NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 105, noviembre de 2020, páginas 7-24

La introducción de los números reales en la enseñanza secundaria: un análisis institucional de libros de texto[1]

Alejandro S. González-Martín (Université de Montréal. Canadá)

Artículo solicitado por la Revista al autor

In memoriam, profesor Claude Gaulin

Resumen

En este artículo se presenta un análisis de la introducción de los números irracionales y reales en libros de texto de secundaria, usando una muestra de libros de texto brasileños usados en escuelas públicas y aprobados por el Ministerio de Educación. Nuestros análisis siguen un enfoque institucional (utilizando la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard). Los resultados indican que la noción de número irracional se introduce, en general, basándose en la representación decimal de los números y que la necesidad matemática para la construcción de los reales no es clara en estos libros. Se puede decir que los libros usados en instituciones de enseñanza secundaria desarrollan organizaciones matemáticas que se enfocan en el bloque *práctico*.

Palabras clave

Número real; número irracional; análisis de manual escolar; praxeología; organización matemática.

Abstract

In this paper, we analyse the introduction of irrational and real numbers in secondary textbooks, using a sample of Brazilian textbooks used in state schools and approved by the Ministry of Education. The analyses discussed in this paper follow an institutional perspective (using Chevallard's Anthropological Theory of the Didactic). Our results indicate that the notion of irrational number is generally introduced on the basis of the decimal representation of numbers, and that the mathematical need for the construction of the field of real numbers remains unclear in the textbooks. It seems that textbooks used in secondary teaching institutions develop mathematical organisations witch focus on the *practical* block.

Keywords

Real numbers; irrational numbers; textbook analysis; praxeology; mathematical organisation

1. Introducción

Tradicionalmente, en la enseñanza elemental, la introducción del conjunto de los enteros se basa en las limitaciones algebraicas del conjunto de los números naturales. Esta construcción se motiva, a menudo, con problemas de "la vida cotidiana", en donde es necesario calcular la diferencia entre dos números naturales, siendo el primero inferior al segundo. De forma similar, la extensión de los enteros a los racionales implica la limitación de la operación de la división, ilustrándose también con problemas prácticos. Hasta la construcción de los números complejos en niveles educativos más avanzados se relaciona con la estructura algebraica del cuerpo de los números reales (que se asume que es previamente conocida): la imposibilidad de encontrar las raíces de algunas ecuaciones polinómicas. Así, el aprendizaje de los diferentes conjuntos numéricos puede ser visto como una extensión progresiva de la percepción inicial de los números a través de la estructura algebraica de conjuntos anidados, desde la noción primitiva de contar, hacia las ideas de comparar, medir y resolver ecuaciones.

El caso de la extensión de los racionales hacia los reales es particularmente diferente. A diferencia de las extensiones previas, no se trata de un salto algebraico, puesto que requiere formalmente de propiedades teóricas como la convergencia y la completitud. Esto ha demostrado ser un obstáculo importante, que comenzó con las cantidades inconmensurables de la matemática griega (p.ej., Katz, 1992, pp. 73-74). Además, un conjunto discreto de números es suficiente para lidiar con el problema *empírico* de la medida, mientras que el sistema de los números reales responde a la construcción de una *teoría* de la medida consistente con la geometría clásica. Por tanto, la necesidad de construir el conjunto de los números reales difícilmente puede ser establecida o concretada a partir de una motivación empírica. Como la investigación ha mostrado (véase la revisión de literatura más abajo), estos obstáculos epistemológicos y restricciones teóricas tienen repercusiones en la enseñanza y el aprendizaje. Por un lado, una definición formal de los números reales no está probablemente al alcance de la enseñanza primaria o secundaria. Por otro lado, el conjunto de los números reales no se puede construir sobre exigencias algebraicas o empíricas[2]. Sin embargo, los números reales son un tema indispensable en la matemática escolar, entre otras razones a causa de: 1) su importancia inherente en el centro del conocimiento matemático contemporáneo; 2) su relación con otros temas importantes del currículo (tales como la longitud de la circunferencia, las raíces cuadradas y el Teorema de Pitágoras) y otros temas avanzados, como límites y continuidad. Esto plantea una pregunta clave, tanto para la enseñanza como para el diseño de libros de texto y currículo: ¿Cómo encontrar un equilibrio entre el rigor y la intuición en el caso particularmente delicado de la introducción de los números reales en secundaria?

En nuestra opinión, las principales dificultades alrededor de la introducción de los números reales han sido habitualmente evitadas, o simplemente ignoradas, por los enfoques de los currícula. De hecho, la estructura de la recta real, que está en el núcleo de las bases teóricas de las definiciones del cálculo infinitesimal, se asume tácitamente como bien comprendida por los estudiantes cuando las nociones más avanzadas, tales como límites o derivadas, se introducen más tarde en sus estudios. Se puede establecer paralelismos con otras nociones, como la continuidad y las series, que se asumen bien entendidas y son usadas para definir otras nociones matemáticas. La investigación presentada en este artículo forma parte de un proyecto de investigación sobre los enfoques privilegiados por las instituciones educativas (principalmente a través de currícula, libros de texto y prácticas docentes) para introducir nociones que tienen las siguientes características: 1) estas nociones juegan un papel clave en la matemática contemporánea; 2) forman la base para definir otras nociones matemáticas; 3) se les dedica tradicionalmente poca atención en la enseñanza primaria y secundaria, pero se asumen bien comprendidas cuando se enseñan otras nociones más avanzadas. Resultados parciales de nuestro trabajo para el caso de la continuidad han sido presentados en Giraldo, González-Martín, & Santos (2009) y sobre las series numéricas en González-Martín, Nardi, & Biza (2011).

El propósito de este artículo no es discutir *cómo se deberían enseñar los números reales en la enseñanza secundaria*. Sin embargo, esperamos que nuestra investigación y resultados contribuyan a identificar problemas (existentes y potenciales) en los enfoques de enseñanza actuales, promuevan la discusión alrededor de cómo debería ser la enseñanza de estos números y puedan llevar a algunas recomendaciones.

2. Contexto científico y revisión de literatura

La literatura científica en didáctica de la matemática ha identificado varias dificultades en el *aprendizaje* de los números reales e irracionales, que discutimos más abajo. De manera sorprendente, no existe un número importante de artículos que se centren en la *enseñanza* de estas nociones. Por tanto, conscientes de las dificultades identificadas por la investigación relativas al aprendizaje de los números reales, esta investigación se propone analizar cómo éstos son introducidos y qué significado se les da en los libros de texto de secundaria.

Específicamente, el foco principal de este artículo es presentar los resultados de nuestros análisis sobre cómo los números reales e irracionales son introducidos en libros de texto de secundaria. Nuestros análisis siguen una perspectiva institucional (utilizando la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard, 1999; TAD en lo que sigue) y se centran en las relaciones institucionales que caracterizan esta introducción. Para este propósito, se analizó una muestra amplia de libros de texto utilizados en escuelas públicas de Brasil. La investigación se centró en los libros, vistos como un recurso esencial en la enseñanza, "utilizados virtualmente por cada maestro y alumno […] de forma cotidiana" (Reys & Reys, 2007, p. 63)[3]. De esta manera, el conocimiento de los maestros o sus prácticas no forman parte de esta investigación.

