NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 105, noviembre de 2020, páginas 201-215

Tres acertijos sobre ventas enigmáticas: Posibles desafíos matemáticos para los estudiantes talentosos

Josip Slisko (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México)

Resumen

Los acertijos cuantitativos son una parte importante de la matemática recreativa que tiene una historia larga. Varios autores sugieren el uso de acertijos en la enseñanza de las matemáticas con diferentes propósitos y efectos en el aprendizaje de los estudiantes. Su presencia se nota, también, en los libros escritos para los futuros docentes de matemáticas. Actualmente el "aprendizaje basado en acertijos" ("puzzle-based learning") está ganando popularidad en la educación de ingenieros. Adicionalmente, los acertijos matemáticos se usan frecuentemente en las entrevistas de trabajo por las compañías más reconocidas. En este escrito se presentan tres acertijos sobre ventas enigmáticas formulados por el matemático inglés Henry Ernest Dudeney. Se desarrollan detalladamente los caminos hacia las soluciones, las cuales faltaban en los escritos de Dudeney. Se proponen puntos claves de una metodología para usar estos tres acertijos como desafíos matemáticos, con crecientes grados de dificultad, para los estudiantes talentosos.

Palabras clave

Matemática recreativa, acertijos en educación matemática, Test de reflexión cognitiva, Dudeney, alumnos talentosos, aprendizaje autorregulado.

Abstract

Quantitative puzzles are an important part of recreational mathematics that has a long history. Various authors suggest use of puzzles in mathematics teaching with different objectives and effects in students' learning. Their presence can be noted in the books written for future mathematics teachers, too. Currently "puzzle-based learning" is gaining popularity in engineering education. In addition, most famous companies employ frequently mathematical puzzles in their job. Three puzzles about puzzling sales, formulated by English mathematician Henry Ernest Dudeney, are presented in this article. The paths to their solutions, missing in Dudeney's writings, are developed in details. Key points of a methodology are proposed for using these three puzzles as mathematical challenges, with increasing degrees of difficulty, for talented students.

Keywords

Recreational mathematics, mathematical puzzles in teaching, Cognitive Reflection Test, Dudeney, gifted students, self-regulated learning.

1. Introducción

Los acertijos y enigmas han sido parte de la cultura humana desde sus inicios. Muchos piensan que solo tienen una función de diversión, como buenos chistes o canciones adecuadas para embellecer el tiempo libre. Sin embargo, su gran popularidad y longevidad demuestran que expresan una inclinación humana más profunda, casi instintiva, hacia los misterios y lo desconocido (Danesi, 2002). Además de los acertijos cualitativos que desafían el ingenio conceptual humano, hay acertijos cuantitativos que son mucho más que solo diversión y cuya solución, además de una comprensión adecuada de su esencia, requiere cierto conocimiento matemático. Estos acertijos matemáticos son la base fundamental de las "matemáticas recreativas". Existe una bibliografía impresionante de libros que se han publicado en esta área a lo largo de los siglos (Shaaf, 1955).

A finales del siglo VIII, Alcuin incluyó, junto con problemas prácticos, algunos acertijos cuantitativos sin aplicación inmediata en la primera colección de tareas para la educación matemática de los jóvenes (Hadley & Singmaster, 1992). Lo mismo hizo Fibonacci en su "Liber abaci" en el inicio del siglo XIII (Siegler, 2002). Esta simbiosis inicial más tarde dejó de existir, ya que los libros de texto de matemáticas (que siguen el contenido y los requisitos curriculares) y los libros de matemáticas recreativas (que siguen los intereses, la creatividad y los criterios del autor) se alejaron gradualmente para convertirse en dos áreas de publicación separadas para diferentes grupos de lectores y usuarios. Martin Gardner, una leyenda indiscutible en la formulación y popularización de divertidos rompecabezas y juegos matemáticos a través de una columna regular en la prestigiosa revista Scientific American, escribió lo siguiente:

> "…Las matemáticas recreativas proporcionan el mejor camino para captar el interés de los jóvenes durante la enseñanza de la matemática elemental. Un buen rompecabezas matemático, una paradoja o un truco de apariencia mágica pueden estimular mucho más la imaginación de los niños que las aplicaciones «prácticas», sobre todo cuando estas aplicaciones se encuentran lejanas de las experiencias vividas por ellos." (Gardener, 1985, p. 1).

Aunque Gardner abogaba fuertemente para la presencia de lo lúdico y mágico en la educación matemática, el resultado logrado no fue de su agrado:

> "El Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas, en su revista "Maestro de Matemáticas", a menudo publica artículos sobre temas de entretenimiento, pero la mayoría de los maestros aún ignoran dicho material. Durante 40 años, he hecho todo lo posible para convencer a los maestros que "las matemáticas divertidas" deberían integrarse en el plan de estudios estándar. Deberían presentarse regularmente como una forma de interesar a los jóvenes estudiantes en las maravillas de las matemáticas. Hasta ahora, sin embargo, el movimiento en esa dirección se ha congelado" (Gardner, 1998).

Por suerte, la situación con respecto a la relación entre las matemáticas divertidas y acertijos la educación matemática ha cambiado bastante y ahora se ve mucho mejor que hace 20 o 30 años.

