

Evaluación para el aprendizaje en matemáticas: el caso de la retroalimentación

Antonio Zavaleta Bautista

Crisólogo Dolores Flores

(Universidad Autónoma de Guerrero, México)

Fecha de recepción: 08 de febrero de 2020

Fecha de aceptación: 01 de octubre de 2020

Resumen

En este artículo se reportan los resultados de un proyecto de investigación, que adoptó como objetivo: valorar el efecto de la retroalimentación, en la mejora del aprendizaje de la matemática. Se utilizó el método de investigación acción, intervenimos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, con estudiantes preuniversitarios, incidiendo en el concepto de razón de cambio. Se asume el concepto de retroalimentación, como la información proporcionada por un agente, en relación con los aspectos del rendimiento o la comprensión de alguien. Mediante una valoración pre-post comparamos la comprensión inicial y final de la razón de cambio. Tal valoración indica una mejora de dicho concepto, ya que los estudiantes desarrollaron la habilidad de calcular la razón de cambio, de interpretarla y analizarla.

Palabras clave

Retroalimentación, Evaluación, Evaluación para el aprendizaje, evaluación en matemáticas, razón de cambio.

Title

Assessment for learning in mathematics: The case of feedback

Abstract

This article reports the results of a research project, which it adopted as its objective: to assess the effect of feedback, in improving the learning of mathematics. The research-action method was used, we intervened in the process of teaching mathematics, with pre-university students, influencing the concept of rate of change. The concept of feedback is assumed, such as information provided by an agent, in relation to aspects of performance or understanding of someone. Through a pre-post assessment we compare the initial and final understanding of the rate of change. Such weighting indicates an improvement of this concept, since the students developed the ability to calculate the rate of change, to interpret and analyze it.

Keywords

Feedback, Assessment, Assessment for learning, assessment in mathematics, rate of change.

1. Introducción

La evaluación se ha convertido en la actualidad en uno de los temas de mayor interés en el ámbito educativo. Actualmente existen evaluaciones que enfocan la atención en evaluar el rendimiento de los estudiantes, la mayoría de estas centran su atención sólo en los resultados del proceso de enseñanza-aprendizaje (e-a) y poco dicen acerca de los procesos iniciales, los intermedios y menos aún de todo el proceso. En este contexto no es lo mismo: la evaluación del aprendizaje que la evaluación para el



aprendizaje. La primera da cuenta de los resultados, mientras que la segunda contribuye a la mejora de los aprendizajes.

La evaluación, desde el surgimiento en el ámbito educativo, ha evolucionado, según Escudero (2003) con las propuestas de Tyler (1942), en la que se le consideraba una medición, centrada en los resultados del proceso educativo, evaluando el cumplimiento de los objetivos establecidos, después con las aportaciones de Cronbach (2000) y Scriven (1967), a los cuales se les atribuye, al primero de introducir, la toma de decisiones, como uso principal de la evaluación, mientras que al segundo se le reconoce por ser el primero en definir dos funciones: formativa y sumativa. En la misma década de los sesenta se reconoce otra etapa importante, la evaluación criterial, cuyo principal exponente es Glaser (1963), quien reconoce por vez primera, la distinción entre evaluación normativa y criterial.

Es así que para finales de la década de los sesenta se concibe la evaluación como el proceso de determinar, obtener y proporcionar información relevante para juzgar decisiones alternativas, defendida por Alkin (1969), Stufflebeam (1968) y Cronbach (1982). La importancia de esta aportación es definir a la evaluación ya como un proceso y por otro lado, la de brindar información para juzgar la toma de decisiones, que de acuerdo con lo asumido en este trabajo, esto es retroalimentación.

Todas estas aportaciones son retomadas por uno de los más recientes exponentes de la evaluación educativa, Daniel L. Stufflebeam, quien, en la segunda mitad del siglo XX, propone su modelo de evaluación CIPP, (Stufflebeam, 2000) en el que reconoce cuatro dimensiones que se deben tomar en cuenta en dicha evaluación: Contexto (C) donde tiene lugar el programa o está la institución; Inputs (I) elementos y recursos de partida; Proceso (P) que hay que seguir hacia la meta; Producto (P) que se obtiene. En este modelo se plantea como objetivo primordial de la evaluación la mejora, la toma de decisiones para la mejora de todas y cada una de las cuatro dimensiones antes citadas.