Otra contribución de este artículo consiste en discutir el potencial del uso de enfoques institucionales para identificar preguntas clave sobre la organización de la enseñanza de los números reales y las tareas que son privilegiadas en los libros de texto. Nuestros análisis nos permitieron realizar un retrato de los discursos prácticos y teóricos promovidos por estos libros, además de formar conjeturas sobre su posible influencia en el aprendizaje de los alumnos.

2.1. Revisión de literatura

Las dificultades experimentadas por los alumnos, y también los maestros, con los números reales o algunas de sus propiedades han sido estudiadas por la investigación en didáctica de la matemática. Sin embargo, hasta ahora, aún hay un número limitado de investigaciones que se centren en la introducción de esta noción en los libros de texto. La revisión de literatura que se presenta a continuación se organiza en tres ejes: primero, una síntesis de literatura sobre las dificultades encontradas por maestros y alumnos con los números reales; segundo, una síntesis de literatura sobre el análisis de libros de texto; finalmente, una síntesis de los principales resultados del trabajo de Bronner (1997) sobre los números reales en libros de texto franceses.

Algunas de las dificultades identificadas por la literatura científica sobre los números irracionales están relacionadas con su definición o con la habilidad de explicar la necesidad de extender el cuerpo de los racionales (p.ej., Soares, Ferreira, & Moreira, 1999). Algunos autores (p.ej., Fischbein, Jehiam, & Cohen, 1995; Robinet, 1986) también han identificado la idea de que un número irracional es un número con una representación decimal infinita (sin considerar la presencia o ausencia de período), o el hecho de que muchos estudiantes en formación inicial de maestros asocian los números irracionales exclusivamente con las raíces cuadradas y con el número π (p.ej., Sirotic & Zazkis, 2007). La investigación también ha identificado que muchos maestros no reconocen una representación decimal infinita y no periódica como una representación de un número irracional (Sirotic & Zazkis, 2007) y que no están seguros de si un número representado por un cociente de enteros es siempre un número racional (Zazkis & Sirotic, 2004). Otras dificultades identificadas están relacionadas con la cardinalidad de los conjuntos numéricos y con las propiedades topológicas de los números reales. Por ejemplo, a través de la idea de que para cada racional hay un irracional (Sirotic & Zazkis, 2007; Zazkis & Sirotic, 2004), o incluso viendo los números irracionales como un conjunto de unos pocos números aislados, o teniendo modelos 'atomísticos' de la recta real, viendo a los números como uno seguido de otro, con agujeros en medio (Robinet, 1986, p. 364). Finalmente, a nivel universitario, Bergé (2008) discute que, en general, la propiedad de completitud está implícita en las tareas presentadas en muchos cursos introductorios. Como consecuencia, los estudiantes la ven como evidente y desarrollan una idea intuitiva que no problematiza la necesidad de esta propiedad.

En lo que respecta a investigación sobre el análisis de libros de texto, el número de investigaciones ha pasado de ser bajo (p.ej., Howson, 1995) a aumentar en los últimos años, a pesar del reconocimiento de que los manuales escolares "siempre han jugado un papel importante en la enseñanza de las matemáticas" (Straßer, 2009, p. 70). Además, muchos estudios con análisis de libros de texto se centran en una muestra pequeña. Por ejemplo, el estudio de Raman (2004), centrado en la noción de continuidad en manuales de precálculo, cálculo y análisis, consideró sólo un manual para cada uno de los tres cursos estudiados. Lithner (2004) analizó los tipos de razonamiento que los ejercicios en libros de cálculo pueden desarrollar en los estudiantes, pero también restringió sus análisis a un solo libro para estudiar los diferentes tipos de razonamiento y a otros tres para analizar el uso de las diferentes formas de razonar para resolver las actividades. Lithner mostró que las tareas en las cuales los estudiantes apenas necesitan reproducir técnicas previamente ejemplificadas son predominantes, pero no consideró cómo se organiza el contenido en estos manuales o el posible conocimiento se promueve que los estudiantes desarrollen. Otro ejemplo es el trabajo de Stylianides (2009), que analizó una serie de libros de texto para ver cómo se promueven las tareas de razonamiento y prueba en las unidades de álgebra, números y geometría. Sin embargo, el autor no consideró las secciones teóricas de estos manuales. Finalmente, citamos el trabajo de Wagner (2012) sobre la estructura gramatical de otra serie de libros de texto, de la que es coautor. Aunque estos cuatro ejemplos de investigaciones (Lithner, Roman, Stylianides y Wagner) han aportado contribuciones importantes a la investigación, sólo analizaron una muestra muy pequeña de libros de texto y no discutieron las posibles consecuencias de la estructura de los contenidos y los tipos de tarea en el aprendizaje de los estudiantes.

Un trabajo que analizó libros de texto para identificar cómo introducen los números reales es el de Bronner (1997), quien siguió un enfoque institucional y afirmó que estos libros juegan un papel significativo en la construcción de significado matemático dentro de las instituciones de enseñanza (p. 58). Este autor desveló una falta de caracterización explícita de las raíces cuadradas como "nuevos números" en los manuales de secundaria. En su lugar, el enfoque dominante es algebraico, disociado de la medida de objetos: la raíz cuadrada aparece con un carácter algebraico fuerte, como un operador algébrico y relacionado con un algoritmo para cálculos (reforzado por la tecla √ de la calculadora). A finales de la secundaria, el conjunto de los números reales parece ser introducido como una "bolsa grande" (p. 59), basado en la percepción inicial de "número", independientemente de su naturaleza aritmética; se introduce también la recta real. Tanto en el nivel *collège* (12-16 años) como en el nivel *lycée* (no obligatorio, 17-18 años), Bronner afirma que un gran número de ejercicios se basan en al álgebra de radicales y en las reglas formales de cálculo para transformar diferentes expresiones de un número. También es raro, en el *collège*, ver el término "número irracional" asociado a las raíces cuadradas; esta etiqueta se usa más en el *lycée*. Bronner usa el término "vacío didáctico institucional" (p. 59) para referirse a la falta de negociación explícita, tanto en los programas como en los libros de texto, de la extensión de los decimales y racionales hacia los números reales. Bronner identifica dos estrategias presentes en los libros de texto de *lycée* para intentar reducir este vacío didáctico institucional: 1) poner el énfasis en las reglas que permiten realizar diferentes cálculos según el tipo y formato del número (algunas de estas reglas coinciden con las reglas que permiten definir un cuerpo), pero sin ninguna indicación del conjunto de referencia para estos cálculos o la naturaleza de los números implicados; 2) presentar los diferentes tipos de números, los conjuntos y la notación de cada conjunto. La presentación de los números reales, que empieza con una definición y la presentación de los diferentes conjuntos numéricos, continúa con el objeto *recta real*. Este “conocimiento matemático a ser enseñado” (Barbé, Bosch, Espinoza, & Gascón, 2005, p. 240) juega un papel importante en las prácticas de los maestros, siendo uno de los elementos que restringe sus elecciones. Como tal, es importante tener herramientas que permitan analizar este conocimiento.