2. Acertijos en la educación matemática, en la educación de ingenieros y en la economía

Cada vez un número mayor de autores sugieren usar los acertijos en la enseñanza de las matemáticas con diferentes propósitos y efectos en el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, Jelle (2017) afirma lo siguiente:

> "La aplicación de acertijos en la enseñanza puede aumentar la motivación, mejorar el dominio de la comprensión, promover los procesos creativos, ampliar la capacidad de participar y resolver desafíos diversos desde varios puntos de vista y, por lo tanto, conducir a la mejora del proceso de aprendizaje y de capacidad de resolución de problemas."

Kurnik (2008) describe las características de las "tareas divertidas" que pueden ayudar a desarrollar el razonamiento lógico y el ingenio, y despertar interés en las matemáticas:

> "1) Las tareas divertidas son miniaturas matemáticas para cuya solución es suficiente el conocimiento más básico de aritmética, álgebra y geometría.
> 2) Las formulaciones de las tareas son simples y comprensibles para todos.
> 3) Los textos están escritos en forma de pequeñas historias ingeniosas de la vida cotidiana.
> 4) Un mayor conocimiento previo matemático no siempre es garantía de una resolución más rápida.
> 5) Los problemas no siempre son fáciles, muchos de ellos requieren un esfuerzo mental considerable, razonamiento lógico y especialmente ingenio para encontrar una manera de resolverlos".

Ben-Chaim y colaboradores (2019) sostienen:

> "La inclusión de acertijos matemáticos, incluso en pequeña medida, en el aula de matemáticas produce un interés considerable entre los estudiantes. Algunos incluso se unen a clases extracurriculares y se vuelven "adictos" a resolver acertijos en matemáticas y otras áreas ...Resolver acertijos fomenta el pensamiento original, la creatividad y el razonamiento intuitivo que a menudo abarca diferentes campos de estudio y la búsqueda de métodos de solución no convencionales. Además, y no menos importante, los acertijos y enigmas matemáticos revelan la riqueza, belleza y sabiduría encarnadas en las matemáticas."

Después de definir generalmente la matemática recreativa como "un tipo de juego que es disfrutable y que requiere pensamiento y habilidades matemáticas para involucrarse", Rowlett y colaboradores (2019) afirman:

> "(La matemática recreativa) ... es accesible para una amplia gama de personas y se puede utilizar de manera efectiva para motivar el compromiso y desarrollar la comprensión de ideas o conceptos matemáticos. La matemática recreativa se puede usar en la educación para involucramiento y para desarrollar habilidades matemáticas, mantener el interés durante la práctica de procedimientos y desafiar y "estirar" a los estudiantes. También puede hacer enlaces transversales, incluso con la historia de las matemáticas."

La presencia de acertijos cuantitativos o "problemas divertidos" se nota, también, en los libros escritos explícitamente para los futuros docentes de matemática.

> "**Problema inicial** Un vendedor ambulante tenía una cesta de manzanas. Sintiéndose generoso un día, regaló la mitad de sus manzanas más una al primer extraño que conoció, la mitad de sus manzanas restantes más una al siguiente extraño que conoció, y la mitad de las manzanas restantes más una al tercer desconocido que conoció. Si el vendedor tenía una manzana para sí mismo, ¿con cuántas manzanas comenzó? (Musser et al., 2014, p. 251).
>
> Mary tenía una canasta de huevos cocidos duros para vender. Primero vendió la mitad de sus huevos más la mitad de un huevo. Luego vendió la mitad de sus huevos y la mitad de un huevo. Lo mismo ocurrió en tercera, cuarta y quinta

> vez. Cuando terminó ya no tenía huevos en su canasta. ¿Cuántos huevos tenía ella cuando comenzó?" (Musser et al., 2014, Problema 30, p. 283).

El problema inicial es una recontextualización simplificada de un problema formulado por Fibonacci en 1202. El problema se refiere a un hombre que entra en un "jardín de placeres" para recolectar manzanas. Para salir debe pasar por siete puertas, dándole a cada guardián en las puertas la mitad de sus manzanas más una y saliendo con una sola manzana (Siegler, 2002, pp. 397-398).

El segundo problema de "venta de huevos" tiene, también, sus orígenes históricos (Ozanam, 1725; Ozanam, 1778). El énfasis en los "huevos cocidos duros" se puede interpretar como un intento de eliminar el "freno mental" que muchas personas activan pensando, con justa razón, que no existen las mitades de huevos frescos.

Tal problema, en que se mencionan varias ventas de "medio huevo", se volvió uno de los más populares acertijos matemáticos de los últimos siglos. En el siglo XIX uno encuentra, por ejemplo, las formulaciones "Country-woman end eggs" (Williams, 1844, p. 301) o "The market-woman and her eggs" (Hoffman, 1893, p. 173). En el siglo XX hay varios autores que usan el acertijo sin darle un nombre específico (Licks,1917, p. 31; Northrop, 1944, p. 14). En el siglo XXI el internet se volvió el principal promotor de este acertijo aunque, también, su popularidad se mantiene en los libros impresos a pesar de aparecer sin nombre (Botermans & Tichler, 2005, p. 97) o con un nombre particular "Selling eggs" (Devi, 2008, p. 79).

