NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 104, julio de 2020, páginas 171-195

Ser sistemático para organizar la información

(Problemas Comentados LIV)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Se complementa solución a problema anteriormente planteado y se resuelven los propuestos en anterior artículo. Las estrategias explicadas y utilizadas son: organización de la información, representar esa información, actuar lógicamente, relaciones de orden, técnicas de conteo, uso de la exhaustividad y la sistematización; asimismo la modelización, el ensayo y error, los árboles de posibilidades son otras de las técnicas empleadas. Herramientas tales como las tablas de doble entrada en la organización de la información y la criba de datos ilógicos son usadas.

Palabras clave Resolución de problemas. Estrategias para resolver problemas. Relaciones de orden, organización de la información, técnicas de conteo, tablas de doble entrada, relaciones lógicas, ensayo y error, modelización y sistematización.

Abstract The solution to the previously stated problem is complemented and those proposed in the previous article are resolved. The strategies explained and used are: organization of the information, representing that information, acting logically, relations of order, counting techniques, use of exhaustiveness and systematization; likewise modeling, trial and error, and possibility trees are other techniques used. Tools such as double entry tables in the organization of information and illogical data screening are used.

Keywords Problem resolution. Strategies for solving problems. Order relationships, organization of information, counting techniques, double entry tables, logical relationships, trial and error, modeling and systematization.

1. RETOS ANTERIORES

Se nos había quedado atrás, pendiente de terminar su resolución el problema de la calculadora extraña. Solamente se había resuelto la mitad, correspondiente a las operaciones de suma y multiplicación. Pues bien, ya tenemos el resto. Nuestro amigo y colaborador Luis Blanco nos envía la parte de solución que faltaba.

Recordemos que el problema apareció en el artículo Problemas Comentados LI, publicado en la Revista NÚMEROS 101. Aparece a medio solucionar en el artículo Problemas Comentados LII, publicado en la Revista NÚMEROS 102.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

Una calculadora para los más jóvenes

Para facilitar su uso a los jóvenes, un fabricante de calculadoras ha puesto en el mercado un modelo que sólo tiene una tecla de operación: Δ.

$$a \Delta b = 1 - \frac{a}{b}.$$

Pero, **¿cómo vas a hacer las cuatro operaciones elementales básicas ahora?** Por supuesto, se pueden utilizar todas las teclas de la calculadora.

Así nos escribe Luis Ángel Blanco:

Partiendo de los datos publicados en la revista ***NÚMEROS****, organizo los resultados notables de esta manera:*

(a) $\mathbf{1 = 0\,\Delta\,\boldsymbol{n}}$
(b) $\mathbf{1 - \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\,\Delta 1 = -\boldsymbol{n}\,\Delta 1}$
(c) $\mathbf{1 + \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}\,\Delta 1}$
(d) $\mathbf{1 - 1/\boldsymbol{n} = 1\ \Delta \boldsymbol{n} = -1\ \Delta{-}\boldsymbol{n}}$
(e) $\mathbf{1 + 1/\boldsymbol{n} = 1\ \Delta{-}\boldsymbol{n} = \ -1\ \Delta \boldsymbol{n}}$
(f) $\boldsymbol{(b - a)/b = a\,\Delta b = -a\,\Delta{-}\,b}$
(g) $\boldsymbol{(a - b)/a = b\ \Delta a}$
(h) $\boldsymbol{(b + a)/b = -a\,\Delta{-}\,b = a\,\Delta{-}\,b}$
(i) $\boldsymbol{(a + b)/a = b\,\Delta{-}\,a = -b\,\Delta a}$
(j) $\boldsymbol{(a - b)/b = -b\,\Delta{-}\,a}$
(k) $\mathbf{1/\boldsymbol{n}\ =\ (1\,\Delta\,\boldsymbol{n})\,\Delta 1}$
(l) $\mathbf{1 - \boldsymbol{a}/\boldsymbol{b} =\ \boldsymbol{a}\,\Delta \boldsymbol{b}}$

Para resolver la resta y la división solo se necesitan las relaciones (b), (l) y (k)

Para calcular la resta: ***a-b***

$$a - b\ =\ 1 - 1 + (a - b)$$

Opero de la forma 1-n

$$1 - 1 + (a - b)\ =\ 1 - [1 + (a - b)\,]$$

Según (b)

$$1 - [1 + (a - b)\,] = [1 - (a - b)]\,\Delta\,1$$

Dividimos (a-b) por a $(a - b) =\ ((a - b)/a)/(1/a)$

$$[1 - (a - b)]\,\Delta\,1 =\ (1 - \frac{\frac{a - b}{a}}{\frac{1}{a}})\Delta 1$$

PROBLEMAS

Según (l)

$$\left(1-\frac{\frac{a-b}{a}}{\frac{1}{a}}\right)\Delta 1=[(a-b)/a)\Delta(1/a)]\,\Delta\,1$$

Según (k) $(1/a)=(1\Delta a)\Delta 1$

$$[(a-b)/a)\,\Delta\,(1/a)]\,\Delta\,1=\{[(a-b)/a]\,\Delta\,[(1\,\Delta\,a)\,\Delta 1]\}\,\Delta\,1$$

Y, por último, según (g) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})/\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\,\Delta\,\boldsymbol{a}$

$$\{[(a-b)/a]\,\Delta\,[(1\,\Delta\,a)\,\Delta 1]\}\,\Delta\,1=\ \{[(b\,\Delta\,a)\,]\,\Delta\,[(1\,\Delta\,a)\Delta 1]\}\,\Delta\,1$$

Solución: $\underline{a-b\ =\ \{[(b\,\Delta\,a)\,]\,\Delta\,[(1\,\Delta\,a)\Delta 1]\}\,\Delta\,1}$

*Para calcular la división **a/b***

Opero de la forma 1-n

$$a/b\ =\ 1 - 1\ +\ a/b\ =\ 1 - (1-a/b)$$

*Según **(b)*** $1-n=n\,\Delta 1$ *siendo n = a/b*

$$1 - (1-a/b)=1-(\,a\,\Delta\,b\,)$$

*Según **(b)*** $1-n=n\,\Delta 1$ *siendo n = (a Δ b)*

$$1-(\,a\,\Delta\,b\,)=(a\,\Delta\,b)\Delta\,1$$

Solución: $\underline{a/b\ =\ (a\,\Delta\,b)\Delta\,1}$

Gracias amigo Luis. Una vez más al quite en las soluciones de los problemas.

Del último artículo teníamos también un par de retos pendientes. El primero lo tomamos prestado de la XXVIII Olimpiada Matemática de Albacete. Gracias también, compañeros.

Repartiendo caramelos

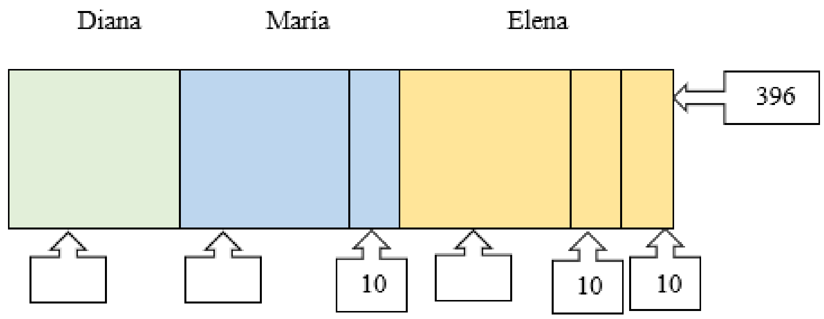
Vamos a repartir 1000 caramelos a tres parejas de hermanos (chico y chica) de la siguiente manera:
Las chicas reciben un total de 396 caramelos, de los cuales María obtiene 10 más que Diana, y Elena obtiene 10 más que María.
Guillermo Martínez obtiene el doble que su hermana, Enrique Hernández obtiene lo mismo que su hermana, y Juan Giménez obtiene un 50 por ciento más que su hermana.
¿Cuáles son los nombres completos (con apellidos) de las tres chicas?