3. Marco teórico

Nuestro análisis sobre cómo los libros de texto introducen los números irracionales y reales sigue un enfoque institucional, tomando en cuenta las elecciones institucionales y sus posibles repercusiones (TAD de Chevallard, 1999), reconociendo el papel fundamental que estos libros juegan en la institución “enseñanza de las matemáticas en secundaria” (EMS). Así, vemos los libros de texto como un elemento significativo de la *relación que la institución EMS tiene con los números irracionales y reales*. Nuestro trabajo coincide con la perspectiva de Bronner (1997), pero va más lejos que éste, analizando una muestra mayor de libros de texto contemporáneos.

La TAD (Chevallard, 1999) se propone alcanzar una mejor comprensión de las elecciones hechas por una institución cuando organiza la enseñanza de un contenido, así como las consecuencias de estas elecciones en el significado dado al contenido enseñado y al aprendizaje obtenido. Chevallard reconoce que los objetos matemáticos no son “absolutos”, sino que son entidades que emergen de las prácticas de ciertas instituciones; además, toda actividad humana consiste, en algún punto, en completar un cierto tipo de tarea. Así, estas prácticas pueden ser descritas en términos de tareas (t, siendo T un tipo de tarea), técnicas (τ) usadas para completar estas tareas, un discurso (tecnología[4], θ) que justifica y explica las técnicas y permite considerar, reflexionar y producir estas técnicas, y una teoría (Θ) que incluye y justifica este discurso. Este marco teórico postula que toda actividad humana genera una organización que Chevallard identifica como $[T/\tau/\theta/\Theta]$ y llama *praxeología* u *organización praxeológica*; en el caso del conocimiento matemático, se pueden llamar *organización matemática* (OM en lo que sigue).

Un análisis praxeológico caracteriza la relación institucional con un objeto matemático dentro de una institución dada. En particular, analizando las tareas, se pude identificar el *bloque práctico* (o *saber-hacer*), que está formado por los dos primeros elementos (tipos de tareas y técnicas). El *bloque teórico* (que incluye la tecnología y la teoría) considera el desarrollo de un discurso que permite describir, explicar y justificar lo que se hace. Así, el *bloque teórico* provee el discurso matemático necesario para justificar e interpretar el *bloque práctico*. Ambos bloques son aspectos fundamentales del modelo antropológico de la actividad matemática que puede ser usado para describir el conocimiento matemático. Por ejemplo, para la tarea “identificar si un número dado es racional o irracional”, se pueden usar varias técnicas para resolverla, dependiendo de la forma en que se exprese el número (como suma de dos números, como cociente de enteros, como una raíz cuadrada…). Estas técnicas pueden ser explicadas con diferentes discursos (“un cociente de enteros es siempre un racional”, “la suma de un racional y un irracional es siempre irracional”, etc.), que tienen sentido y están justificados dentro de un marco mayor de nociones, propiedades y otros, que sería la teoría.

Según este enfoque, el maestro, para organizar la enseñanza de un contenido específico, necesita (re)crear una organización matemática dentro de una institución de enseñanza. Para esto, se refiere a documentos curriculares, libros de texto, preguntas de previas evaluaciones, exámenes nacionales, etc. Es así como la institución educativa "informa" al maestro sobre las matemáticas que deben ser enseñadas y sobre cómo hacerlo (Barbé et al., 2005, p. 240), lo que, a su vez, da forma al *conocimiento matemático a ser enseñado*. Para analizar OMs que la institución EMS privilegia con el propósito de introducir los números irracionales y reales a través de libros de texto, analizamos cómo se organiza esta introducción. Así, nos centramos en los tipos de tareas usadas más frecuentemente, para determinar si estos libros desarrollan una OM *completa* (con el cuarteto [T/τ/θ/Θ] presente), o una OM *incompleta* (por ejemplo, poniendo énfasis sólo en el bloque *práctico* [T/τ]). Finalmente, precisamos que una OM basada en un tipo específico de problema se llama *OM puntual*; cuando se integran varias OM puntuales que se justifican con el mismo discurso, se tiene una *OM local* (Barbé et al., 2005, pp. 236-238). Así, nuestro trabajo se propone caracterizar las OMs locales en la introducción de los números reales en los libros de texto de nuestra muestra.

4. Metodología

4.1. Muestra

Para esta investigación se utilizan datos empíricos de una selección de libros de texto utilizados en escuelas públicas de Brasil y aprobados por el Ministerio de Educación brasileño. Nuestro foco no consiste en describir cómo los manuales brasileños introducen los números irracionales y reales, sino más bien usar el caso brasileño como un ejemplo que nos permitirá plantear y discutir algunas cuestiones que tienen paralelos con la enseñanza de los números reales a nivel mundial; esta muestra sirve, además, para evaluar la utilidad de un enfoque antropológico para analizar libros de texto.

En Brasil la educación obligatoria se organiza en tres secciones: *ensino fundamental I* (grados 1 a 5, de 6 a 10 años), *ensino fundamental II* (grados 6 a 9, de 11 a 14 años) y *ensino médio* (grados 1 a 3, de 15 a 17 años); las dos últimas corresponden a la educación secundaria. Los libros de texto utilizados en escuelas públicas se distribuyen gratuitamente a los alumnos y son escogidos por la escuela a partir de una lista de libros previamente aprobados por el Ministerio de Educación. Estos libros son enviados (en colección completa: cinco libros para el *ensino fundamental I*, cuatro para el *ensino fundamental II* y tres para el *ensino médio*) por los autores o los editores al comité de evaluación.

Todas las colecciones incluidas en nuestra muestra habían sido aprobadas en la evaluación ministerial. Se escogieron, de manera aleatoria, 9 de las 16 colecciones aprobadas en 2008 para *ensino fundamental II* y 5 de las 8 colecciones aprobadas en 2007 para *ensino médio*. Las razones para considerar solamente libros de texto aprobados son las siguientes: 1) estos libros de texto llegan a todas las escuelas públicas del país; 2) debido al proceso de evaluación por expertos, estos libros ya han sido sometidos a algún tipo de evaluación. La lista de los libros de la muestra aparece en las Tablas 1 y 2.

Los números reales se introducen generalmente durante el *ensino fundamental II*, en el grado 8 (13 años) y se usan hasta el final del *ensino médio*. Por tanto, se analizaron los libros de texto correspondientes a los grados 8 y 9 de las colecciones del *ensino fundamental II* y las colecciones completas (los tres grados) del *ensino médio*.