En el año 2004, Britton y Tayeh propusieron en la revista pedagógica "Teaching Children Mathematics" el problema "Dilema del huevo" y sus posibles extensiones:

> **Problema** Chris tiene algunos huevos para vender y María, Ai-Ling y Jermaine quieren comprarlos. Chris vende la mitad de los huevos más la mitad de un huevo a María, luego vende la mitad de los huevos restantes más la mitad de un huevo a Ai-Ling, y finalmente vende la mitad de los huevos restantes más la mitad de un huevo a Jermaine. Al final de las tres ventas, Chris se quedó sin huevos. Lo extraño es que Chris nunca tuvo que romper un huevo. ¿Con cuántos huevos comenzó Chris? ¿Existe solo una solución? Si es así, explica por qué.
>
> **Extensiones** ¿Con cuántos huevos habría comenzado Chris si hubiera ocurrido el mismo escenario con diferentes números de personas comprando los huevos? Por ejemplo, ¿qué pasaría si hubiera habido cuatro compradores? ¿Cinco compradores? ¿Puedes encontrar un patrón que determine la cantidad de huevos para cualquier cantidad de compradores? (Britton & Tayeh, 2004).

Más adelante este artículo se va a enfocar en tres acertijos, formulados por Henry Dudeney, sobre ventas aún más enigmáticas y con una aumentada demanda matemática.

2.1. Acertijos en la educación de ingenieros y en la economía

Los acertijos cuantitativos, visuales, lógicos o manipuladores individuales se han utilizado durante mucho tiempo como tareas útiles en el estudio de los procesos cognitivos (Allport, 1997) y en libros que enseñan estrategias generales para mejorar el pensamiento, el aprendizaje y la creatividad (Bransford & Stein, 1993). Sin embargo, los libros y artículos sobre cómo usar sistemáticamente los acertijos para aprender el pensamiento crítico y las competencias de resolución de problemas han comenzado a aparecer recientemente en la educación de los ingenieros (Michalewicz & Michalewicz, 2008; Thomas et al., 2013; Meyer et al., 2014).

Se considera que el aprendizaje basado en rompecabezas es efectivo en el desarrollo sistemático y oportuno de tales habilidades por las siguientes razones:

> “Los acertijos son instructivos porque ilustran reglas útiles (y poderosas) para resolver problemas de una manera muy divertida.
> Los acertijos son fascinantes y estimulantes.
> Contrariamente a muchos problemas de libros de texto, los rompecabezas no están "unidos" a ningún capítulo (como es el caso de los problemas del mundo real).
> Es posible hablar sobre diferentes técnicas (por ejemplo, simulación y optimización), disciplinas (como la probabilidad y las estadísticas) o áreas de aplicación (por ejemplo, programación y finanzas) e ilustrar su significado discutiendo algunos rompecabezas simples. Al mismo tiempo, los estudiantes son conscientes de que muchas de las conclusiones son aplicables en el contexto más amplio de la resolución de problemas del mundo real ". (Michalewicz y Michalewicz, 2008, p. XII)

Es importante enfatizar que en los últimos años Microsoft, Google y otras compañías de alta tecnología, en sus extremadamente extenuantes entrevistas laborales, han utilizado una gran cantidad de acertijos lógicos y matemáticos y "preguntas imposibles" (Poundstone, 2003; Kador, 2005; Poundstone, 2012). Las "entrevistas con acertijos" se han convertido en una nueva tendencia. Desde Wall Street hasta Silicon Valley, los empleadores utilizan preguntas difíciles para evaluar la inteligencia, la imaginación y la capacidad de resolver problemas de un candidato. Ésas son las habilidades esenciales para la supervivencia y el éxito en el mercado global competitivo de hoy.

Los gerentes que buscan a los empleados más talentosos necesitan aprender cómo incorporar acertijos buenos (y desconocidos) en las conversaciones que encabezarán en la búsqueda de los mejores candidatos. Los solicitantes de empleo deben descubrir cómo lidiar con los problemas que "explotan el cerebro" y cómo obtener una ventaja que podría conducir a un trabajo de por vida. John Kador, un especialista reconocido en las preguntas para las entrevistas de trabajo, bien describe las razones económicas de tal estrategia:

> “El uso de rompecabezas y acertijos tiene sentido en las empresas que centran los esfuerzos de reclutamiento más en lo que los candidatos pueden hacer en el futuro que en lo que han hecho en el pasado. Estas compañías entienden que en el acelerado mundo de los negocios globales de hoy en día, las habilidades específicas son de uso limitado porque la tecnología cambia muy rápidamente. Lo que realmente se necesita, según los entrevistadores, son candidatos curiosos, observadores e ingeniosos que acojan los nuevos desafíos, demuestren agilidad mental en condiciones estresantes, aprendan rápidamente, defiendan su pensamiento y demuestren entusiasmo por las tareas imposibles.” (Kador, 2005, p. VI).