Proceso de Resolución

COMPRENDER Datos: 1000 caramelos. Tres parejas de hermanos (chico y chica): María, Elena y Diana / Guillermo Martínez, Enrique Hernández y Juan Giménez. Las chicas reciben un total de 396 caramelos. Objetivo: Cuáles son los nombres completos (con apellidos) de las tres chicas. Relación: María obtiene 10 más que Diana, y Elena obtiene 10 más que María. Guillermo Martínez obtiene el doble que su hermana, Enrique Hernández obtiene lo mismo que su hermana, y Juan Giménez obtiene un 50 por ciento más que su hermana. Diagrama: Partes/Todo. Tabla de doble entrada

PENSAR Estrategias: ORGANIZAR LA INFORMACIÓN mediante técnica Partes/Todo y Exhaustividad

EJECUTAR Empezaremos trabajando solamente con las chicas, representando su situación en un diagrama Partes/Todo.



No sabemos los caramelos que recibe Diana, pero sí que María recibe 10 más que Diana y que Elena obtiene 10 más que María.

La estructura del diagrama nos invita a unir las etiquetas conocidas en una sola:

3 x 10 = 30

Y restarla de la etiqueta del todo: 396 – 30 = 366

Quedan tres partes iguales para un total de 366. Calculamos la etiqueta desconocida mediante una división 366 : 3 = 122.

Por tanto, Diana recibe 122 caramelos, María 122 + 10 = 132, Elena 132 + 10 = 142.

Quedan para repartir entre los chicos 1000 – 396 = 604 caramelos.

Ahora debemos buscar la forma de repartir esos 604 caramelos entre los tres chicos, sin descuidar las condiciones de la relación.

Para ello utilizaremos una tabla de doble entrada donde calcularemos todas las opciones posibles considerando para cada chico el ser hermano de las tres chicas de manera sucesiva.

	Diana	María	Elena
Guillermo DOBLE			
Enrique IGUAL			
Juan 50% MÁS			

Y procedemos a llenarla con los cálculos

	Diana 122	María 132	Elena 142
Guillermo DOBLE	244	264	284
Enrique IGUAL	122	132	142
Juan 50% MÁS	183	198	213

Sólo nos queda buscar los diferentes posibles hermanamientos que den un total de 604 caramelos.

Actuando de manera exhaustiva, esos hermanamientos serían los siguientes:

Guillermo y Diana – Enrique y María – Juan y Elena

Guillermo y Diana – Enrique y Elena – Juan y María

Guillermo y María – Enrique y Diana – Juan y Elena

Guillermo y María – Enrique y Elena – Juan y Diana

Guillermo y Elena – Enrique y Diana – Juan y María

Guillermo y Elena – Enrique y María – Juan y Diana

Como el resultado ha de ser PAR y todos los cálculos dan par excepto los dos hermanamientos de Juan con Diana y con Elena que dan IMPAR, eliminamos todas las ternas en las que aparezcan estos dos resultados.

Solamente quedan como posibles soluciones, aquellas en las que Juan aparece emparejado con María:

Guillermo y Diana – Enrique y Elena – Juan y María

Guillermo y Elena – Enrique y Diana – Juan y María

Únicamente falta calcular el total de estas dos ternas:

Guillermo y Diana – Enrique y Elena – Juan y María

244 + 142 + 198 = 584 < 604 no es válida

Guillermo y Elena – Enrique y Diana – Juan y María

284 + 132 + 183 = 604 correcto

Solución: Guillermo y Elena – Enrique y Diana – Juan y María

También mediante una tabla en la que, copiando una vez las filas, sumamos en diagonal, obtenemos los seis resultados posibles. Es entonces visible el resultado de 604 en la diagonal rosa.

	Diana	María	Elena	
Guillermo	244	264	284	
Enrique	122	132	142	
Juan	183	198	213	
599	244	264	284	589
584	122	132	142	604
599	183	198	213	589

Que corresponde a los hermanamientos Enrique-Diana, Juan-María y Guillermo-Elena.

RESPONDER

Comprobación: Bastará con revisar de nuevo las condiciones del problema y comparar con las encontradas como solución.

Análisis: Solución única.

Respuesta: **Los nombres completos de las tres chicas son: Elena Martínez, Diana Hernández y María Giménez.**

El segundo reto lo recogemos de la XVI Olimpiada Matemática Asturiana. Otro préstamo. Muchas gracias, amigos.

En el ascensor

Cuatro jugadores de rugby entran en un ascensor que puede transportar un máximo de 380 kilos. Para que no suene una alarma, que detendría el elevador por exceso de carga, tiene usted que calcular su peso total con gran rapidez. Pero, **¿cuánto pesa cada jugador?** He aquí los datos:
Pablo es quien pesa más: Si cada uno de los otros pesara tanto como él, la alarma detendría el ascensor.
Carlos es el más ligero. ¡El ascensor podría subir a cinco como él!
Renato pesa 14 kilos menos que Pablo, y sólo seis menos que Jesús.
Jesús pesa 17 kilos más que Carlos. Los pesos de Pablo y de Carlos son múltiplos de cinco.

Proceso de Resolución

COMPRENDER Datos: Cuatro jugadores de rugby. Un ascensor que puede transportar un máximo de 380 kilos. Objetivo: Cuánto pesa cada jugador. Relación: Pablo es quien pesa más: Si cada uno de los otros pesara tanto como él, la alarma detendría el ascensor. Carlos es el más ligero. ¡El ascensor podría subir a cinco como él! Renato pesa 14 kilos menos que Pablo, y sólo seis menos que Jesús. Jesús pesa 17 kilos más que Carlos. Los pesos de Pablo y de Carlos son múltiplos de cinco. Diagrama: De orden

PENSAR Estrategias: ORGANIZAR LA INFORMACIÓN con relaciones de orden y lógica

EJECUTAR Intentamos ordenar a los jugadores por pesos.

Sabemos que Pablo es el más pesado y que Carlos es el más ligero. Como Renato pesa menos que Jesús, ya tenemos el orden: Pablo > Jesús > Renato > Carlos.

Ahora trataremos de acotar las diferencias de pesos entre ellos.

Entre Pablo y Renato hay 14 kg de diferencia y entre Jesús y Renato hay 6 kg de diferencia. Es decir, entre Pablo y Jesús hay 14 – 6 = 8 kg de diferencia.

Entre Jesús y Carlos hay 17 kg de diferencia y entre Jesús y Renato hay 6 kg de diferencia. Es decir, entre Renato y Carlos hay 17 – 6 = 11 kg de diferencia.

Pablo > Jesús (diferencia 8 kg) > Renato (diferencia 6 kg) > Carlos (diferencia 11 kg)

Como cuatro pesos como el de Pablo detendrían el ascensor $\rightarrow 4P \geq 380 \rightarrow P \geq 95$.

Teniendo en cuenta que el peso de Pablo es múltiplo de 5, tendremos dos posibles soluciones: P = 95 o P = 100.