Código	Título de la colección	Autores/Año de publicación
F1	Novo Praticando Matemática	Andrini, Á. & Zampirolo, M. (2002)
F2	Matemática Hoje é Feita Assim	Bigode, A. (2006)
F3	Tudo é Matemática	Dante, L. (2005)
F4	Matemática para Todos	Imenes, L. & Lillis, M. (2002)
F5	Matemática e Realidade	Machado, A., Iezzi, G. & Dolce, O. (2005)
F6	Matemática – Idéias e Desafios	Mori, I. & Onada, D. (2006)
F7	Idéias & Relações	Siedel, C., Peracchi, E. & Estephan, V. (2005)
F8	Matemática	Souza, M. & Spinelli, W. (2002)
F9	Projeto Araribá – Matemática	Matsubara, J. (2006)

Tabla 1. Muestra – colecciones de manuales de *Ensino Fundamental II*

Código	Título de la colección	Autores/Año de publicación
M1	Matemática Completa	Bonjorno, J., Giovanni, J. & Júnior, J. (2005)
M2	Matemática	Dante, L. (2005)
M3	Matemática Aula por Aula	Filho, B. & Silva, C. (2003)
M4	Matemática	Paiva, M. (2004)
M5	Matemática Ensino Médio	Smole, K., Kiykawa, R. & Diniz, M. (2005)

Tabla 2. Muestra – colecciones de manuales de *Ensino Médio*

A pesar de que las escuelas públicas de Brasil tienen una sala de ordenadores, tal como se requiere en las políticas gubernamentales, las tecnologías digitales han tenido poco impacto en las prácticas escolares y en el diseño de materiales de enseñanza (Law, Pelgrum, & Plomp, 2008). En consecuencia, los libros de texto raramente presentan actividades que usen estas tecnologías para la enseñanza de los números reales y, de manera general, las actividades a desarrollar con lápiz y papel juegan un papel central en las prácticas de clase.

4.2. Análisis de datos

El análisis de datos se desarrolló en dos fases complementarias. Durante la primera fase, se analizó la estructura de las partes teóricas de los libros de texto. En la segunda fase, nos centramos en las tareas (y las formas de resolverlas) privilegiadas por estos libros, identificando la OM más representativa de la muestra, identificando así posibles tendencias generales, lo que nos permitió esbozar un retrato de cómo la institución EMS introduce los números reales a través de libros de texto.

Fase 1: teoría (definiciones, ejemplos y propiedades)

Se estudió la introducción de los números irracionales y reales. Para esto, definiciones, ejemplos y propiedades fueron analizados como un todo, prestando atención particular a la articulación y coherencia de su organización.

Fase 2: cartografía de tareas

Se identificaron las principales tareas propuestas por los libros de texto. Para cada tarea, identificamos las técnicas propuestas para resolverla, así como los discursos usados para explicar estas técnicas. En particular, se prestó atención particular a si este discurso está implícito o explícito en el capítulo sobre números reales. Así, se trató de identificar la OM predominante en la muestra. Las principales taras que se identificaron fueron:

- Clasificar un número dado como racional o irracional (T_{CR}): se da a los alumnos ejemplos de números reales, expresados en diferentes formas (notación decimal, fracciones, radicales y otras expresiones implicando las anteriores), para que decidan si son racionales o irracionales.
- Determinar una fracción equivalente a un número racional determinado dado en notación decimal (T_{FR}): encontrar una fracción, usando un procedimiento dado, que equivalga a cierto número periódico.
- Encontrar un número racional o irracional entre dos números dados (T_{ENT}): se utiliza la media aritmética o el ajuste por redondeo de expresiones decimales.
- Encontrar una aproximación decimal finita de un número irracional dado (T_{APP}): dada una representación decimal de un número irracional dado, utilizar aproximaciones por redondeo.
- Ordenar números reales (T_{ORD}): ordenar números dados en notación fraccionaria o decimal.
- Representar números en la recta real (T_{RR}): asociar números dados en notación fraccionaria o decimal con puntos sobre la recta real.

Como ya se señaló, subrayamos que la presencia de tareas utilizando tecnologías digitales en el capítulo de números reales es (casi) nula en los libros de texto brasileños. Incluso en las tareas del tipo T_{APP} no se encontró referencia al uso de ordenadores o calculadoras.

En lo que sigue, ilustramos los resultados principales de los análisis de las dos fases.

5. Análisis de datos

5.1. Fase 1: teoría (definiciones, ejemplos y propiedades)

El proceso didáctico de introducción de los números reales requiere de un *primer encuentro* (Barbé et al., 2005; Chevallard, 1999) con la OM en cuestión. Los libros de texto analizados no parecen ser suficientemente explícitos y no responden a preguntas tales como: ¿qué conocimiento matemático sobre los números reales se debe enseñar? ¿Por qué es importante? ¿Por qué es útil? En su lugar, parecen privilegiar un *primer encuentro* con la OM sobre números reales a través de una serie de definiciones y propiedades.

De manera general, los libros analizados comienzan ofreciendo algunas definiciones, sin problematizar el nuevo contenido ni justificando su necesidad. Se clasificaron las definiciones dadas por estos libros para introducir los números irracionales en dos tipos, tal como sigue:

> D_A: un número irracional es un número que no puede ser escrito como una fracción;

> D_B: entre los números escritos en notación decimal, los que se escriben con una notación infinita y no periódica se llaman irracionales[5].

En la muestra, 5 libros (F1, F2, F4, F5, F8) definen los irracionales usando D_A y 9 libros (F3, F6, F7, F9, M1, M2, M3, M4, M5) usando D_B. En particular, F7 no enuncia claramente una definición de número irracional, pero D_B se presenta a través de los ejercicios.

A pesar de que las definiciones D_A y D_B son matemáticamente equivalentes, ninguno de los libros presenta un argumento para establecer esta equivalencia. Sin embargo, para resolver algunas tareas, algunos libros usan D_A (incluyendo algunos de los que definieron los irracionales usando D_B) y todos usan D_B (incluyendo los libros que definieron los irracionales usando D_A). Por ejemplo, el libro F5, que introduce los irracionales usando D_A, da ejemplos de algunos números en notación decimal afirmando que son irracionales, sin proveer ningún argumento para apoyar esta afirmación (Figura 1). Todos los libros introducen los números reales de la misma forma, usando la afirmación: "cualquier número racional o irracional es un número real" (D_C) (Figura 2).

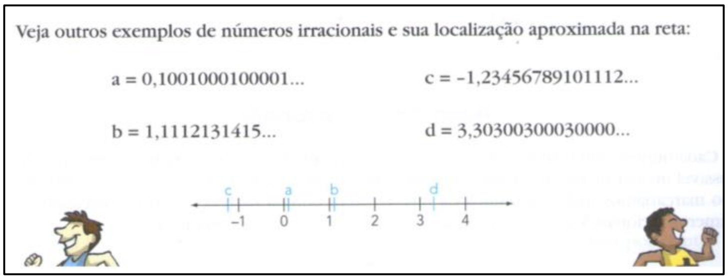
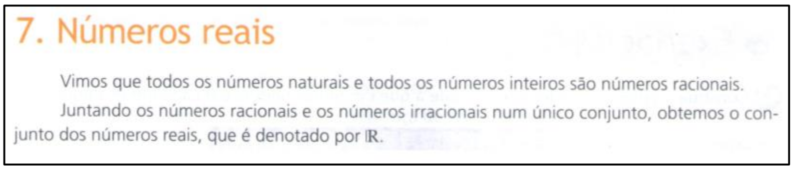


Figura 1. Ejemplos de números irracionales en el libro F5. "Vea otros ejemplos de números irracionales y su localización en la recta" [traducido del portugués].


7. Números reais

Vimos que todos os números naturais e todos os números inteiros são números racionais.