Cabe destacar que el "Test de Reflexión Cognitiva" (Frederick, 2005), usado frecuentemente para detectar a los pensadores "rápidos" y "lentos" (Kahneman, 2012) entre los estudiantes de ciencias económicas, consiste de tres famosos acertijos matemáticos. Se pueden consultar, también, la versión castellana de tal test y los resultados de una aplicación piloto (López Puga, 2012). Algunas investigaciones indican que los pensadores "rápidos" (los que dan tres respuestas incorrectas en el test) son los que se equivocan con mayor frecuencia en las tareas económicas que requieren un procesamiento adecuado de información y toma de decisiones (Toplak, West & Stanovich, 2011).

Todas estas tendencias educativas y los hechos económicos requieren aumentar la presencia de los acertijos matemáticos en la enseñanza de las matemáticas, mediante el desarrollo, la implementación y la evaluación de los nuevos diseños de sus usos didácticos.

3. Tres acertijos sobre ventas enigmáticas formulados por Dudeney

Henry Ernest Dudeney (Figura 1) es considerado como el más destacado autor británico de acertijos, tanto por la cantidad como por la calidad de sus productos. El primer escrito (¡con remuneración!), lo publicó a la edad de 9 años en una revista infantil.

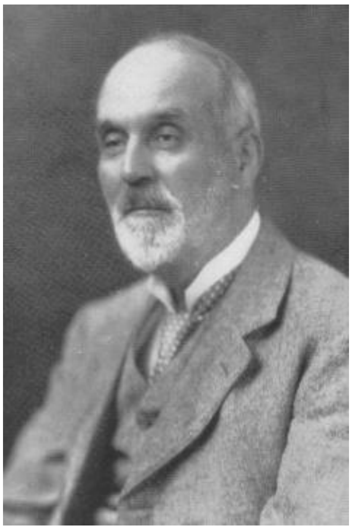

Figura 1. Henry Ernest Dudeney (10 de abril de 1857 – 24 de abril de 1930).

El espectro de sus intereses fue amplio, desde los rompecabezas matemáticos hasta los problemas de ajedrez y juegos de palabras en los cuales propuso nuevas categorías. Sus escritos primero fueron publicados en revistas y periódicos: *The Strand Magazine*, *Cassell's Magazine*, *The Queen*, *Tit-Bits* o *The Weekly Dispatch*. Posteriormente, los mejores acertijos y juegos de palabras fueron compilados en los libros "*The Canterbury puzzles and other curious problems*" (1907), "*Amusements in Mathematics*" (1917) y "*Modern puzzles and how to solve them"(1926).*

Dudeney tuvo interés, también, en las ventas enigmáticas y publicó su primer acertijo relacionado con la venta de gansos en la revista The Weekly Dispatch en el año 1897. Lo repite reformulado en el año 1907 en el libro "The Canterbury puzzles" y lo acompaña con un segundo acertijo, matemáticamente más complicado y relacionado con la venta de huevos. El tercer acertijo también se refiere a la venta de huevos, aunque su dificultad matemática disminuye relativamente. El acertijo es publicado en su tercer libro en 1926. En este artículo no se sigue un orden cronológico sino que se empieza con el acertijo menos complicado y se concluye con el acertijo más desafiante.

3.1. Los gansos de Navidad

El primer acertijo es el menos desafiante porqué los estudiantes talentosos lo podrían resolver siguiendo los dos algoritmos conocidos. Veamos cómo lo formuló Dudeney:

> “55. Los Gansos de Navidad
> El señor Hembrow, de Weston Zoyland — donde sea que eso se encuentre — propuso el siguiente acertijo aritmético, del cual probablemente han derivado muchos acertijos modernos bastante similares:
> El Granjero Rouse envió a su empleado al mercado con un lote de gansos, diciéndole que podía vender todos o algunos de ellos, según estimara mejor, pues estaba seguro de que el hombre haría un buen negocio. Este es el informe que Jabez dio, aunque lo he despojado del viejo dialecto, que podría confundir a los lectores de una forma no deseada: “Bien, primero vendí la mitad del lote más medio ganso al Sr. Jasper Tyler; luego vendí al Granjero Avent un tercio del resto más un tercio de ganso; luego vendí un cuarto de lo que quedaba más tres cuartos de ganso a la Comadre Foster; y cuando volvía camino a casa, ¿con quién me topé sino con Ned Collier?; así que tomamos un jarro de sidra juntos en el Granero de Cebada, donde le vendí exactamente un quinto de lo que me quedaba, y le di un quinto de ganso extra para la patrona. De estos diecinueve que traje de vuelta, no pude deshacerme a ningún precio." Pues bien, ¿cuántos gansos mandó el Granjero Rouse al mercado? Mis lectores sensibles podrán sentirse aliviados al saber que ningún ganso fue dividido ni sufrió ningún tipo de inconvenientes a causa de la venta.” (Dudeney, 1988, pp. 78-79)

Dudeney ofreció a los lectores la siguiente solución:

> “55. Los Gansos de Navidad
> El Granjero Rouse envió exactamente 101 gansos al mercado. Jabez vendió primero la mitad del lote y medio ganso más (es decir 50 1⁄2 + 1⁄2, o 51 gansos, quedando 50) al Sr. Jasper Tyler; luego le vendió al Granjero Avent un tercio del remanente más un tercio de ganso (es decir, 16 2⁄3 + 1⁄3, o 17 gansos, restando 33); luego vendió a la Comadre Foster un cuarto de lo que quedaba más tres cuartos de ganso (es decir, 81⁄4 + 3⁄4, o 9 gansos, quedando 24); después vendió a Ned Collier un quinto del resto, y le regaló un quinto de ganso “para la patrona” (o sea, 4 4⁄5 + 1⁄5 o 5 gansos, quedando 19). Entonces llevó de vuelta a su amo estos 19 gansos. (Dudeney, 1988, p. 209).