Actualmente existen varias tendencias sobre evaluación educativa, Evaluación por Competencias, propuesta por Tobón, Rial, Carretero, y García (2006); Evaluación Auténtica, que se propone en los Lineamientos para la Evaluación del Aprendizaje por la Dirección General de Bachillerato (DGB) de la SEP (SEP, 2011); etc. Sin embargo, en general todas estas evaluaciones son de tipo formativa, por lo que podemos concluir que está ganando mucho terreno en la actualidad y es adoptada por diferentes sistemas educativos. Otra tendencia más reciente es la denominada: evaluación para el aprendizaje, propuesta por Wiliam (2011), surgida en Inglaterra, la cual prioriza como objetivo principal mejorar o lograr el aprendizaje del estudiante, mediante la retroalimentación continua tanto del profesor como de los estudiantes mismos.

Después de este recorrido histórico, se reconoce el siguiente problema: por un lado los estudios actuales respecto de la evaluación y en consecuencia el currículum oficial sugieren que la evaluación debe contribuir a la mejora del aprendizaje, por otro, las concepciones y prácticas de evaluación que realizan los profesores de bachillerato en México, se centran más en los logros, en los exámenes, en los resultados de la enseñanza (Dolores & García, 2016). Esto indica que el profesor, y particularmente el de matemáticas, todavía mantiene concepciones y realiza prácticas tradicionales que lo alejan de los avances actuales, pero sobre todo de una utilización formativa de la evaluación. Este es un serio problema para la Educación Matemática de donde se origina la baja calidad detectada ya por las evaluaciones internacionales. En las concepciones más modernas sobre la evaluación como en la de evaluación para el aprendizaje, se enfatiza en evaluar para mejorar el proceso de e-a, mediante la retroalimentación de dicho proceso. Y es en este sendero en el que se orienta nuestro trabajo.

Por ello en este trabajo nos hemos planteado como objetivo, en el marco de la evaluación para el aprendizaje, valorar el efecto que tiene el uso de la retroalimentación (feedback) en la mejora del aprendizaje de la matemática, mediante una intervención de aula. Como sustento teórico, se utiliza la Evaluación para el Aprendizaje y la concepción sobre la retroalimentación según Hattie & Timperley (2007). Como metodología, se utiliza la investigación acción y el diseño de secuencias didácticas.

2. Marco Teórico

Son cuatro los elementos teóricos esenciales sobre la base de los cuales se fundamenta este trabajo: la evaluación en un sentido general, la evaluación para el aprendizaje, la retroalimentación como el elemento central de esta y la competencia matemática.

2.1. La evaluación

La concepción constructivista de la e-a, la perspectiva de la enseñanza situada y la evaluación formativa constituyen algunas de las principales tendencias actuales a las cuales se adhiere y fundamenta el presente trabajo. Desde la perspectiva socio-constructivista, se entiende por aprendizaje el proceso activo de construcción de conocimientos por parte del alumno, la enseñanza como un proceso sostenido en el tiempo, de guía y ayuda del profesor al aprendizaje del alumno y la evaluación como una práctica de actividad continua, formativa, reguladora, auténtica, participada y social. Tomada en su conjunto, la evaluación, constituye un sistema integrado y alineado o concordante con las actividades de enseñanza y aprendizaje (Coll, 2001; Coll, Barberà y Onrubia, 2000).

Por tanto, desde el enfoque socio-constructivista la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación se asumen como procesos que guardan entre sí una estrecha coherencia, ya que para que el profesor pueda ser guía y ayude al estudiante en su aprendizaje, requiere de realizar valoraciones continuas de este último, a través de evaluaciones.

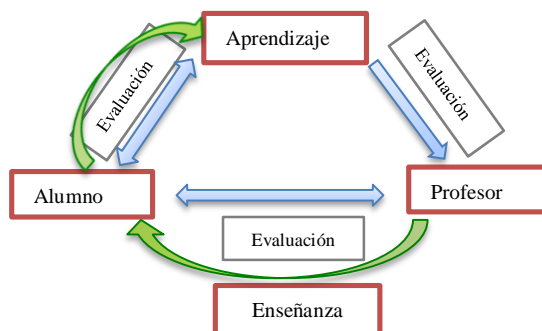


Figura 1. Interpretación del modelo socioconstructivista de la enseñanza-aprendizaje-evaluación.

La evaluación en un sentido general, se adopta en este trabajo como el proceso de identificar, obtener información útil y descriptiva acerca del valor y el mérito de las metas, la planificación, la realización y el impacto de un objeto determinado, con el fin de servir de guía para la toma de decisiones, solucionar los problemas de responsabilidad y promover la comprensión de los fenómenos implicados (Stufflebeam y Shinkfield, 1987).