Juntando os números racionais e os números irracionais num único conjunto, obtemos o conjunto dos números reais, que é denotado por ℝ.

Figura 2. Definición de número real en el libro F1. "Vimos que todos los números naturales y todos los números enteros son números racionales. Juntando los números racionales y los números irracionales en un único conjunto, obtenemos el conjunto de los números reales, que se denota por ℝ".

Esta estrategia de presentar los diferentes tipos de número, los diferentes conjuntos y sus notaciones, parece corresponder a las estrategias identificadas por Bronner (1997) para reducir el "vacío didáctico institucional". Además, esto se hace sin presentar las diferentes representaciones de estos elementos para enriquecer este *primer encuentro* con estos números. Es importante señalar que, para definir un número irracional, D_A y D_B presuponen, respectivamente, la existencia de otro tipo de números que no son fracciones y que tienen notaciones decimales infinitas y no periódicas. Así, D_A y D_B no establecen la existencia de un nuevo tipo de número, sino que más bien etiquetan como "irracional" a una clase de números dentro de un conjunto que se asume previamente existente (y que no puede ser otro que los números reales). Sin embargo, en estos libros, la definición de número real no sólo viene después de la definición de irracional, sino que depende de ella, puesto que D_C presenta un número real como un número que es racional o irracional. Por tanto, puesto que estas definiciones son mutuamente dependientes, desde un punto de vista estrictamente matemático, no pueden ser consideradas como definiciones adecuadas. Además, desde un punto de vista didáctico, este análisis sugiere serias dificultades asociadas con las definiciones presentadas en los manuales, puesto que el objeto de la definición se asume como previamente conocido, sin ninguna introducción explícita de su existencia. Vemos aquí un ejemplo de argumentación circular, que también ha sido identificado por Barbé et al. (2005) y que constituye también, en su caso sobre límites, "una de las debilidades del "conocimiento matemático a ser enseñado"" (p. 262). En particular, D_B se basa en la propiedad de que todo número real admite una representación en notación decimal. De forma sorprendente, parece que se da por hecha la aceptación de esta propiedad por parte de los alumnos, como una *regla transparente* que no necesita justificación (Barbé et al., 2005, p. 250). Además, los libros no parecen tomar en cuenta las dificultades identificadas por la investigación (Fischbein et al., 1995; Robinet, 1986; Soares et al., 1999) para definir o identificar un número irracional.

Otro problema que encontramos en estas definiciones es que D_A caracteriza los números racionales como fracciones y los números irracionales como números que no pueden ser escritos como fracciones, sin precisar la naturaleza del numerador y del denominador como enteros. Esto puede generar confusión entre fracciones y números enteros, y con la noción más general de *razón*. Por ejemplo, π se define como la *razón* entre la longitud y la medida del diámetro de una circunferencia, pero no es una fracción porque no se puede expresar como el cociente de números *enteros*.

Entre los 14 libros de texto de la muestra, 8 (F2, F4, F5, F6, F9, M1, M3, M5) introducen los números irracionales a través de ejemplos de números que no son racionales. Éstos se presentan después de la definición, (supuestamente) señalando la existencia de un "nuevo" tipo de número. 6 de estos 8 libros usan $\sqrt{2}$ como ejemplo introductorio, 4 de ellos a través de la medida de la diagonal de un cuadrado y usando directamente las definiciones D_A o D_B y los otros 2 a través de su representación decimal. Los otros 2 libros usan ejemplos de números con notación decimal infinita no periódica. Se puede ver que estas representaciones decimales infinitas son usadas sin ninguna argumentación de que una representación infinita no periódica no puede ser el resultado de la división de dos enteros (una vez más, como si este hecho fuera *transparente*).

En todos los libros de la muestra, los ejemplos de números irracionales se usan principalmente para ilustrar las definiciones y propiedades. Esto es, el enunciado de una definición o de una propiedad viene acompañado de algunos ejemplos que la verifican (Figura 3). $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y π se encuentran entre los ejemplos más usados en los libros. Sus representaciones decimales se asumen conocidas (incluso en el caso de los manuales que usan D_A), sin ofrecer ninguna justificación del hecho de que estos números tienen, efectivamente, representaciones decimales infinitas y no periódicas.

> $\sqrt{2}$ é um *número irracional.*
>
> Os matemáticos mostraram também que existem infinitos números irracionais.
> Por exemplo, as raízes quadradas dos números primos:
> $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$ ... são números irracionais, bem como seus opostos $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{11}$, $-\sqrt{13}$...

Figura 3. Enunciado de propiedades sin ninguna argumentación, del libro F1. "$\sqrt{2}$ es un número irracional. Los matemáticos también mostraron que existen infinitos números irracionales. Por ejemplo, las raíces cuadradas de los números primos: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$… son números irracionales, así como sus opuestos -$\sqrt{3}$, -$\sqrt{5}$, -$\sqrt{11}$, -$\sqrt{13}$…".

Las propiedades halladas en los libros conciernen principalmente las operaciones (las operaciones con racionales son cerradas y operaciones entre racionales e irracionales) y las propiedades utilizadas para determinar la posición de números en la recta real. Como se mencionó previamente, los ejemplos se usan principalmente para ilustrar propiedades. Como ninguna de las propiedades es justificada o argumentada de ninguna forma, aparte la ilustración con ejemplos (Figura 3), y los alumnos no son informados de que en años posteriores tendrán acceso a las demostraciones correspondientes, esto podría promover que los alumnos desarrollen una dependencia del razonamiento matemático inductivo: se desarrolla la idea incorrecta de que una propiedad queda justificada a través de la verificación de algunos ejemplos, desarrollando así una idea de la demostración próxima al "empirismo ingenuo" identificado por Balacheff (1987). Podemos ver aquí también que la razón de ser de estas propiedades está ausente y éstas sirven apenas para resolver tareas que han sido dadas para practicar estas mismas propiedades (como se muestra en la sección siguiente); se escoge entonces *institucionalizar* estas propiedades como *reglas transparentes* (Barbé et al., 2005, p. 250). Vemos también elementos de lo que Bronner (1997) identificó como segunda estrategia para reducir el vacío didáctico institucional: poner el énfasis en reglas para hacer cálculos con estos números. 7 de los libros enuncian explícitamente la densidad[6] de los números racionales como "entre cualesquier dos números racionales hay siempre otro número racional", calculando este otro número usando la media aritmética de los dos racionales dados. 3 de estos 7 libros también usan la media aritmética para ilustrar la propiedad más general: "entre dos números reales siempre existe otro número real". Sin embargo, el término "densidad" no se usa explícitamente en ninguno de los libros. Los resultados de investigación sobre las dificultades de los alumnos con la cardinalidad y las propiedades topológicas (mencionados en la revisión de literatura) parecen no ser tomados en cuenta por los libros analizados.