Es fácil notar que Dudeney solamente presenta la solución y demuestra aritméticamente que es correcta. Como pasa en muchos acertijos (los dos siguientes no son excepción), no se revela ni el camino

P R O B L E M A S

completo hacia la solución ni se da una sugerencia orientadora para los que quieren llegar a la solución a través de sus propios intentos. No queda de otra más que presentar los dos caminos posibles para llegar la solución dada por Dudeney.

Solución "trabajando hacia atrás"

El número de gansos antes de la cuarta venta N_4 satisface la siguiente ecuación:

$$N_4 - \frac{N_4}{5} - \frac{1}{5} = 19$$

Multiplicando por 5, se obtiene:

$$5N_4 - N_4 - 1 = 95$$

$$4N_4 = 96$$

Entonces, el número de gansos antes de la cuarta venta fue $N_4 = 24$.

El número de gansos antes de la tercera venta N_3 satisface la siguiente ecuación:

$$N_3 - \frac{N_3}{4} - \frac{3}{4} = 24$$

Multiplicando por 4, se obtiene:

$$4N_4 - N_4 - 3 = 96$$

Resolviendo la ecuación, se tiene que el número de gansos antes de la tercera venta es $N_3 = 33$.

El número de gansos antes de la segunda venta N_2 satisface la siguente ecuación:

$$N_2 - \frac{N_2}{3} - \frac{1}{3} = 33$$

Repetiendo los pasos anteriores, se obtiene que el número de gansos antes de la segunda venta es $N_2 = 50$.

El número de gansos antes de la primera venta N_1 satisface la siguente ecuación:

$$N_1 - \frac{N_1}{2} - \frac{1}{2} = 50$$

De esta ecuación, el número de gansos antes de la primera venta (o el número de gansos llevados al mercado) fue $N_1 = 101$.

Trabajando desde inicio

Supangamos que el número inicial de los gansos era x. El número de gansos que se venden y que quedan en cada venta se pueden presentar en la Tabla 1:

Número de venta	El número de gansos que venden	El número de gansos que quedan
Primera	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$	$x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}$
Segunda	$\frac{x-1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{x-1+2}{6}=\frac{x+1}{6}$	$\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{6}=\frac{3x-3-x-1}{6}=\frac{2x-4}{6}=\frac{x-2}{3}$
Tercera	$\frac{x-2}{12}+\frac{3}{4}=\frac{x-2+9}{12}=\frac{x+7}{12}$	$\frac{x-2}{3}-\frac{x+7}{12}=\frac{4x-8-x-7}{12}=\frac{3x-15}{12}=\frac{x-5}{4}$
Cuarta	$\frac{x-5}{20}+\frac{1}{5}=\frac{x-5+4}{20}=\frac{x-1}{20}$	$\frac{x-5}{4}-\frac{x-1}{20}=\frac{5x-25-x+1}{20}=\frac{4x-24}{20}=\frac{x-6}{5}$

Tabla 1. El número de gansos que se venden y que quedan en diferentes ventas.

Según lo dicho en el acertijo, el número de gansos que quedan después de la cuarta venta es 19. Por eso se tiene:

$$\frac{x-6}{5}=19$$

Resolviendo la ecuación para x, resulta x = 101.

3.2. Vendiendo huevos: El primer caso

En el segundo acertijo Dudeney aumentó el desafío matemático, pues ya no es posible aplicar la estrategia de “trabajar hacia atrás” al no conocer el número de huevos que se vendían cada día. El acertijo es el siguiente:

> “163. Vendiendo huevos
> Una mujer llevó una cierta cantidad de huevos al mercado y vendió algunos de ellos. Al día siguiente, a través de la producción de sus gallinas, el número sobrante se duplicó y vendió el mismo número que el día anterior. En el tercer día el nuevo remanente se triplicó y vendió el mismo número que antes. En el cuarto día, el resto se cuadruplicó y sus ventas fueron las mismas que antes. Al quinto día, lo que quedaba se quintuplicó, pero ella vendió exactamente igual que en todas las ocasiones anteriores y se acabó todo lo que trajo. ¿Cuál es el menor número de huevos que podría haber tomado para comercializar el primer día, y ¿cuántos vendía diariamente?” (Dudeney, 1926, pp. 50-51)

La respuesta que ofreció Dudeney es la siguiente:

> “El número más pequeño posible de huevos es 103, y la mujer vendió 60 todos los días. Cualquier múltiplo de estos dos números funcionará. Por lo tanto, podría haber comenzado con 206 huevos y vendido 120 diariamente; o con 309 y vendido 180 diariamente. Pero requerimos el número más pequeño posible.” (Dudeney, 1967, p. 264).