	Pesos	
Pablo	95	100
Jesús	95 – 8 = 87	100 – 8 = 92
Renato	87 – 6 = 81	92 – 6 = 86
Carlos	81 – 11 = 70	86 – 11 = 75

Otra estrategia para resolver el problema es la siguiente:

Poniendo las relaciones con iniciales tenemos:

$P = J + 8$; $J = R + 6$; $R = C + 11$,   de donde se deduce que:

$$P = (R + 6) + 8 = (C + 11) + 6 + 8 = C + 25.$$

Y puesto que deben cumplirse las condiciones de que $4P \geq 380$ y que P es múltiplo de 5, y se deduce que $P \geq 95$ y teniendo además que $C = P - 25$. Por tanto los pares posibles para (P, C) son (95, 70) y (100, 75).

<u>Solución</u>: 100, 92, 86 y 75, o bien, 95, 87,81 y 70.

RESPONDER

<u>Comprobación</u>: En la segunda solución se cumplen todas las condiciones:

4 x 100 = 400 > 380 el ascensor se para y, además, 75 y 100 son múltiplos de 5 y, también, con cinco como Carlos 75 x 5 = 375 < 380 el ascensor no se para.

En la primera solución se cumplen todas las condiciones:

4 x 95 = 380 el ascensor corre peligro de parar con un simple movimiento y, además, 70 y 95 son múltiplos de 5 y, también, con cinco como Carlos 70 x 5 = 350 < 380 el ascensor no se para.

Podemos comprobar que para un múltiplo de 5 inferior a 95, que sería 90 ya no se cumplen todas las condiciones, lo mismo que para un múltiplo superior como 105.

	Pablo	Jesús	Renato	Carlos	Suma pesos	4xP	Observaciones
1ª solución	100	92	86	75	353	400	
2ª solución	95	87	81	70	333	380	
Múltiplo inf.	**90**	82	76	65	313	**360**	**No detendría el ascensor**
Múltiplo sup.	**105**	97	91	80	373	**420**	**Sonaría la alarma**

Análisis: Las dos soluciones son matemáticamente correctas, pero una de ellas es sumamente peligrosa y, en una situación real, nunca nos atreveríamos a utilizarla.

Respuesta: **Pablo pesa 100 kg, Jesús 92 kg, Renato 86 kg y Carlos 75 kg.**

El tercer reto es un ejercicio adaptado de un libro que ya tiene unas cuantas décadas ("*Estrategias de pensamiento. Ejercicios de agilidad mental*"; de Larry E. Wood; Ed. Labor S. A. 1987.) donde también aparece el ejercicio de contar triángulos en un pentágono resuelto en este mismo artículo. Agradecemos el préstamo.

DESPACHANDO PEDIDOS.

Un trabajador de Amatón, a tiempo parcial, recibe cada día una cantidad de pedidos (P) que debe despachar lo antes posible (D). Pero está en prácticas y a veces se lía. El lunes despachó solamente alguno de los pedidos del día. El martes tuvo tantos pedidos como no había despachado el lunes, y despachó diez. El miércoles recibió doce pedidos más que el lunes, y despachó tantos como ese día. El jueves empeoró la cosa: recibió el triple de pedidos de los que había despachado el miércoles, y despachó solo ocho. El viernes llegaron seis pedidos y pudo despachar doce menos de los pedidos que recibió el miércoles. Tuvo que trabajar otro turno el sábado para despachar los catorce pedidos pendientes. ¿Cuántos pedidos le llegaron el lunes? ¿Cuántos despachó a lo largo de la semana?

Llamamos P al número de pedidos que recibió el lunes y D a la cantidad de pedidos que despachó ese mismo día.

Proceso de Resolución

COMPRENDER Datos: Se reciben cada día de la semana, de lunes a viernes, una cantidad de pedidos y se despacha otra cantidad, teniendo que despachar también el sábado. Objetivo: Conocer cuántos pedidos recibió el lunes (P), y cuántos recibió a lo lago de la semana. Relación: El lunes: recibidos P y despachados D, sabiendo que D < P.

El martes: recibidos P – D y despachados 10.

El miércoles: recibidos P + 12, 12 más que el lunes, y despachados D.

El jueves: recibidos 3D, tres veces los despachados el lunes, y despachados 8.

El viernes: recibe 6 pedidos y despacha P, la misma cantidad de los recibidos el lunes.

El sábado, por último: no hay recepción de pedidos y despacha 14, que son los pedidos pendientes.

El total de despachados debe coincidir con el total de recibidos

Diagrama: Tabla de doble entrada donde ordenar los datos del problema.

PENSAR Estrategias: Representar y organizar la información. Relaciones de orden. Lógica.

EJECUTAR

Dibujamos y cumplimentamos una tabla de doble entrada. En la primera fila pondremos, encabezando cada columna, los días de la semana, luego en la segunda fila colocamos los pedidos recibidos y en la tercera los despachados. Unos datos son relativos y otros absolutos.

	L	M	X	J	V	S	TOTALES
Pedidos recibidos	P	P - D	P + 12	3D	6	0	3P + 2D + 18
Despachados	D	10	D	8	P	14	2D + P + 32

y (3P + 2D + 18), cantidad de pedidos recibidos a lo largo de la semana, coincidirá con (P + 2D + 32), cantidad de pedidos despachados.

La resta de pedidos recibidos y despachados a lo largo de la semana debe ser cero.

$$(3P + 2D + 18) - (P + 2D + 32) = 0, \text{ luego: } 2P + 14 = 0,$$

con lo que sale el valor de P es 7.

Por otro lado, la suma de pedidos y despachados es el doble de cualquiera de ambos conceptos.

$$(3P + 2D + 18) + (P + 2D + 32) = 4P + 4D + 50$$

Y $4 \cdot 7 + 4D + 50 = 4D + 78$ ha de ser el doble de (3P + 2D + 18), pero este camino no nos conduce a una solución. Usemos la lógica:

Está claro que D < P, pues en caso contrario el martes no recibió ningún pedido o recibió un número negativo de los mismos (absurdo). Por tanto, haciendo uso de las desigualdades y sus propiedades, podemos escribir que: $2P - 2D - 10 \geq 0$, es decir, los pedidos recibidos lunes y martes menos los despachados esos días debe ser un número natural o cero (lo que supone que despachó todos los pedidos pendientes), luego:

$$2P - 2D \geq 10 \longrightarrow P - D \geq 5, \text{ y como } P = 7\text{: } 7 - D \geq 5, \text{ de donde } -D \geq -2 \text{ y } D < 2$$

$$\begin{cases} D = 2 \\ D = 1 \\ D = 0 \end{cases}$$

De estos tres resultados posibles para D hemos de descartar D = 2 y D = 0. El primero porque significaría que el martes logró despachar todos los pedidos pendientes, lo que no es coherente con la redacción del problema, que parece indicar que los pedidos se le acumularon a lo largo de la semana hasta tal punto que tuvo que ir a trabajar el sábado. Que D sea cero tampoco es coherente con el enunciado, porque representa que el lunes y el miércoles no despachó ningún pedido y que el jueves no recibió pedido alguno.

Así pues, si P = 7 y D = 1, los pedidos recibidos (y despachados) durante la semana fueron:

3P + 2D + 18 = 21 + 2 + 18 = 41 y P + 2D + 32 = 7 + 2 + 32 = 41

Solución: I) P = 7 II) S = 41

RESPONDER

Comprobación: Al igualar en el proceso de resolución los pedidos con los despachos hemos comprobado que esa es la solución a la primera pregunta.

En la contestación de la segunda pregunta tenemos los razonamientos que nos permiten comprobar el resultado.