Esta acepción interpretada en el ámbito educativo, se asume como el proceso de identificar, obtener información útil y descriptiva acerca del valor y méritos de los objetivos, la planificación y el impacto del proceso de la e-a, con el fin de servir de guía para la toma de decisiones, solucionar los problemas identificados y promover la comprensión del proceso de enseñanza-aprendizaje.

2.2. Evaluación para el aprendizaje

Se asume a la evaluación para el aprendizaje como el proceso de búsqueda e interpretación de pruebas para su uso por los alumnos y sus profesores para decidir dónde están en su aprendizaje, a dónde tienen que ir y cómo llegar, (ARG, 2002).

Características más importantes:

- Es parte intrínseca de la e-a.
- Los profesores comparten con sus alumnos los logros de aprendizaje que se espera de ellos.
- Ayuda a los estudiantes a saber y reconocer los estándares que deben lograr.
- Involucra a los alumnos en su propia evaluación.
- Proporciona retroalimentación que indica a los estudiantes lo que tienen que hacer, paso a paso, para mejorar su desempeño.
- Asume que cada alumno es capaz de mejorar su desempeño.
- Involucra tanto a docentes como a alumnos en el análisis y reflexión acerca de los datos arrojados por la evaluación.

Como se puede apreciar en esta definición, así como en las evaluaciones con función formativa, el aspecto fundamental es informar acerca del desempeño real de los estudiantes, así como de las estrategias o tareas para la toma de decisiones para alcanzar las metas planteadas, esta información que la evaluación debe proporcionar se le denomina retroalimentación.

2.3. La retroalimentación

La retroalimentación, se define como la información proporcionada por un agente (profesor, compañero, libro, padre, uno mismo o la experiencia) en relación con los aspectos del rendimiento o la comprensión de alguien (Hattie y Timperley, 2007). En este sentido, la retroalimentación proporciona información acerca de la distancia entre el nivel real y el nivel de referencia, de un parámetro del sistema que se utiliza para alterar la brecha de alguna manera (Ramaprasad, 1983). Para propósitos educativos, la retroalimentación tiene que proporcionar detalles específicos de la tarea o proceso de aprendizaje que llena un vacío entre lo que se entiende y lo que está destinado a ser comprendido (Sadler, 1989).

El modelo de retroalimentación adoptado para esta investigación es el de Hattie y Timperley (2007) en el que se propone como objetivo principal: reducir las discrepancias entre los conocimientos actuales, el rendimiento y una meta. La retroalimentación efectiva debe responder a tres preguntas principales planteadas por un profesor y/o por un estudiante: ¿A dónde voy? (¿Cuáles son los objetivos?), ¿Cómo voy? (Lo que se está avanzando hacia la meta) y ¿Qué sigue? (Lo que debe llevarse a cabo para hacer un mejor progreso de actividades). Estas preguntas se corresponden con las nociones “*feed up*”, “*feed back*”, “*feed forward*”.

La pregunta **¿A dónde voy?** es la información proporcionada a los estudiantes y sus maestros sobre el logro de los objetivos de aprendizaje relacionados con una tarea o su rendimiento. La siguiente pregunta **¿Cómo voy?** responderla involucra a un profesor o compañero, una actividad o uno mismo, proporciona información relativa a una tarea o meta de desempeño, a menudo en relación con algún estándar esperado, desempeño anterior, éxito o fracaso en una parte específica de la tarea. La última pregunta **¿Qué sigue?** es consistente con lo secuencial de la instrucción, con maestros que proporcionan información, tareas, o las intenciones de aprendizaje; estudiantes que intentan tareas; y alguna consecuencia posterior.