Otra vez, no hay pista alguna de cómo se podría llegar a tal respuesta. En seguida se presenta una posibilidad:

Supongamos que el número inicial de huevos es x y que el número de huevos vendido cada día es a. Después del primer día, la mujer regresó del mercado con (x-a) huevos.

En el segundo día, se fue con el doble de huevos 2(x-a) y vendió *a* huevos. Regresó con (2 x-3a) huevos.

En el tercer día, se fue con triple de huevos: (6x-9a) huevos. Como vendió *a* huevos, de regreso tuvo (6x-10a) huevos.

En el cuarto día, se fue con una cantidad cuádruple de huevos: (24 x- 40a) huevos. Al vender, otra vez, *a* huevos, el número de huevos que trajo a casa fue (24 x – 41a) huevos.

En el quinto día, el número de huevos se quintuplicó, volviéndose (120 x – 205 a) huevos. Al vender *a* huevos, a la mujer no le quedó huevo alguno. Eso quiere decir que vale:

$$120\ x - 206\ a = 0 \text{ o } 60\ x = 103\ a.$$

Las primeras soluciones con los valores mínimos para el número inicial de huevos y el número de huevos vendidos cada día son x = 103 y a = 60.

Los cambios fueron los siguientes. El primer día la mujer sale con 103 huevos, vende 60 y regresa con 43. El segundo día, sale con 2 x 43 = 86 huevos, vende 60 y regresa con 26. El tercer día sale con 3 x 26 = 78 huevos, vende 60 y regresa con 18. El cuarto día sale con 4 x 18 = 72 huevos, vende 60 y regresa con 12. El quinto día sale con 5x12= 60, vende 60 y queda sin huevo alguno.

3.3. Vendiendo huevos: El segundo caso

El tercer acertijo de Dudeney tiene el título “La excéntrica mujer del mercado” (Figura 2).

Figura 2. La ilustración que acompañó el acertijo “La excéntrica mujer de mercado” de Dudeney.

> “88. La excéntrica mujer del mercado
> La señora Covey, que tiene una pequeña granja avícola en Surrey, es una de las mujeres más excéntricas que he conocido. Su manera de hacer negocios es siempre original, y a veces bastante extraña y maravillosa. Una vez fue encontrada explicando a algunos de sus amigos elegidos cómo había

> desechado los huevos de su día. Evidentemente, había tenido la idea de un viejo rompecabezas con el que todos estamos familiarizados; pero como es una mejora, no dudo en presentarlo a mis lectores.
> Relató que ese día había llevado una cierta cantidad de huevos al mercado. Ella vendió la mitad de ellos a un cliente y le dio medio huevo. Luego vendió un tercio de lo que le quedaba y le dio un tercio de un huevo. Luego vendió un cuarto del resto, y dio un cuarto de un huevo. Finalmente, vendió una quinta parte del resto y le dio un quinto de un huevo. Luego, lo que le quedaba lo dividió en partes iguales entre trece de sus amigos. Y, por extraño que parezca, durante todas estas transacciones no había roto ni un solo huevo. Ahora, el enigma es encontrar la menor cantidad posible de huevos que la señora Covey podría haber llevado al mercado. ¿Puedes decir cuantos?" (Dudeney, 1988, p. 122).

Se trata de una reformulación del acertijo de la venta de gansos ("un viejo rompecabezas" en el texto). Se notan una "mejora" en la estructura matemática y un aumento considerable del grado de dificultad matemática. Otra vez no se puede usar la estrategia "trabajar hacía atrás", al no conocer el número exacto de huevos que no se vendieron sino se regalaron a los amigos.

La solución ofrecida por Dudeney es:

> "88. La Excéntrica Mujer del Mercado
> El menor número de huevos que la Sra. Covey pudo llevar al mercado es 719. Luego de vender la mitad y entregar medio huevo de más, le quedarían 359; luego de la segunda transacción le restarían 239, luego del tercer negocio, 179; y luego del cuarto, 143. Este último número ella podría dividirlo equitativamente entre sus trece amigos, dándole a cada uno 11, y no habrá roto un solo huevo." (Dudeney, 1988, p. 247)

Como en el acertijo anterior, el primer paso es modelar algebraicamente las cuatro transacciones de venta. Supongamos x es el número inicial de huevos. Los números de huevos que quedan después de cada venta se presentan en la Tabla 2.

Número de venta	**El número de huevos que quedan después de la venta**
Primera	$x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}$
Segunda	$\frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{3x-3-x+1-2}{6}=\frac{2x-4}{6}=\frac{x-2}{3}$
Tercera	$\frac{x-2}{3}-\frac{x-2}{12}-\frac{1}{4}=\frac{4x-8-x+2-3}{12}=\frac{3x-9}{12}=\frac{x-3}{4}$
Cuarta	$\frac{x-3}{4}-\frac{x-3}{20}-\frac{1}{5}=\frac{5x-15-x+3-4}{20}=\frac{4x-16}{20}=\frac{x-4}{5}$

Tabla 2. El número de huevos que quedan después de las ventas.