Análisis: Solución única. Mientras que la primera solución permite un proceso en cierta manera mecánico y donde intervienen todos los datos del enunciado, la segunda pregunta supone usar la lógica y analizar los datos parcialmente.

Respuesta: **El lunes llegaron 7 pedidos. A lo largo de la semana despachó 41 pedidos.**

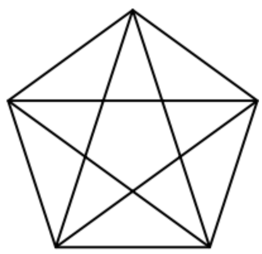
2. NUEVOS RETOS

TRIÁNGULOS EN UN PENTÁGONO

¿Cuántos triángulos puedo construir uniendo entre sí los vértices de un pentágono regular?
Indica TODOS los triángulos que hay y explica el procedimiento de conteo empleado.

Es un problema de CONTEO, siempre interesante. Los escolares tienen pocas oportunidades de utilizar un CONTEO INTELIGENTE. También es importante porque se ponen en juego varias técnicas (la EXHAUSTIVIDAD, la SISTEMATICIDAD), varias herramientas (MODELOS, TABLAS) y varias estrategias (MODELIZACIÓN, ENSAYO Y ERROR, ORGANIZAR LA INFORMACIÓN, ELIMINAR).

Proceso de Resolución



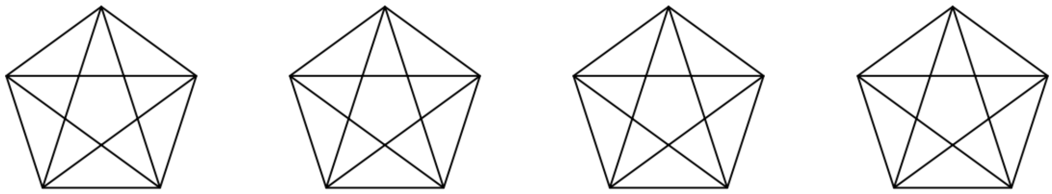
COMPRENDER Datos: Un pentágono regular. Se unen entre sí todos los vértices. Se obtienen cinco lados y cinco diagonales. Las rectas formadas se intersecan entre sí formando muchos triángulos de diferentes tamaños. Objetivo: Cuántos triángulos se pueden construir. Relación: Para que haya triángulo deben estar bien definidos sus tres vértices o sus tres lados.

Diagrama: Realizar un dibujo de la figura a trabajar. Una tabla.

PENSAR Estrategias: MODELIZACIÓN. ENSAYO Y ERROR / ORGANIZAR LA INFORMACIÓN DE MANERA SISTEMÁTICA. ELIMINAR.

EJECUTAR

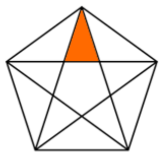
Podríamos hacer una MODELIZACIÓN utilizando el diagrama realizado y unos lápices de color. Repetimos el dibujo la cantidad necesaria y en cada uno de ellos coloreamos uno de los triángulos formados. Al final hacemos un recuento.



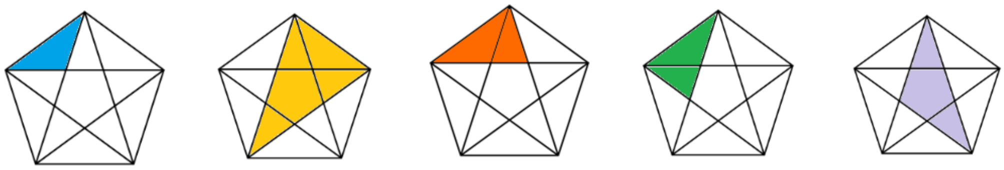
Hagamos algunas observaciones previas:

No hay triángulos totalmente interiores, es decir, que ninguno de sus vértices esté en su perímetro. Contamos como triángulos diferentes los que de otra manera se considerarían el mismo por simetría o giro. Es muy importante hallar un modo de seleccionar los distintos tipos de triángulos, sistemáticamente, para estar seguros de que contamos cada triángulo solamente una vez.

Una manera de clasificar es teniendo en cuenta el número de vértices que están es el perímetro del pentágono.

Con un vértice:  (Cinco triángulos)

Con dos vértices:



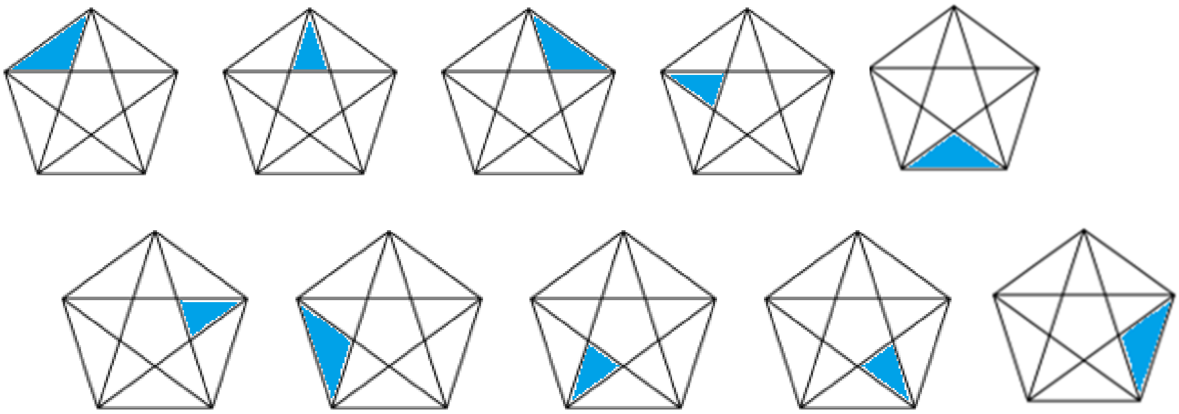
(Cinco triángulos por cinco modelos: veinticinco triángulos)

Con tres vértices:  (cinco triángulos)

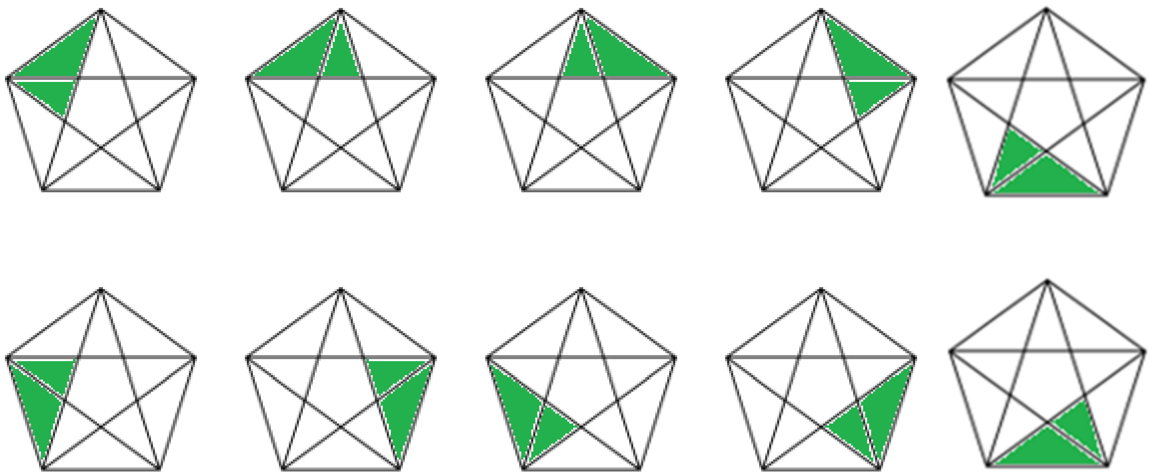
Total: treinta y cinco triángulos.

