Casos confirmados contagiados y hospitalizados por COVID-19 según tramo de edad en Chile a 17 de mayo de 2020. Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del informe epidemiológico número 18 (www.minsal.cl).

A partir de los datos de la Tabla 5 resulta de interés plantearse diferentes cuestiones que pueden ser respondidas considerando los porcentajes como indicadores de la probabilidad, y realizando tareas como las realizadas sobre la Tabla 4. Debemos favorecer la discusión y la argumentación, para que el alumnado se acostumbre a respaldar sus opiniones con datos, por ejemplo: ¿la edad es un factor que influye en el contagio por COVID-19? ¿por qué? ¿cómo afecta el coronavirus en Chile? ¿cuál es la franja de edad en la que se presenta una mayor probabilidad de seleccionar al azar una persona contagiada por COVID-19? ¿crees que existe independencia entre la edad y el hecho de ser hospitalizado por COVID-19?

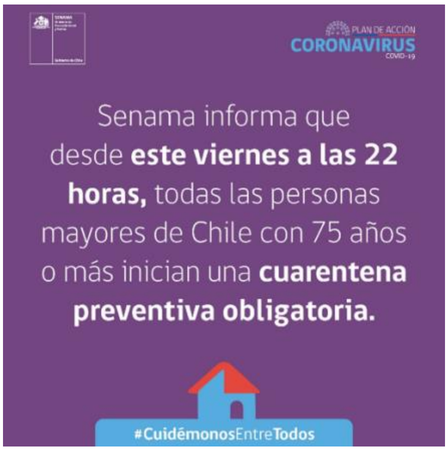

Figura 15. Cuarentena obligatoria adultos mayores. Fuente: www.senama.gob.cl.

Esta discusión la podemos cerrar con la consideración de las medidas de confinamiento, que casi todos los países han implantado. Así, en Chile se ha tomado la medida de poner en cuarentena obligatoria a los adultos mayores de 75 años (Figura 15). A la vista de los datos de la Tabla 5: ¿estás de acuerdo con esta medida?

Consideraciones finales

En este artículo se han descrito los conocimientos que deberían ser abordados en el estudio de la probabilidad en la Educación Secundaria, con el propósito de promover la alfabetización probabilística en esta etapa escolar. Para ello, se ha propuesto un conjunto de experiencias de aula que utilizan como contexto la pandemia COVID-19, con el propósito de que el alumnado no solo aplique sus conocimientos sobre probabilidad, sino que también reflexione respecto a la implicación y las causas que afectan a la población mundial a raíz de esta pandemia. De cara a su implementación en un aula, es importante tener presente la delicadeza inherente a la temática del contexto, ya que puede ser un tema emocionalmente duro si el alumnado ha tenido una experiencia personal cercana.

En esta situación excepcional, todos los ciudadanos y ciudadanas, entre ellos profesores y profesoras y estudiantes, nos hemos visto enfrentados a diario a un gran volumen de datos e información recibidos a través de diversos medios, frente a los cuales es necesario contar con un pensamiento crítico, que permita realizar interpretaciones y análisis para la toma de decisiones, así como para discriminar entre información relevante y no relevante, o aquella que no se ha comunicado adecuadamente. Por ello, existe la necesidad de contar con personas alfabetizadas en estadística y probabilidad (Gal, 2002, 2005), formándolos para comprender, evaluar y razonar estadísticamente respecto de los principales desafíos de desarrollo para la humanidad, de modo que puedan participar de manera informada y conformar cada vez sociedades más democráticas.

En consecuencia, es necesario encauzar la enseñanza de la probabilidad y la estadística a través de contextos realistas (incluso cuando sean versiones simplificadas de un problema) que lleven al alumnado hacia el aprendizaje de conceptos de probabilidad y/o estadística, el empleo de técnicas de cálculo, la mejora de sus capacidades de argumentación, formulación de conjeturas y reflexión en torno a dicho contexto, pues no debemos olvidar que "la estadística es inseparable de sus aplicaciones, y su justificación final es su utilidad en la resolución de problemas externos a la propia estadística" (Batanero y Díaz, 2011, p. 21).

En este sentido, las experiencias de aula propuestas buscan promover que el alumnado conozca algunos aspectos importantes vinculados al estudio de la probabilidad, tales como: posibilidad de ocurrencia, probabilidad como medida entre 0 y 1, distintos tipos de representaciones numéricas de la probabilidad, tablas de contingencia, asignación subjetiva de probabilidades, diagrama de árbol, independencia de sucesos, probabilidad condicionada, entre otros. Asimismo, buscan promover la toma de decisiones vinculadas a la salud a través del análisis de cifras y datos sobre la COVID-19, las estrategias de prevención y diagnóstico más relevantes, enfatizando que no solo es importante aprender a calcular probabilidades, sino que también debemos fomentar su comprensión en contextos reales que sean significativos para el alumnado (Vásquez y Rojas, en prensa).