Estas preguntas no son aisladas en cada uno de los cuatro niveles, suelen trabajar juntas. Las retroalimentaciones sobre **¿cómo voy?** tiene el poder de llevar a la realización de otras tareas o **¿qué sigue?** con relación a un objetivo y **¿a dónde voy?** cierra la brecha entre: dónde están los estudiantes y dónde tienen que ir, para ser guiados por la retroalimentación. Este modelo se ilustra en la figura siguiente:

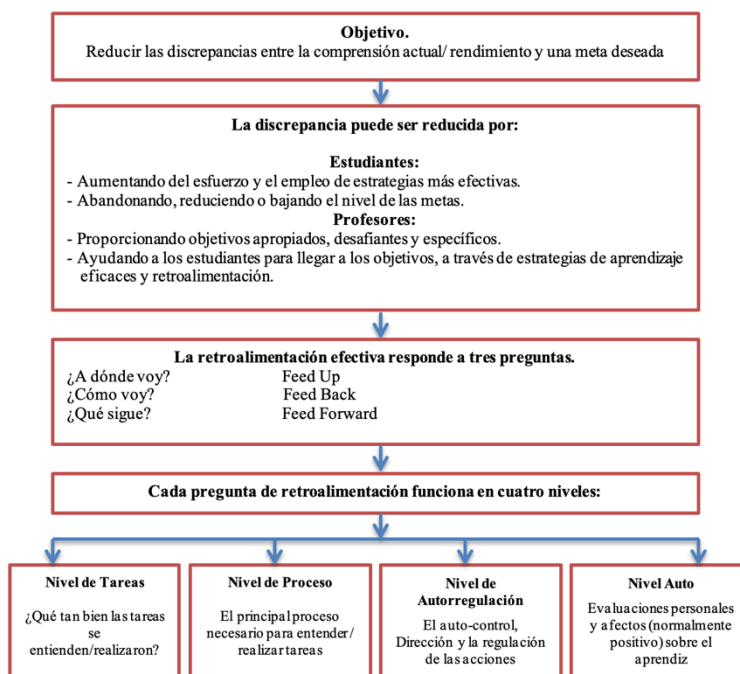


Figura 2. Modelo de retroalimentación, adaptado de Hattie y Timperley (2007).

La “meta” a la que refiere este modelo en nuestro caso, serán las competencias matemáticas previstas en el Plan y Programa de Estudios del bachillerato de UAGro, en este sentido en el siguiente apartado, se menciona esta acepción adoptada al respecto.

2.4. Competencia Matemática

Asumimos a la competencia matemática como la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan estas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizarlas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE e INECSE, 2004).



Cada grupo de competencias demanda ciertas acciones o dominios cognitivos que se agrupan en tres: el grupo de reproducción, el grupo de conexión y el grupo de reflexión, de acuerdo con la OCDE e INECSE (2004). Cada uno de estos tres dominios cognitivos, en el modelo de retroalimentación adoptado, definen metas particulares, que integrados indican el alcance de la meta general o la competencia prevista.

En el dominio o grupo de **reproducción** se demandan representaciones y definiciones estándares, cálculos rutinarios y procedimientos rutinarios. En el dominio de **conexión** se engloban: la habilidad de usar los conocimientos, lo adquirido en el dominio de reproducción en situaciones de solución de problemas que ya no son de mera rutinaria, pero que aún incluyen escenarios familiares. Por último en el dominio de **Reflexión** se exigen las habilidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problema más complejos que los de conexión, incluye habilidades como: formulación y solución de problemas complejos, reflexión y comprensión en profundidad y generalización

3. Metodología: La investigación-acción

Como metodología se utiliza la investigación-acción cuyo origen se le atribuye al psicólogo social Lewin (1946) que la define como un proceso cíclico de exploración, actuación y valoración de resultados. Es un método para la intervención en la práctica profesional con el fin de ocasionar una mejora (Rodríguez y Valldeoriola, 2009).

La investigación-acción estudia la práctica educativa tal y como ocurre en su escenario natural, profundizando en la comprensión de situaciones en las que está implicado el profesorado con los problemas existentes. Esta metodología pretende ofrecer respuestas prácticas a situaciones reales, para ello se interpreta lo que ocurre desde el punto de vista de quienes actúan o interactúan en la situación del problema. En esta metodología los investigadores están implicados en la realidad, objeto de estudio. Es decir, el profesorado, además de su labor docente, también desarrolla una labor investigadora, explorando, reflexionando y actuando sobre su propia práctica. Las fases de esta metodología son: problematización, diagnóstico, diseño de las secuencias didácticas, aplicación y evaluación. En este trabajo en cada fase se realizó:

3.1. Problematización

Se reconoce el escaso uso de la retroalimentación en el proceso de e-a, escaso uso de la evaluación con fines formativos, en consecuencia existe escasa evidencia del efecto del uso de la retroalimentación en el aula de clases. Por otro lado se consideran los problemas más comunes que se presentan al abordar el concepto de razón de cambio promedio: dificultad para transitar de la “matemática estática” a la “matemática variacional”, confusión del valor de la razón de cambio con el valor de la función, problemas para reconocer e interpretar a la razón de cambio en el contexto gráfico, reconocer y usar a la razón de cambio promedio para resolver problemas variacionales en diferentes contextos (Dolores, 2004; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu, 2002; Dolores, Alarcón, y Albarrán, 2002; Artigue, 1995).