O los podemos clasificar y estudiar por el número de regiones (en las que hemos dividido el pentágono al trazar las diagonales) que intervienen en cada triangulo.

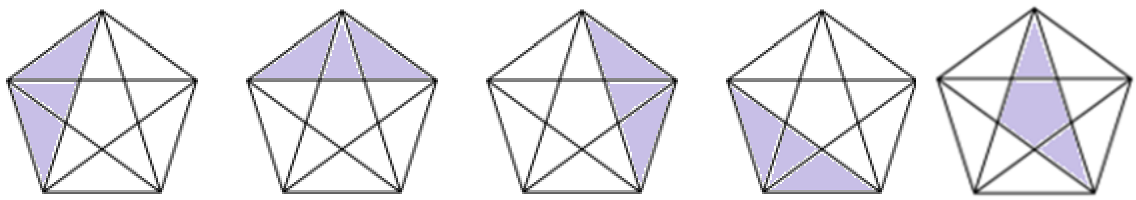
Podría ser así:

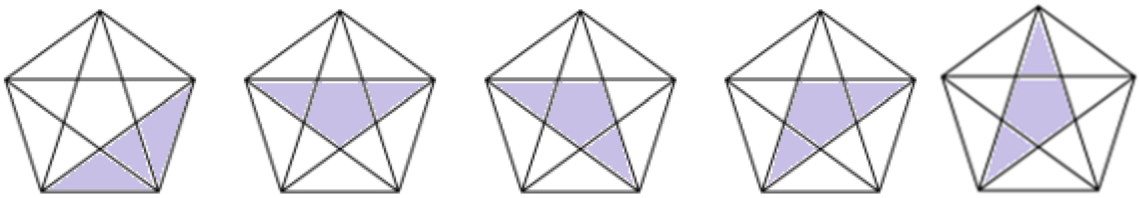


(10 triángulos de una región)

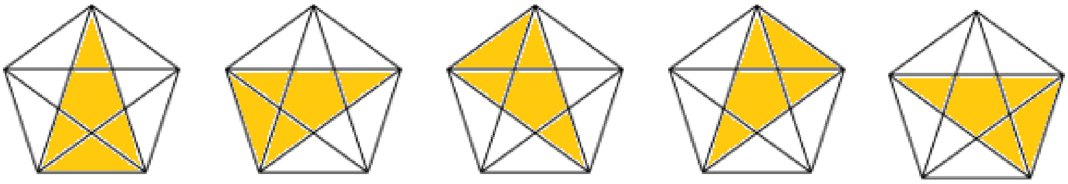


10 triángulos de dos regiones





(10 triángulos de tres regiones)



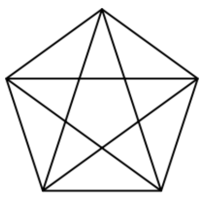
(5 triángulos de cinco regiones)

Total: 10 + 10 + 10 + 5 = 35 triángulos

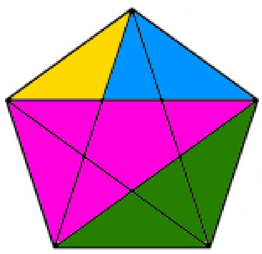
Un tercer procedimiento de encontrar sistemáticamente los triángulos consiste en determinar los que salen de un vértice o lado concreto.

Si fijamos el vértice superior y el lado contrario, tenemos los siguientes siete casos:

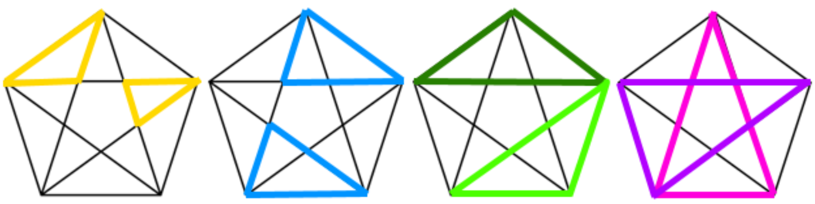
Y como son cinco los vértices, hay 7·5 = 35 triángulos interiores.



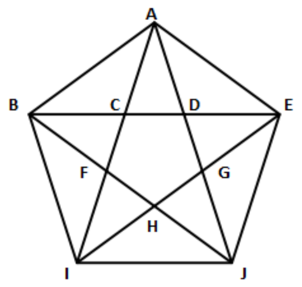
Proceder mediante ENSAYO Y ERROR consistiría en realizar recorridos en forma de triángulo sobre el diagrama y, al mismo tiempo, contabilizarlos. Podríamos utilizar, para asegurar que los encontramos todos, una clasificación de los triángulos según el número de regiones que lo componen. En el dibujo tenemos, por ejemplo, uno con una región, otro con dos regiones, otro con tres regiones y un cuarto con cinco regiones.



Ambas estrategias son atractivas, pero con dificultades cara al conteo. No hay garantías de encontrar todos los triángulos o de no repetir ninguno.



Es mejor utilizar la estrategia de ORGANIZAR LA INFORMACIÓN, pero utilizando una forma sistemática para buscar los triángulos.



La idea de la EXHAUSTIVIDAD consiste en formar todas las ternas posibles de vértices y luego ELIMINAR las que no satisfagan las condiciones de la relación.

Formaremos TODAS las combinaciones de los elementos A B C D E F G H I J tomados de TRES en TRES.

$$C_{10,3} = C_{10,3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 120$$

ABC	ABD	ABE	ABF	ABG	ABH	ABI	ABJ	
ACD	ACE	ACF	ACG	ACH	ACI	ACJ		
ADE	ADF	ADG	ADH	ADI	ADJ			
AEF	AEG	AEH	AEI	AEJ				
AFG	AFH	AFI	AFJ					
AGH	AGI	AGJ						
AHI	AHJ							
AIJ								
							Total	36
BCD	BCE	BCF	BCG	BCH	BCI	BCJ		
BDE	BDF	BDG	BDH	BDI	BDJ			
BEF	BEG	BEH	BEI	BEJ				
BFG	BFH	BFI	BFJ					
BGH	BGI	BGJ						
BHI	BHJ							
BIJ								
							Total	28
CDE	CDF	CDG	CDH	CDI	CDJ			
CEF	CEG	CEH	CEI	CEJ				
CFG	CFH	CFI	CFJ					
CGH	CGI	CGJ						
CHI	CHJ							
CIJ								
							Total	21
DEF	DEG	DEH	DEI	DEJ				
DFG	DFH	DFI	DFJ					
DGH	DGI	DGJ						

DHI	DHJ							
DIJ								
								15
EFG	EFH	EFI	EFJ					
EGH	EGI	EGJ						
EHI	EHJ							
EIJ								
							Total	10
FGH	FGI	FGJ						
FHI	FHJ							
FIJ								
							Total	6
GHI	GHJ							
GIJ								
							Total	3
HIJ								
							Total	1
TOTAL: 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 =								120

Eliminaremos con un aspa **ROJA** los triángulos cuyos tres vértices estén en línea recta. Eliminaremos con un aspa **VIOLETA** los triángulos a los que les falte algún lado.