5.2. Fase 2: cartografía de tareas

En total, se analizaron 184 tareas, repartidas en 156 en los libros de *ensino fundamental* (F, con una media de 17,33 tareas por libro) y 28 en los libros de *ensino médio* (M, con una media de 5,6 tareas por libro). Se identificaron seis tipos de tareas (T_{CR}, T_{FR}, T_{ENT}, T_{AA}, T_{ORD}, T_{RR}), que aparecen en secciones con títulos "ejercicios resueltos", "ejercicios propuestos", "ejercicios complementarios" y "tests". La Tabla 3 muestra la distribución de las tareas identificadas en los libros de la muestra. Nótese que hay menos tareas relativas a la introducción de los reales en los libros del *ensino médio*. Esto es debido a que, en los programas brasileños, los números reales deben ser introducidos en los últimos años del *ensino fundamental*.

La introducción de los números reales e irracionales se puede estructurar en tres OMs locales (Figura 4). En primer lugar, las tareas de tipo T_{APP}, T_{ENT}, T_{ORD} y T_{RR} están apoyadas en discursos tecnológico-teóricos similares que generan una OM a la que llamamos OM_1 – *topología de* $\mathbb{R}$. Sin embargo, este discurso y en qué sentido justifica las técnicas utilizadas para resolver las tareas, no está explícito en los libros. La caracterizamos como una organización incompleta, en la que el foco se sitúa en el bloque práctico. En segundo lugar, las tareas de tipo T_{CR} crean otra OM, que llamaremos OM_2 – *clasificación*. Esta OM se enfoca en el problema de definir números reales e irracionales, así como en identificar números dados como pertenecientes o no a estas categorías. El discurso matemático no viene acompañado de ninguna práctica matemática dentro de la experiencia de los alumnos y los pocos elementos teóricos presentados (las definiciones y las propiedades) parecen limitados a una función normativa. Se podría decir que estas tareas tienen la utilidad de practicar las definiciones y propiedades, pero no resuelven ningún otro problema de por sí. Finalmente, las tareas de tipo T_{FR}, contrariamente al tipo anterior, definen la OM_3 – *determinar fracciones*, cuyo único propósito parece ser encontrar fracciones equivalentes a una notación decimal dada, sin desarrollar ninguna razón de ser o propósito para este tipo de tarea, además de no desarrollar ningún discurso que justifique el conjunto de reglas dadas para resolverlas. Se pierde así una oportunidad de desarrollar argumentos en MO_3 que podrían ayudar a justificar algunos elementos teóricos de MO_2 y que podrían ser útiles para iniciar una discusión sobre la equivalencia de las definiciones D_A y D_B. Además, estas tres OMs se presentan desconectadas y los elementos matemáticos comunes que permitirían relacionarlas están ausentes de los libros. Las consecuencias de aprender este contenido de forma tan desconectada podrían tener impacto en el aprendizaje de otros contenidos, como límites de funciones, que podrían ser organizados en OMs alrededor de la teoría de números reales (véase Barbé et al., 2005, p. 243).

	Tipos de tareas						
Manual	T_{CR}	T_{FR}	T_{ENT}	T_{APP}	T_{ORD}	T_{RR}	**Total**
F1	13	0	5	14	1	3	36
F2	0	0	1	3	0	3	7
F3	5	0	2	8	0	1	16
F4	6	2	0	0	0	0	8
F5	5	2	1	7	8	3	26
F6	5	0	0	12	1	3	21
F7	3	0	3	2	0	1	9
F8	5	2	1	6	1	1	16
F9	3	1	1	8	1	3	17
M1	1	0	0	0	0	0	1
M2	1	1	0	0	1	1	4
M3	2	0	0	0	0	0	2
M4	2	1	3	0	0	2	8
M5	1	2	3	3	1	3	13
Media F	5,00	0,78	1,56	6,67	1,33	2,00	17,33
Media M	1,40	0,80	1,20	0,60	0,40	1,20	5,6

Tabla 3. Distribución de las diferentes tareas en los manuales de la muestra

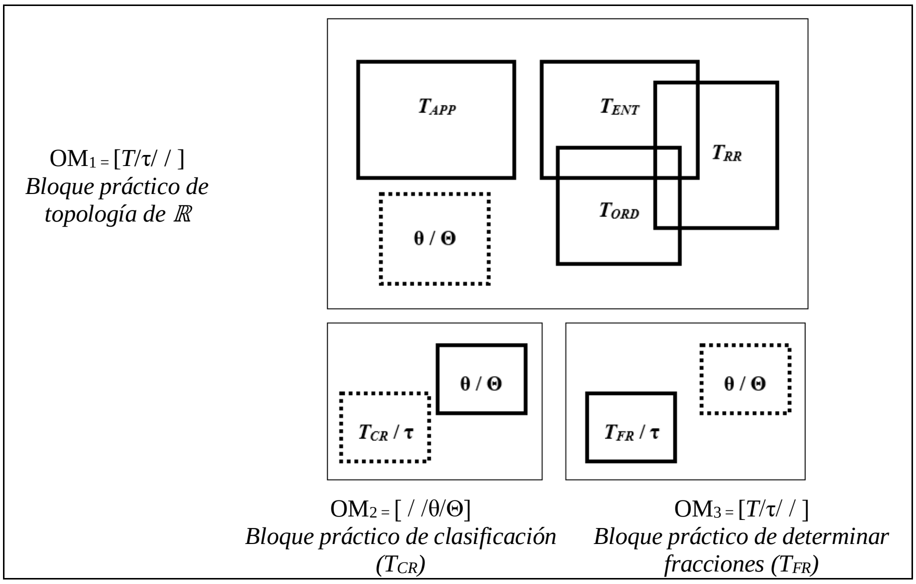


Figura 4. Cartografía del *conocimiento a ser enseñado* sobre los números reales. Los cuadrados en línea discontinua indican los elementos que son más implícitos, o ausentes, en las OMs.

Para ilustrar los análisis que nos llevaron a identificar las tres OMs descritas encima, procedemos a dar detalles de dos ejemplos de tarea de las categorías T_{CR} y T_{APP}. Escogemos tareas de estas categorías porque: 1) se encuentran entre los tipos de tarea más frecuentes (Tabla 3); 2) creemos que ilustran claramente nuestro argumento de que las OMs presentes en los manuales no son completas. Una ilustración completa de los análisis para todos los tipos de tareas se puede encontrar en Souto (2010).

Identificar un número dado como irracional (tarea de la categoría T_{CR})

Sea la tarea $t_{CR\text{-}1}$: “decidir si $5 + \sqrt{3}$ es racional o irracional”. Esta tarea se resuelve usando la técnica $\tau_{CR\text{-}1}$: “si el número viene dado por una suma, identificar si los dos términos son racionales o no”. Los alumnos deben identificar visualmente que $\sqrt{3}$ es irracional y 5 es racional, por lo que el número dado es irracional. Sin embargo, esta técnica se apoya en dos discursos (“la suma de un racional y un irracional es irracional” y “$\sqrt{3}$ es irracional”) que no están justificados (y, a veces, ni siquiera están enunciados) en los libros que proponen esta tarea específica. En general, la OM local de este tipo de tareas usa las siguientes propiedades:

- Utilización de la definición de irracional (D_A o D_B).
- Utilización del hecho (dado como obvio y no justificado) que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y π son irracionales.
- Reconocimiento de algunas propiedades relativas al cierre de operaciones: “la/el suma/resta/producto/cociente (con el divisor diferente de cero) de cualesquier dos números racionales es un número racional”, “la/el suma/resta/producto/cociente de un racional y un irracional es un número irracional”.