Lo que se sabe sobre el número de huevos que quedan después de la cuarta venta es que debe ser un múltiplo de 13:

$$\frac{x-4}{5} = 13\ \text{n}$$

De tal manera, el número inicial de huevos depende del número entero *n* de huevos que la señora Covey regaló a cada uno de sus 13 amigos:

$$x = 65\ \text{n} + 4.$$

Es fácil, aunque bastante tedioso, verificar aritméticamente que el valor mínimo de *n*, que debe ser un número impar, es 11. Con los números 1, 3, 5, 7 y 9, tarde o temprano, aparecen "huevos partidos" como resultado de aplicar los algoritmos de venta.

De tal manera, el valor inicial de los huevos es 719. En la primera venta se venden 360 y quedan 359 huevos. En la segunda venta se venden 120 y quedan 239 huevos. En la tercera venta se venden 60 y quedan 179 huevos. En la quinta venta se venden 36 huevos y quedan 143 huevos. Tal número de huevos hizo posible que la señora Covey regalara 11 huevos a cada uno de sus 13 amigos (13 x 11 = 143).

El siguiente número impar posible de huevos regalados a cada amigo es 23. Tal cifra significaría que el número inicial de huevos es igual a 1499. Dudeney no mencionó tales números ni otros mayores.

4. Sugerencias didácticas para el uso de los tres acertijos de Dudeney

Marc Moyon (2019) diseñó y llevó a cabo en Francia un estudio complejo con estudiantes pre-universitarios usando precisamente el problema mencionado de "Jardín de placeres" de Fibonacci. Después de permitirles a los estudiantes resolver el problema a su manera, se les presentó la solución algorítmica de Fibonacci para que la analicen y la comparen con sus soluciones. Después, se les solicitó que resuelven el problema generalizado en que el hombre se queda con una manzana al haber pasado por 457 puertas. Como un resultado importante de su estudio, Moyon reportó lo siguiente:

> "Cuando los estudiantes interactuaban con la fuente, la mayoría de ellos tenían preguntas (sobre terminología o procedimientos matemáticos) similares a las que haría un historiador profesional de las matemáticas, especialmente cuando compararon diferentes soluciones históricas con las suyas. Es, para mí, una gran oportunidad para desarrollar el pensamiento crítico de los alumnos." (Moyon, 2019).

Algo similar se podría realizar con los tres acertijos de Dudeney. Tomando en cuenta el carácter exigente de las estrategias de solución, tales actividades son más adecuadas para los estudiantes talentosos. Ellos con mayor facilidad, en comparación con otros estudiantes, usan los símbolos y las formulas en la resolución de problemas (Reyes-Santander, Aceituno & Cáceres, 2018). Las actividades se pueden plantear como las tareas opcionales en los cursos curriculares, como problemas en los "clubes de matemáticas" y en la selección y el entrenamiento de los estudiantes para las olimpiadas de matemática.

En un primer momento, se les pueden presentar los acertijos y solicitar sus soluciones personales. Después, iría el proceso de solución grupal, en que comparan las soluciones personales, corrigen los errores de comprensión y de aritmética y algebra y se aclaran las dudas. El producto buscado serían las soluciones grupales.

El próximo paso sería la lectura de las soluciones ofrecidas por Dudeney y compararlas con las suyas, evaluando qué tanto son similares o diferentes. Sería muy motivante para los estudiantes, que lograron reproducir las soluciones presentadas en este artículo, concluir que sus soluciones son más completas que las soluciones de Dudeney.

Otra posibilidad sería presentar, después de la fase grupal, las "soluciones expertas" de este artículo en forma digital (mediante correo electrónico, Google Classroom o una página de Facebook) y solicitar que cada estudiante reflexione y haga un reporte escrito sobre lo aprendido al trabajar solo y en grupo y al leer la solución experta.

En ambos diseños didácticos para usar los acertijos de Dudeney, se promueve el aprendizaje autorregulado de resolución de problemas matemáticos (Santos Melgoza & Castañeda Figueiras, 2008; Vargas , Hederich-Martínez & Uribe, 2012; De Corte, 2015).

Bibliografía

Allport, G. W. A. (1997). Planning and problem solving using the five disc Tower of London task. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology: Section A*, *50*(1), 49-78.

Ben-Chaim, D., Shalitin, Y., & Stupel, M. (2019). Historical mathematical problems suitable for classroom activities. *The Mathematical Gazette*, *103*(556), 12-19.

Botermans, J. & Tichler, H. (2005). *The Big Brain Workout*. New York: Sterling Publishing Company.

Bransford, J. D. & Stein, B. S. (1993). *The Ideal Problem Solver. A Guide for Improving Thinking, Learning, and Creativity*. Second Edition. New York: W. H. Freeman and Company.

Britton, B., & Tayeh, C. (2004). Egg dilemma. *Teaching Children Mathematics*, *11*(1), 26-28.

Danesi, M. (2002). *The Puzzle Instinct: The meaning of puzzles in human life*. Indiana University Press.

De Corte, E. (2015). Aprendizaje constructivo, autorregulado, situado y colaborativo: un acercamiento a la adquisición de la competencia adaptativa (matemática). *Páginas de Educación*, *8*(2), 1-35.