Otra forma en la que podemos hacerlo también, es teniendo en cuenta que pares de letras no pueden formar triángulo por no tener un segmento que las una directamente (AH, BG, ID, JC y EF) y que tríos, al estar alineados, no forman triángulo (los extraídos de ACFI, ADGI, BCDE, BFHJ, y IHGE)

ABC	ABD	ABE	ABF	~~ABG~~	~~ABH~~	ABI	ABJ
ACD	ACE	~~ACF~~	~~ACG~~	~~ACH~~	~~ACI~~	~~ACJ~~	
ADE	~~ADF~~	~~ADG~~	~~ADH~~	~~ADI~~	~~ADJ~~		
~~AEF~~	AEG	~~AEH~~	AEI	AEJ			
~~AFG~~	~~AFH~~	~~AFI~~	AFJ				
~~AGH~~	AGI	~~AGJ~~					
~~AHI~~	~~AHJ~~						
AIJ							

~~BCD~~	~~BCE~~	BCF	~~BCG~~	~~BCH~~	BCI	~~BCJ~~
~~BDE~~	~~BDF~~	~~BDG~~	~~BDH~~	~~BDI~~	BDJ	
~~BEF~~	~~BEG~~	BEH	BEI	BEJ		
~~BFG~~	~~BFH~~	BFI	~~BFJ~~			
~~BGH~~	~~BGI~~	~~BGJ~~				
BHI	~~BHJ~~					
BIJ						

~~CDE~~	~~CDF~~	~~CDG~~	~~CDH~~	~~CDI~~	~~CDJ~~
~~CEF~~	~~CEG~~	~~CEH~~	CEI	~~CEJ~~	
~~CFG~~	~~CFH~~	~~CFI~~	~~CFJ~~		
~~CGH~~	~~CGI~~	~~CGJ~~			
~~CHI~~	~~CHJ~~				
~~CIJ~~					

~~DEF~~	DEG	~~DEH~~	~~DEI~~	DEJ
~~DFG~~	~~DFH~~	~~DFI~~	~~DFJ~~	
~~DGH~~	~~DGI~~	~~DGJ~~		
~~DHI~~	~~DHJ~~			
~~DIJ~~				

~~EFG~~	~~EFH~~	~~EFI~~	~~EFJ~~
~~EGH~~	~~EGI~~	EGJ	
~~EHI~~	EHJ		
EIJ			

~~FGH~~	~~FGI~~	~~FGJ~~
FHI	~~FHJ~~	
FIJ		

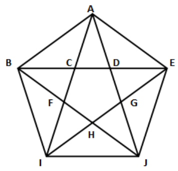
~~GHI~~	GHJ
GIJ	

HIJ

En la siguiente tabla, los colores relacionan cuadros con totales de cada uno, después de la criba:

15	9	1	2	3	2	2	1	
TOTAL:	15 + 9 + 1 + 2 + 3 + 2 + 2 + 1 =							35

La mejor consiste en numerar o nombrar todos los vértices (puntos de corte) de la figura utilizando para la sistematización el orden implícito de los números naturales o el del abecedario.



Utilizaremos este último. Pondremos las letras desde la A hasta la J.

Iremos nombrando con tres letras cada uno de los triángulos a partir del primer vértice. Es decir, fijaremos la primera letra y la segunda, cambiando la tercera hasta agotar todas las posibilidades. Cuando eso suceda, cambiaremos la segunda letra. Y, finalmente, cuando se agoten todas las posibilidades para la segunda letra cambiaremos de nuevo la primera. Y así hasta agotar todas las opciones. En ningún caso es necesario volver atrás.

Podemos proceder de dos maneras: (i) formar todas las ternas posibles y, después, eliminar las que no se correspondan con triángulos; (ii) ir formando las ternas y escribir sólo aquellas que correspondan a triángulos.

El criterio utilizado para la eliminación será el que aparece en la relación.

ABC	ABD	ABE	ABF	ABI	ABJ	ACD	ACE	ADE
AEG	AEI	AEJ	AFJ	AGI	AIJ			
BCF	BCI	BDJ	BEH	BEI	BEJ	BFI	BHI	BIJ
CEI								
DEG	DEJ							

EGJ	EHJ	EIJ						
FHI	FIJ							
GHJ	GIJ							
HIJ								

ABG no es triángulo porque no está el lado BG.

ABH no es triángulo porque no está el lado AH.

ACF no es triángulo porque sus tres vértices están en línea recta.

Con lado en BG no puede existir ningún triángulo ya que el lado BG no existe.

Lo mismo sucede con los que empiezan en CD.

Y así sucesivamente. Realizado el recuento, encontramos que, en total, hay 35 triángulos diferentes, de manera que obtenemos el mismo resultado que en los procedimientos anteriores.

Solución: 35 triángulos

RESPONDER

Comprobación: Una manera eficaz sería realizar el conteo de dos o tres maneras diferentes y comprobar que siempre obtenemos la misma cantidad. Procediendo con sistematicidad no ha lugar al error.

Análisis: Solución única.

Aunque puede discutirse, dada la redacción del texto, que solamente se piden aquellos triángulos cuyos vértices están sobre el pentágono original. Pero en ese caso sería un problema trivial.

Respuesta: **Uniendo entre sí los vértices de un pentágono regular se pueden construir 35 triángulos.**

Para una posible GENERALIZACIÓN del problema:

Comenzar la búsqueda con un triángulo (polígono con menor número de vértices), luego con un cuadrado, pasar por el pentágono regular y el hexágono regular. Hacer una tabla donde se recojan los resultados. Intentar encontrar un patrón, si lo hay, que permita hacer una generalización del problema.

UNA MOTO EN COMÚN

Juan, Luis, Alberto y Lucía deciden comprar una motocicleta entre los cuatro aportando cada uno sus ahorros. La moto cuesta 1800 €. Juan pone la mitad de lo que ponen los otros tres juntos, Luís paga la tercera parte de lo que ponen los otros tres juntos y Alberto la cuarta parte de lo que ponen los otros tres juntos.
¿Cuánto aportó Lucía?
Explica cómo has pensado para encontrar la respuesta.

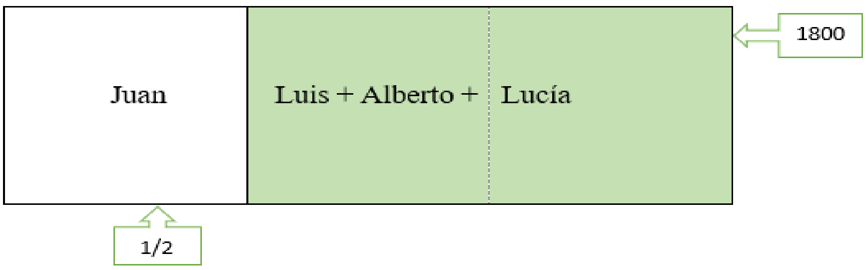
Proceso de Resolución

COMPRENDER Datos: Cuatro amigos (Juan, Luis, Alberto y Lucía) compran una motocicleta entre los cuatro. La moto cuesta 1800 €. Objetivo: Cuánto aportó Lucía. Relación: Juan pone la mitad de lo que ponen los otros tres juntos. Luís paga la tercera parte de lo que ponen los otros tres juntos. Alberto la cuarta parte de lo que ponen los otros tres juntos. Diagrama: Partes-Todo

PENSAR Estrategias: ORGANIZAR LA INFORMACIÓN mediante técnicas aritméticas y de partes/todo

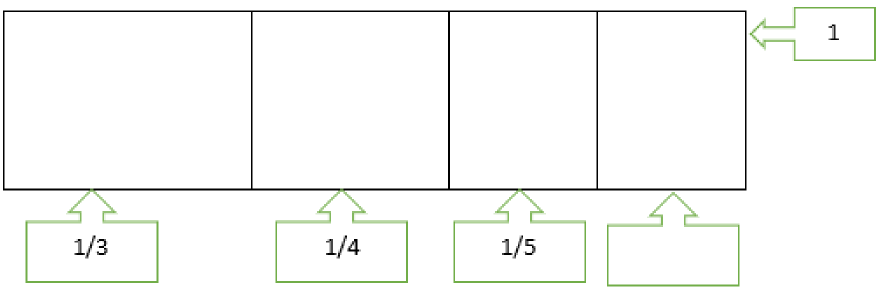
EJECUTAR

De la relación: **Juan pone la mitad de lo que ponen los otros tres juntos**, se deduce que **Juan pone un tercio del total del valor de la moto.**



De igual forma, las expresiones: **Luís paga la tercera parte de lo que ponen los otros tres juntos** y **Alberto la cuarta parte de lo que ponen los otros tres juntos** se transforman en **Luis paga 1/4 del total** y **Alberto pone 1/5 del total**.