Como se dijo anteriormente, esta OM_2 utiliza un discurso matemático estándar que no viene acompañado de ninguna práctica dentro de la experiencia de los alumnos y las tareas parecen tener el único propósito de simplemente memorizar el discurso matemático, que se introduce como un conjunto de *reglas transparentes*. Además, las definiciones dadas asumen la existencia de los irracionales y la irracionalidad de ciertos números (fase 1). Todos los libros de la muestra utilizan las propiedades vistas anteriormente como discurso para justificar las técnicas usadas para resolver este tipo de tareas. Sin embargo, 12 de los libros usan estas propiedades de forma tácita, sin enunciarlas claramente. Los otros dos libros (F2, M4) presentan enunciados para las propiedades, pero no ofrecen ningún tipo de argumento para su validez.

En consecuencia, el alumno podrá ser capaz de clasificar algunos números como irracionales, pero sin saber, sin embargo, qué significa ser irracional (más allá de “no ser racional”), ni ser capaz de explicar *por qué* estos números son irracionales (además de “porque apliqué esta regla”). Así, la mayoría de las tareas de esta OM aparecen por razones que buscan más bien establecer el discurso detrás de las decisiones para clasificar un número como irracional o no, pero este discurso no está justificado de ninguna manera.

Evaluar una expresión simbólica usando una aproximación (tarea de la categoría T_{APP})

Consideremos la tarea de la Figura 5:

Figura 5. Tarea pidiendo aproximar la longitud de una rueda, del libro F2. “El radio de una bicicleta[7] mide 30 cm. a) ¿Cuál es medida de cada rueda de esa bicicleta? (Tome $\pi = 3{,}14$.) b) ¿Cuántas vueltas dará cada rueda de esa bicicleta por cada 1 km?”.

La técnica para resolver la primera parte de esta tarea requiere conocer la fórmula para calcular la longitud de una circunferencia ($2\pi r$) y substituir r por 30 cm y π por 3,14. Esta técnica está basada en el discurso de que la longitud de una circunferencia viene dada por la expresión $2\pi r$ (que no está justificado, ni razonado, en los manuales). Nótese que se pide a los alumnos que usen 3,14 como valor de π, sin mencionar que se va a trabajar con una aproximación y no con el número irracional en sí.

Este tipo de tarea a menudo implica trabajar con elementos de la circunferencia: calcular el radio, dada la longitud o el área; calcular la longitud o el área, dado el radio… Las técnicas implicadas se reducen a simplemente evaluar por substitución y los discursos explícitos asociados son las reglas usuales de manipulación de expresiones numéricas y simbólicas (implícitamente, se supone que el alumno tiene conocimiento previo sobre las representaciones decimales y sobre resultados matemáticos cuando hay aproximaciones implicadas). Estas tareas generalmente incluyen instrucciones tales como “considere $\pi = 3{,}14$” y se da una respuesta sin ningún aviso de que la tarea lleva a una aproximación de la auténtica respuesta, puesto que diferentes aproximaciones de π podrían llevar a diferentes valores como respuesta. Los libros de la muestra usan un abanico de otros ejemplos, tales como $8 + \sqrt{2}$, $\pi + \sqrt{2}$

o 3π, en los cuales se da una aproximación fija de los números implicados y se pide el valor de un cálculo implicando a estos números.

La solución propuesta para estas tareas, que representan números irracionales con un número finito de decimales (sin ningún aviso de que se trata de una aproximación), puede entrar en conflicto con la noción (introducida principalmente a través de D_B) de número irracional como un número con una representación decimal infinita y no periódica, una noción promovida por los mismos libros. Estos aspectos pueden estar relacionados con algunos de los fenómenos descritos por Bronner (1997), tales como la dificultad de pasar de números con una cantidad finita de cifras decimales hacia números con una cantidad infinita de estas cifras, o conducir a ver los irracionales como números "que no son exactos" (p. 69).

En este tipo de tarea, el *bloque práctico* [T/τ] está constituido por los procesos habituales de evaluación y cálculo de expresiones; sin embargo, una vez más, el *bloque teórico* [θ/Θ] incluye elementos que no son explícitos. Este énfasis excesivo en hacer cálculos parece reflejar uno de los resultados de Bronner (1997) y podría ser una de las estrategias usadas para reducir el vacío didáctico institucional.

De manera similar a Bronner (1997), nuestros análisis, ilustrados en los dos ejemplos anteriores, muestran que el enfoque predominante para introducir los números irracionales en estos libros es algebraico, disociado de la medida de objetos. Nuestros resultados también coinciden con los de Lithner (2004), quien afirmó que las tareas en las que los estudiantes apenas necesitan reproducir técnicas previamente ejemplificadas son predominantes en los libros que analizó.

6. Comentarios finales

Las principales contribuciones de nuestros análisis conciernen: 1) el uso de un enfoque institucional para analizar la introducción de los números irracionales y reales en los libros de texto y las posibles consecuencias de las elecciones institucionales; 2) los resultados sobre la organización de contenido dominante en los libros de texto de nuestra muestra.

Con respecto a la primera contribución, consideramos que el uso del enfoque de Chevallard (1999) demuestra ser útil y productivo en el análisis de contenido y de su organización en libros de texto; además, este enfoque ofrece herramientas concretas para analizar prácticas. La mayoría de la literatura disponible sobre el aprendizaje de los números reales sigue enfoques cognitivos (centrándose, por ejemplo, en las dificultades de los alumnos para aprender los números reales). Sin embargo, para analizar cómo sucede la enseñanza de los números reales, las herramientas de la TAD permiten identificar, en este análisis de una amplia muestra (que es inhabitual en la literatura), algunas regularidades en la forma en que los libros de texto parecen organizar los contenidos, así como caracterizar la OM dominante para la enseñanza de los números reales. Nuestros resultados, que van en la misma dirección que los de Bronner (1997), indican que las definiciones, propiedades y ejemplos se articulan más bien como listas de cosas que aprender (o memorizar), sin promover el desarrollo de discursos que justifiquen las técnicas utilizadas para resolver las tareas propuestas y sin establecer conexiones entre las tres OMs locales propuestas. La institución EMS parece favorecer, en los libros de texto, organizaciones que se centran principalmente en el bloque *práctico*. Esto va en la dirección de los resultados de Barbé et al. (2005) sobre la enseñanza de los límites. Este tipo de organización del contenido puede tener importantes consecuencias para la enseñanza, pues como Barbé et al. (2005) postulan:

> …si el conocimiento a ser enseñado está formado de una colección de organizaciones matemáticas puntuales que no están relacionadas unas con otras a través de un discurso tecnológico-teórico operativo, entonces las organizaciones didácticas espontáneas correspondientes que el maestro puede usar no serán capaces de integrar verdaderamente los seis momentos del proceso didáctico[8] (p. 261).