En definitiva, se trata pues de contar con una educación holística, integradora y transformadora, que considere: a) los contenidos y los resultados de aprendizaje (integración en los planes de estudio de temas de sostenibilidad); b) la pedagogía y entornos de aprendizaje (enseñanza y aprendizaje centrados en los educandos, orientados a la acción, a partir de la interacción y del aprendizaje exploratorio); c) frutos del aprendizaje (promover competencias tales como pensamiento crítico y sistémico, adopción conjunta de decisiones, asumir responsabilidad por las generaciones actuales y futuras); y d) transformación social (habilitar a los educandos de cualquier edad y en cualquier entorno educativo, para transformarse a sí mismos y a la sociedad en que viven), de tal manera que las generaciones actuales y futuras puedan alcanzar aprendizajes cognitivos, socioemocionales y conductuales específicos, que les lleven a desarrollar competencias clave de sostenibilidad (UNESCO, 2017). Sin duda, implementar este tipo de propuestas, contribuirá con el tiempo, por un lado, a formar personas alfabetizadas probabilísticamente, con un pensamiento crítico, y sobre todo conscientes del rol que cada uno desempeña en la sociedad y en el bienestar global; y por otro a fomentar una Educación para el Desarrollo Sostenible (UNESCO, 2017).

Agradecimientos

FEDER/Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades – Agencia Estatal de Investigación/ Proyecto EDU2017-84979-R.

FONDECYT Nº 1200356 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile.

Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades – Agencia Estatal de Investigación/ Proyecto TIN2017-87600-P.

Bibliografía

Alsina, Á., Vásquez, C., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos para Educación Primaria a partir del COVID-19. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, *104*, 99-128.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME*, *8*(3), 247-264.

Batanero, C. (2007). Significados de la Probabilidad en la Educación Secundaria. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp.25-37). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.-Díaz de Santos.

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.

Batanero, C., y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2007). *A Curriculum Framework for K-12 Statistics Education. GAISE Report*. American Statistical Association. Recuperado de http://www.amstat.org/education/gaise/GAISEPreK-12_Full.pdf

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*, 1-25.

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En Jones, G. (ed.): *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Nueva York. Kluwer.

Laplace, P. S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Madrid: Alianza Editorial (trabajo original publicado en 1814).

NCTM (2013). *Developing Essential Understanding of Statistics Grades 6-8*. Reston, VA: NCTM.

Roldán, A., Batanero, C., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria. *Épsilon - Revista de Educación Matemática, 100*, 49-63.

UNESCO (2017). *Educación para los objetivos de desarrollo sostenible: objetivos de aprendizaje*. Francia: Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Revista Números, 85*, 5-23.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2019). Observing mathematics teaching practices to promote professional development: An analysis of approaches to probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *14*(3), 719-733. https://doi.org/10.29333/iejme/5866

Vásquez, C., y Rojas, F. (en prensa). Enseñar probabilidad para formar ciudadanos de sostenibilidad: ¿Qué sabemos del COVID19 y su propagación? *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*.

Yang, Y., Yang, M., Shen, C., Wang, F., Yuan, J., Li, J., … Liu, Y. (2020). Evaluating the accuracy of different respiratory specimens in the laboratory diagnosis and monitoring the viral shedding of 2019-nCoV infections. *MedRxiv* preprint doi: https://doi.org/10.1101/2020.02.11.20021493

Claudia Vásquez. Departamento de Didáctica de la Matemática. Campus Villarrica, O'Higgins 501, Villarrica, Chile.
Licenciada en Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Chile, y Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad de Girona (España).
Actualmente es Profesor Asociado de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Sus líneas de investigación se centran en la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad, y en la formación del profesorado. Ha participado en proyectos de investigación sobre didáctica de la matemática, didáctica de la probabilidad y la estadística, y formación del profesorado. Email: cavasque@uc.cl

Luis J. Rodríguez-Muñiz. Departamento de Estadística e I.O. y Didáctica de la Matemática. Facultad de Geología, C/ Jesús Arias de Velasco s/n. 33005 Oviedo (Asturias).
Profesor Titular de Universidad en Didáctica de la Matemática, es autor de más de 50 artículos y capítulos de libro. Su investigación reciente se focaliza en la educación estadística y la formación de profesorado de Primaria y Secundaria. Ha participado en numerosos proyectos de investigación y también en contratos con administraciones públicas sobre evaluación del sistema educativo. Preside, desde 2018, la Comisión de Educación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), de cuya Junta Directiva es miembro desde 2020. También es socio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Además, es miembro, como experto de reconocido prestigio, del Consejo de Asturias de la Formación Profesional, y de la Comisión Asesora de Evaluación de Enseñanzas e Instituciones de ANECA. Email: luisj@uniovi.es

Laura Muñiz-Rodríguez. Departamento de Estadística e I.O. y Didáctica de la Matemática, Facultad de Geología, C/ Jesús Arias de Velasco, s/n, 33005 Oviedo (Asturias).
Licenciada en Matemáticas y Doctora en el Programa de Matemáticas y Estadística por la Universidad de Oviedo y Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Gante (Bélgica). Profesora Ayudante Doctora en el Departamento de Estadística e I.O. y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Oviedo. Sus publicaciones se han centrado en el campo de la formación inicial del futuro profesorado de matemáticas en Educación Primaria y Secundaria, el uso de juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y el proceso de retroalimentación en el aula. Email: munizlaura@uniovi.es

Ángel Alsina. Departamento de Didácticas Específicas, Área de Didáctica de las Matemáticas. Facultad de Educación y Psicología, Plaça Sant Domènec, 9, 17004 Girona (Catalunya).
Catedrático de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona. Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina. Email: angel.alsina@udg.edu