Por tanto:



Se trata de una estructura aditiva y situación inversa, porque las partes son diferentes y hay una parte desconocida.

Eso requiere una suma y una resta. Sumamos las partes conocidas y el resultado lo restamos del todo.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{20+15+12}{60}=\frac{47}{60} \qquad\qquad 1-\frac{47}{60}=\frac{13}{60}$$

Al aplicar ese operador al valor de la moto, obtenemos:

13/60 de 1800 = 13 x 1800 / 60 = 13 x 30 = 390 euros

Solución: Lucía aportó 390 euros.

RESPONDER

Comprobación: Debemos comprobar todos los pormenores del problema.

Juan: 1/3 de 1800 = 600 euros

Luis: 1/4 de 1800 = 450 euros

Alberto: 1/5 de 1800 = 360 euros

Lucía: 390 euros

Total: 600 + 450 +360 + 390 = 1800 euros, que el precio de la moto.

Juan: 600 / (450 + 360 + 390) = 600/1200 = 1/2

Luis: 450 / (600 + 360 + 390) = 450/1350 = 1/3

Alberto: 360 / (600 + 450 + 390) = 360/1440 = 1/4

Análisis: La solución es única.

Respuesta: **Lucía aportó a la compra de la moto 390 euros.**

Aunque el problema parece destinado al uso del álgebra como organizador, es evidente que requiere un conocimiento fuerte y seguro sobre el sentido numérico de las fracciones.

En realidad, los alumnos podrán descubrir, si no la conocen ya, una propiedad importante de las fracciones.

Si una colección es fracción 1/n de otra colección, al unir ambas colecciones, la primera es fracción 1/n+1 del total.

Habitualmente los alumnos sólo conocen de las fracciones su representación gráfica en forma muy regular, las operaciones de manera mecánica y su aplicación como operador sobre números enteros. Este tipo de problemas contribuye a un mejor conocimiento del sentido numérico de las fracciones.

Podría hacerse una MODELIZACIÓN (idea de Bruno) a partir del diagrama partes/todo. Representaríamos con tarjetas muy estrechas (servirían las tiras de prueba de los perfumes) el todo (precio de la moto) y sus partes que vendrían a ser la cantidad adecuada para que puedan partirse en las cuatro partes correspondientes a la aportación económica de cada uno de los cuatro amigos. Es decir, el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4 (60).

Pondríamos 60 tiras iguales y ahora trataríamos de ver cuántas partes de ese total corresponden a cada una de las tres relaciones conocidas.

El valor (etiqueta) de cada tira sería 1800 : 60 = 30 euros.

Para Juan: como pone un medio de lo que ponen los otros tres juntos, buscaremos donde se sitúa la marca que defina exactamente esa situación. Sería en la tira 20, la mitad de las restantes 40 tiras del total. Por tanto, 30 x 20 = 600 euros pondría Juan.

Para Luis: se procede igual para definir la parte cuyo triple es el resto. Sería en la tira 15. Eso corresponde a 15 x 30 = 450 euros que pondría Luis.

Para Alberto: de la misma manera definir la parte cuyo cuádruplo sea el resto. Sería en la tira 12, correspondiente a 12 x 30 = 360 euros que pondría Alberto.

Finalmente, para Lucía: 1800 – (600 + 450 + 360) = 1800 – 1410 = 390 euros.

DIBUJO ¡QUÉ PASIÓN!

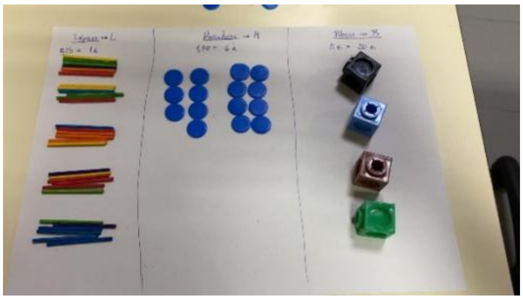
En una papelería un cartel indica:
- Lápices de color 0,25 euros cada uno.
- Marcadores 1,50 euros cada uno.
- Block de dibujo 5 euros cada uno.

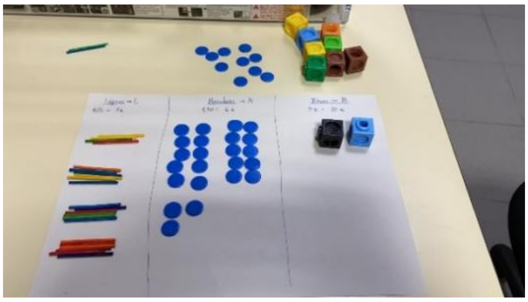
Alex, a quien le gusta mucho dibujar, entra en la papelería y compra, a los precios indicados, una pequeña cantidad de lápices de color, marcadores y blocks de dibujo.
Sale del negocio con 50 objetos, por los cuales ha pagado en total 50 euros.
¿Cuántos lápices de color, cuántos marcadores y cuántos blocks de dibujo ha comprado Alex?
Muestra cómo has encontrado tu respuesta.

Proceso de Resolución

COMPRENDER Datos: Alex compra una pequeña cantidad de lápices de color, marcadores y blocks de dibujo. Sale con 50 objetos, por los cuales ha pagado en total 50 euros. Objetivo: Cuántos lápices de color, cuántos marcadores y cuántos blocks de dibujo ha comprado Alex. Relación: Lápices de color 0,25 euros cada uno. Marcadores 1,50 euros cada uno. Block de dibujo 5 euros cada uno. Compra de los tres objetos. Diagrama: Modelo. Tabla. Lenguaje algebraico.

PENSAR Estrategias: MODELIZACIÓN. ENSAYO Y ERROR. ORGANIZAR LA INFORMACIÓN mediante lenguaje algebraico





EJECUTAR

Ésta es la modelización realizada por Bruno. La hoja de papel representa una tabla con tres columnas. En lugar de números se representan los precios con objetos diferentes. Las cantidades son el resultado del conteo correspondiente.

Para el Ensayo y Error, la tabla es la siguiente:

Block	x 5	Marcad.	x 1,50	Lápices	x 0,25	Total Objetos	Total Dinero	Verif.

La rellenamos comenzando por la mayor cantidad posible del objeto más caro.