Con respecto a la segunda contribución, el enfoque institucional nos ha permitido ver que las dificultades identificadas por la investigación anterior no son, al menos explícitamente, tomadas en cuenta por los libros de texto brasileños analizados. Nos parece verosímil suponer que estos resultados se pueden aplicar a libros de texto en otros contextos educativos y esperamos que nuestro enfoque sea utilizado por otros para explorar esta conjetura. Nuestros análisis muestran que las praxeologías probablemente generadas por estos libros son bastante lejanas, tanto a nivel práctico como teórico, de la matemática académica. En particular, los libros de texto no presentan definiciones coherentes y operacionales de los números irracionales, en un lenguaje compatible con el nivel secundario; hay muchas suposiciones implícitas y la justificación de propiedades se basa exclusivamente en ejemplos. Además, la necesidad de introducir estos "nuevos números" no se discute explícitamente y no se presentan dentro de un contexto significativo o con respecto a su utilidad como herramienta matemática. En general, las tareas en las que aparecen estos números no favorecen el desarrollo de un discurso coherente o de una teoría matemática sólida. Se enfatiza las propiedades de las operaciones en detrimento de aspectos relativos a la estructura de la recta real y sin tomar en cuenta resultados de investigación didáctica sobre dificultades en el aprendizaje de los números reales e irracionales y algunas de sus propiedades aritméticas y topológicas. Esta situación resuena con los resultados de Bronner (1997), quien identificó un énfasis acentuado en la aplicación de reglas, pero en ausencia del problema de la medida. En resumen, la mera presentación de un conjunto de reglas sin justificar y de procedimientos es poco probable que contribuya al aprendizaje de los números reales. Sin embargo, ésta parece ser la elección de los autores de los libros de texto analizados para evitar el formalismo matemático o para reducir el vacío didáctico institucional identificado por Bronner (1997). Caracterizamos las praxeologías en nuestra muestra como incompletas y enfocándose principalmente en el *bloque práctico* (que coincide también con resultados de Winsløw, 2006). En los términos de Winsløw, sería difícil esperar que los estudiantes completen una transición hacia el pensamiento matemático formal si no han desarrollado explicaciones para algunas técnicas.

El análisis a través de la lente de la TAD indica que la organización existente para introducir los números reales no hace una contribución significativa a la cultura matemática o a las habilidades deseables de los alumnos al final de la escuela secundaria; tampoco prepara a aquéllos que recibirán cursos de matemáticas más avanzadas en la universidad. Estas implicaciones son importantes, si tomamos en cuenta que los libros de texto representan un recurso fundamental para los maestros y que juegan un papel central en sus decisiones pedagógicas y didácticas (Howson, 1995; Reys & Reys, 2007; Sträßer, 2009).

Bibliografía

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 147-176.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics, 59,* 235-268.

Bergé, A. (2008). Students' perception of the completeness property of the set of real numbers. Presented at the *11th International Conference on Mathematics Education* (ICME11), Monterrey (Mexico). Available at http://tsg.icme11.org/tsg/show/18

Bronner, A. (1997). Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée ». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17* (3), 55-80.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2), 221-266.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational number in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics, 29* (1), 29-44.

Giraldo, V., González-Martín, A.S., & Santos, F.L. (2009). An analysis of the introduction of the notion of continuity in undergraduate textbooks in Brazil. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds)., *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 81-88). Thessaloniki, Greece: Aristotle University of Thessaloniki.

González-Martín, A.S., Giraldo, V., & Souto (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education, 15*(3), 230-248.

González-Martín, A.S., Nardi, E., & Biza, I. (2011). Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42* (5), 565-589.

Howson, G. (1995). *Mathematics textbooks: A comparative study of grade 8 texts* (Vol. 3). Vancouver: Pacific Educational.

Katz, V.J. (1992). *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: Harper Collins.

Law, N., Pelgrum, W.J., & Plomp, T. (2008). *Pedagogy and ICT use in schools around the world: Findings from the IEA SITES 2006 study*. Hong Kong: CERC-Springer.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 405-427.

Raman, M. (2004). Epistemological messages conveyed by three high-school and college mathematics textbooks. *Journal of Mathematical Behavior, 24* (4), 389-404.

Reys, B.J., & Reys, R.E. (2007). An agent of change: NSF sponsored mathematics curriculum development. *NCSM Journal of Mathematics Education Leadership, 10* (1), 58-64.

Robinet, J. (1986). Les réels: quels modèles en ont les élèves? *Educational Studies in Mathematics, 17*, 359-386.

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 65* (1), 49-76.

Soares, E.F.E., Ferreira, M.C.C., & Moreira, P.C. (1999). Números reais: concepções dos licenciandos e formação Matemática na licenciatura. *Zetetiké, 7* (12), 95-117.

Souto. A. M. (2010). *Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica.* Master Thesis, Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Sträßer, R. (2009). Instruments for learning and teaching mathematics. An attempt to theorise about the role of textbooks, computers and other artefacts to teach and learn mathematics. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 67-81). Thessaloniki, Greece: Aristotle University of Thessaloniki.

Stylianides, G.J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 11* (4), 258-288.

Wagner, D. (2012). Opening mathematics texts: Resisting the seduction. *Educational Studies in Mathematics, 80* (1-2), 153-169.

Winsløw, C. 2006. Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In R. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Actes de la XIIIème École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 1-12). Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation. In M. Høines & A.B. Fugelstad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 497-504). Bergen, Norway: PME.

Notas.

[1] Este artículo presenta una traducción y actualización del artículo siguiente: González-Martín, A.S., Giraldo, V., & Souto (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education, 15*(3), 230-248. doi: 10.1080/14794802.2013.803778.

[2] Por supuesto, los números irracionales algebraicos se pueden introducir a través de la solución a alguna ecuación polinomial. Como estos números no son transcendentes, su necesidad se puede ver como motivación para ir más allá de los racionales. Pero no son suficientes para justificar la necesidad del conjunto de los reales como estructura matemática.

[3] En este artículo, todas las citaciones originales en inglés han sido traducidas de forma libre al español por el autor.

[4] De "teckne" y "logos": discurso sobre la técnica. Para no confundir este término con el uso habitual de "tecnología", en este artículo se usa en general el término "discurso".

[5] Todas las citaciones originales en portugués han sido traducidas al español libremente por el autor.

[6] Hablamos de densidad en el sentido siguiente (presente en los libros analizados): un espacio métrico (E, d) se dice denso si para cualquier elemento $x \in E$, y para cada entorno U de x, existe un punto $y \in U$, $y \neq x$.

[7] En el original, la expresión "uma bicicleta aro 26" quiere decir que la parte metálica de la rueda tiene 26 pulgadas de diámetro (unos 66 centímetros). Esa medida ayuda a los usuarios a escoger la bicicleta más adecuada según la altura de la persona.

[8] Brevemente, parafraseando a Barbé et al. (2005, pp. 238-239), estos seis momentos son: el primer encuentro con la OM en cuestión; la exploración del tipo de tareas T y la elaboración de una técnica τ relativa a estas tareas; la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a τ; el trabajo técnico, que al mismo tiempo intenta mejorar la técnica haciendo más potente y confiable, además de desarrollar el dominio de su uso; la institucionalización, cuyo propósito es identificar cuál es exactamente el conocimiento matemático específico a aprender; la evaluación de lo que se aprendió.