Devi, S. (2008). *More puzzles to puzzle you*. Delhi: Orient Paperbacks

Dudeney, H. E. (1988). *Los acertijos de Canterbury y otros problemas curiosos*. Buenos Aires: Granica.

Dudeney, H. E. (1926). *Modern puzzles and how to solve them*. London: C. Arthur Pearson Ltd.

Frederick, S. (2005). Cognitive reflection and decision making. *Journal of Economic Perspectives*, *19*(4), 25–42.

Gardner, M. (1985). *Circo matemático*. Segunda edición. Madrid: Alianza Editorial.

Gardner, M. (1998). A Quarter-Century of Recreational Mathematics. *Scientific American – American Edition*, *279*, 68-75.

Hadley, J. & Singmaster, D. (1992). Problems to Sharpen the Young. *The Mathematical Gazette*, *76* (475), 102-126.

Hoffmann, L. (1893). *Puzzles old and new*. London: Frederick Warne.

Jelle, B. P. (2017). Reviewing the Learning Process through Creative Puzzle Solving. *Creative Education*, *8*, 2009-2035.

Kador, J. (2005). *How to ace a brainteaser interview*. New York: McGraw-Hill.

Kahneman, D. (2012). *Pensar rápido, pensar despacio*. Barcelona: Debate.

Kurnik, Z. (2008). Zabavna matematika. *Matematika i škola, 45*, 196-202 (publicado en el idioma croata).

López Puga, J. (2012). Evolución de la reflexión cognitiva en la universidad. *Divulgación Matemática, 5*(2), 17 – 18.

Licks, H. E. (1917). *Recreations in Mathematics*. New York: D. van Nostrand Company

Meyer, E. F., Falkner, N., Sooriamurthi, R., & Michalewicz, Z. (2014). *Guide to Teaching Puzzle-based Learning*. London: Springer.

Michalewicz Z, Michalewicz M (2008) P*uzzle-based learning: an introduction to critical thinking, mathematics, and problem solving*. Melbourne: Hybrid Publishers.

Moyon, M. (2019). Teaching Mathematics and Algorithmics with Recreational Problems: The Liber Abaci of Fibonacci, en Barbin, É. et al. (editores). *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in mathematics Education (ESU-8)* (Skriftserie 2019, nr. 11). Oslo: Oslo Metropolitan University.

Musser, G. L., Burger, W, F. & Peterson, B. E. (2014). *Mathematics for elementary teachers: a contemporary approach*.10th edition. New York: Wiley & Sons.

Northrop, E. G. (1944). *Riddles in Mathematics. A Book of Paradoxes*. Princeton, NJ: D. van Nostrand Company.

Ozaman, J. (1725). *Recreationes mathematiques et physiques*. Nouvelle edition. Tome premier. Paris: Combert.

Ozaman, J. (1778). *Recreationes mathematiques et physiques*. Nouvelle edition. Tome premier. Paris: Combert.

Poundstone, W. (2003). *How Would You Move Mount Fuji? Microsoft's Cult of the Puzzle. How the World's Smartest Companies Select the Most Creative Thinkers*. New York: Little, Brown and Company.

Poundstone, W. (2012). *Are you smart enough to work at Google? Fiendish Puzzles and Impossible Interview Questions from the World's Top Companies*. Oxford: Oneworld Publications

Reyes-Santander, P., Aceituno, D., & Cáceres, P. (2018). Estilos de pensamiento matemático de estudiantes con talento académico. *Revista de Psicología (PUCP)*, *36*(1), 49-73.

Rowlett, P., Smith, E., Corner, A. S., O'Sullivan, D., & Waldock, J. (2019). The potential of recreational mathematics to support the development of mathematical learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(7), 972-986.

Santos Melgoza, D. M., & Castañeda Figueiras, S. (2008). Objetivación de información en aprendizaje matemático autorregulado: Validez empírica de constructo. *Revista mexicana de investigación educativa*, *13*(38), 713-736.

Schaaf, W. L. (1955). *A Bibliography of Recreational Mathematics*, Volumes I–IV, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics,

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation*. New York: Springer.

Thomas, C., Badger, M., Ventura-Medina, E., & Sangwin, C. (2013). Puzzle-based learning of mathematics in engineering. *Engineering Education*, *8*(1), 122-134.

Toplak, M. E., West, R. F., & Stanovich, K. E. (2011). The Cognitive Reflection Test as a predictor of performance on heuristics-and-biases tasks. *Memory & cognition*, *39*(7), 1275-1289.

Vargas, O. L., Hederich-Martínez, C., & Uribe, Á. C. (2012). Logro en matemáticas, autorregulación del aprendizaje y estilo cognitivo. *Suma Psicológica*, *19*(2), 39-50.
Williams, S. (1844). *The boy's treasure of sports, pastimes and recreations*. London: D. Bogue.

Josip Slisko. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México. Es doctor en ciencias filosóficas y profesor-investigador de tiempo completo. Investiga los procesos de aprendizaje de física y matemática. Preside los comités organizadores de dos talleres internacionales para los docentes: "Nuevas tendencias en la enseñanza de la física" (desde 1993) y "Tendencias en la educación matemática basada en la investigación" (desde 2014).
Email: jslisko@fcfm.buap.mx.