Block	x 5	Marcad.	x 1,50	Lápices	x 0,25	Total Objetos	Total Dinero	Verif.
10	50					10	50	NO
9	45	3	4,50	2	0,50	16	50	NO
9	45	2	3	8	2	19	50	NO
9	45	1	1,50	14	3,50	24	50	NO
9	45	0	0	20	5	29	50	NO
8	40	6	9	4	1	20	50	NO
8	40	5	7,50	10	2,50	23	50	NO
8	40	4	6	16	4	28	50	NO
8	40	3	4,50	22	5,50	33	50	NO
8	40	2	3	28	7	38	50	NO
8	40	1	1,50	34	8,50	43	50	NO
8	40	0	0	40	10	48	50	NO

7	35	10	15	0	0	17	50	NO
7	35	9	13,50	6	1,50	22	50	NO
7	35	8	12	12	3	27	50	NO
7	35	7	10,5	18	4,50	32	50	NO
7	35	6	9	24	6	37	50	NO
7	35	5	7,50	30	7,50	42	50	NO
7	35	4	6	36	9	47	50	NO
7	35	3	4,50	42	10,50	52	50	NO
6	30	13	19,50	2	0,50	21	50	NO
6	30	12	18	8	2	26	50	NO
6	30	11	16,50	14	3,50	31	50	NO
6	30	10	15	20	5	36	50	NO
6	30	9	13,50	26	6,50	51	50	NO
5	25	16	24	4	1	25	50	NO
5	25	15	22,5	10	2,50	30	50	NO
5	25	14	21	16	4	35	50	NO
5	25	13	19,50	22	5,50	40	50	NO
5	25	12	18	28	7	45	50	NO
5	25	11	16,50	34	8,50	50	50	SÍ

Para organizar la información mediante lenguaje algebraico planteamos un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, donde x, y, z representan las cantidades compradas de blocks, marcadores y lápices, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 50 \\ 5x + 1{,}50y + 0{,}25z = 50 \end{array}\right\}$$

Sólo se encuentran dos ecuaciones. Trataremos de convertirla en una sola por reducción.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 50 \\ 20x + 6y + z = 200 \end{array}\right\}$$

Restando miembro a miembro.

$19x + 5y = 150$

Una ecuación diofántica, ya que los valores de x y de y son naturales.

$y = (150 – 19x) / 5 = 30 – 19 x / 5$

Para $x = 0 \rightarrow y = 30$ no es válido porque significa no comprar blocks

Para $x = 1 \rightarrow$ y no es natural

Para $x = 2, 3, 4 \rightarrow$ y no es natural

Para $x = 5 \rightarrow y = 30 – 19 = 11$

Para $x > 5 \rightarrow$ y no es natural

Por tanto, $x = 5$ $y = 11$

$z = 50 – x – y = 50 – 5 – 11 = 50 – 16 = 34$

Solución: 5 blocks, 11 marcadores, 34 lápices.

RESPONDER

Comprobación: 5 + 11 + 34 = 50 objetos

5 x 5 + 11 x 1,50 + 34 x 0,25 = 25 + 16,50 + 8,50 = 50 euros

Análisis: Solución única.

Respuesta: **Alex ha comprado 34 lápices de color, 11 marcadores y 5 blocks de dibujo.**

Las tres estrategias utilizadas en este problema hacen que se pueda trabajar con diferentes niveles de alumnos.

En Secundaria, si no han trabajado anteriormente ecuaciones diofánticas, se aprovecha para dar una pequeña introducción a las mismas y trabajar investigando la manera de proceder y la justificación matemática de dicho proceso.

Cara al próximo ejemplar de la revista, proponemos que se practiquen las diferentes maneras de ser exhaustivo, tanto en la búsqueda de las soluciones como en el análisis de éstas.

3. RETOS PARA EL PRÓXIMO VOLUMEN

Presentamos estos tres ejercicios para ser resueltos antes de que aparezcan las respuestas en el próximo NÚMEROS.

Aquí va el primero, extraído de la Prueba Final del Rally Matemático Transalpino nº 27, celebrado en 2019, a cuyos redactores estaremos siempre agradecidos:

Flexiones

Marcos ha decidido seguir un programa de ejercicios físicos para mantenerse en forma. El programa prevé comenzar haciendo 10 flexiones el primer día y añadir cada día un cierto número de flexiones, siempre el mismo.

Hoy, habiendo comenzado su programa hace más de una semana, ha batido su récord con 73 flexiones.

¿Cuántos días lleva Marcos con su programa de flexiones?

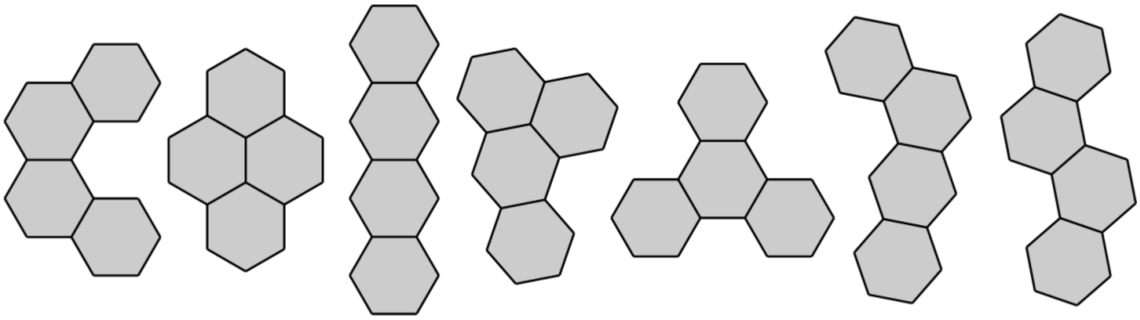
Escribe todas las posibilidades. Explica cómo has encontrado tus respuestas.

El segundo tiene el mismo origen que el anterior:

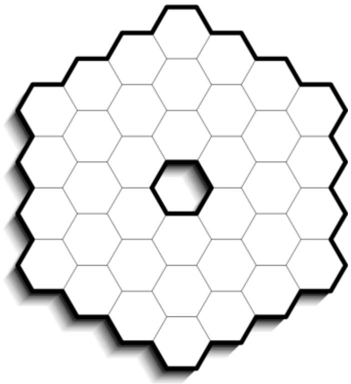
Juego hexagonal

En la caja de este juego hay muchas piezas. Todas las piezas están compuestas por cuatro hexágonos regulares.

Hay siete tipos diferentes de piezas, como muestra la imagen siguiente.



El juego consiste en recubrir completamente el tablero de juego representado aquí abajo, utilizando cada vez un solo tipo de pieza.



Es posible rotar y también girar una pieza, pero no deberán estar superpuestas, ni por fuera, ni sobre el agujero central ya presente en el tablero de juego.

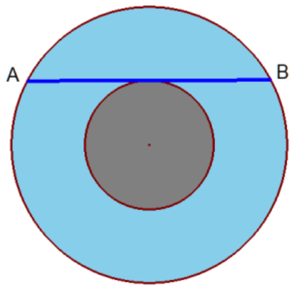
Señalar entre las piezas disponibles, los tipos de piezas que permiten recubrir enteramente el tablero de juego respetando las reglas.

Para cada tipo de pieza señalada, dibujar la solución utilizando repetidamente el tablero que se adjunta en el problema.

Y, finalmente, un tercero encontrado en una ficha antigua y cuyo origen, al margen de que igual o parecido se puede encontrar en muchos sitios, desconocemos:

LA FUENTE

Una fuente tiene un depósito de agua con forma de corona circular. Pablo y Andrea miden con una cuerda la longitud AB, que resulta ser de 10 m. Si la altura de agua es de 33 cm, **¿qué volumen de agua contiene la fuente?**



Y con la imagen de esta fuente lagunera, hasta aquí llegamos. Terminamos con nuestro mantra particular:

Resuelvan los problemas, singulares y alejados de los cotidianos; utilícenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntennos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema.

Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Nos repetimos: vamos, anímense… ¡Si es divertido!

Un saludo afectuoso del Club Matemático.

Como decimos persistentemente, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista. NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**