3.2. Diagnóstico

Se llevó a cabo en dos etapas: una primera con tres de los profesores que han impartido cursos de Matemáticas a los estudiantes del grupo seleccionado. La segunda etapa mediante un diagnóstico con los estudiantes del grupo en el que se realizó la investigación.

La primera etapa: se realizó con el objetivo de diagnosticar a los profesores, sobre su concepción de la evaluación, sobre su práctica de evaluación y el uso que le daban a esta; la indagación se realizó mediante la aplicación de un cuestionario escrito. A este respecto concluimos que los profesores poseían una concepción de la evaluación, como medición y equivalente a calificación, se refieren a la evaluación sumativa, en la práctica respondieron que evaluaban con puntos, firmas, trabajos, exámenes y revisión de libretas; respecto del uso principal era calificar para aprobar el curso, no se menciona un uso formativo de la evaluación para ayudar al aprendizaje de los estudiantes, se concluye que no hacen uso de la retroalimentación.

La segunda fase se ejecutó mediante la aplicación de un instrumento de diagnóstico que explora los conocimientos acerca de la razón de cambio. El instrumento consiste de un cuestionario de 10 actividades que exploran tres dominios cognitivos: Reproducción, Conexión y Reflexión. En el dominio de reproducción se evalúan representaciones y definiciones estándares, cálculos rutinarios, procedimientos rutinarios. Mediante las siguientes actividades:

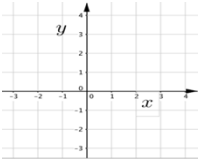
Actividades para el dominio Reproducción.	
Habilidad principal	Actividad
Identificación	<p>P1. Subraya las fórmulas que representan razones de cambio.</p> <p>a) $v = \frac{d}{t}$ b) $A = \pi r^2$ c) $a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$ d) $x^2 + y^2 = r^2$ e) $r = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$</p> <p>f) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$</p>
Discriminación	<p>P2. Subraya las expresiones que no representan razones de cambio</p> <p>a) Velocidad auto: 100 km/h b) Área terreno: 10000 m²</p> <p>c) Emisión CO₂ de automóvil: 272g/km d) Colesterol en sangre: 200 mg/dl</p> <p>d) Salario: \$200 diarios e) Parte de un todo: 1/4</p>
	<p>P3. Un cuerpo en caída libre se rige por la función: $s(t) = 5t^2$, donde s es la distancia en metros y t el tiempo en segundos. ¿Qué expresión permite calcular su razón de cambio de 2 a 2.5 segundos?</p> <p>a) $r = 5(2.5)^2$ b) $r = \frac{5(2.5)^2}{2}$ c) $r = \frac{5(2.5)^2 - 5(2)^2}{2.5 - 2}$</p> <p>d) $r = \frac{5(2)^2}{3}$ e) Otro _____</p>
Calcular	<p>P4. Una partícula se mueve en el plano de coordenadas (x, y) del punto A(-3, 2) a B(-1, -2). ¿Cuánto aumenta o disminuye x? ¿Cuánto aumenta o disminuye y? ¿Cuál es su razón de cambio?</p> <p>Datos</p> <p>Gráfica</p> <p>Procedimientos</p> <p>Resultado</p> 

Tabla 1. Actividades para el dominio Reproducción.

Respecto del dominio de conexión, se evalúa la habilidad de usar los conocimientos, lo adquirido en el dominio de reproducción en situaciones de resolución de problemas que ya no son de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares. Y lo evaluamos con las siguientes actividades:



Actividades para el dominio Conexión	
Habilidad principal	Actividad
Interpretar	<p>P5. La gráfica siguiente muestra la variación de la distancia recorrida por un ciclista A en función del tiempo.</p> <p>P5A. ¿Cuál es su velocidad media de O a A? a) 0 km/min b) 1 km/min c) 0.5 km/min d) 2km/min e) Otra_____</p> <p>P5B. ¿En qué intervalo su razón de cambio es cero? a) O b) OA c) AB d) CD e) DE</p> <p>P5C. ¿Qué velocidad debe llevar un ciclista B para igualar al ciclista A en el intervalo AB? a) 3 km/min b) 4 km/min c) 1 km/min d) 1.5 km/min</p> <p>P5D. ¿En qué intervalos la razón de distancia respecto del tiempo es igual? a) en OA y CD b) en AB a BC c) en BC y DE d) 0 km/min e) Otra_____</p>
Resolución de problemas	<p>P8. La presión p que experimenta un buzo bajo el agua está relacionada con la profundidad d y está dada en la ecuación: $p = kd + 1$ (con k una constante). En la superficie la presión es de 1 atmósfera, a los 100 m de profundidad la presión es de 10.94 atmosferas. ¿Qué presión sentirá el buzo a los 50 m de profundidad?</p>

Tabla 2. Actividades para el dominio Conexión.

En el dominio de Reflexión se evalúan las habilidades de los estudiantes para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de resolución de problemas más complejos que los de conexión, se evalúan habilidades como: Formulación y solución de problemas complejos, Reflexión y comprensión en profundidad y Generalización. Se diagnostica con las siguientes actividades:

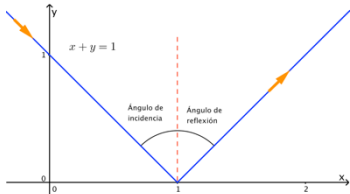
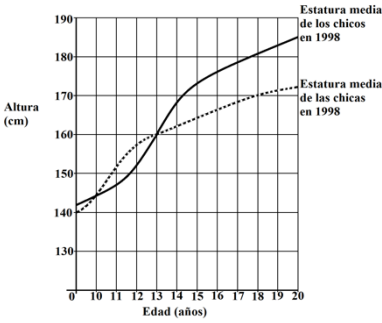
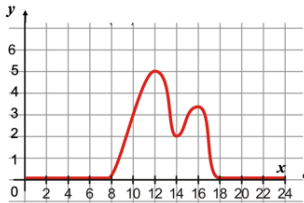
Actividades para el dominio Reflexión	
Habilidad principal	Actividad
Resolución de problemas	<p>P6. Un rayo de luz viaja en línea recta desde el segundo cuadrante hacia el primer cuadrante del plano tal como se muestra en la figura. Se sabe que el ángulo incidencia y el de reflexión son iguales. Obtenga una ecuación para la recta a través de la cual viaja el rayo de luz reflejado.</p> 
Resolución de problemas	<p>P7. Un cuerpo es lanzado hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s. De manera que se rige por la función: $s(t) = 20t - 5t^2$. Donde s se mide en metros y t en segundos. ¿Cuál es su razón de cambio en el transcurso del último segundo antes de tocar el suelo?</p>
Interpretar, analizar.	<p>P9. La estatura media de los chicos y las chicas de Holanda en 1998 está representada en la siguiente gráfica. Interpreta la información y contesta las preguntas.</p>  <p>P9A. ¿En qué periodo las chicas crecen más rápido que los chicos? a) de 0 a 10 años b) de 10 a 12 años c) de 13 a 20 años d) a los 11 años</p> <p>P9B. ¿Cuál es el argumento más convincente de su respuesta anterior?</p> <p>P9C. ¿En qué periodo crecen con igual rapidez los chicos y las chicas? a) a los 10 años b) de 15 a 16 años c) de 15 a 18 años d) de 19 a 20 años</p> <p>P9D. ¿En qué periodos la rapidez de crecimiento de las chicas es constante? a) a los 13 años b) de 13 a 18 años c) de 15 a 20</p>
	<p>P10. Analiza la gráfica de la siguiente función y determina los intervalos en donde se satisfacen las condiciones para las razones de cambio correspondientes.</p>  <p>a) ¿Para qué intervalos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$? _____</p> <p>b) ¿En qué intervalos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$? _____</p> <p>c) ¿Dónde: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$? _____</p>

Tabla 3. Actividades para el dominio Reflexión.



Los resultados del diagnóstico de manera grupal mostraron un rendimiento promedio menor al 30% respecto de los conceptos básicos sobre la razón de cambio. En el dominio de reproducción se obtuvo un 27.15% del total de puntos, en el dominio de conexión en promedio se obtuvo el 20.83% y respecto del grupo de conexión, sólo el 15.8%. En general el rendimiento de los estudiantes es bajo y mucho más en lo que se refiere al dominio de reflexión.

3.3. Diseño de las secuencias didácticas

Las secuencias didácticas, se conciben de acuerdo con Díaz-Barriga (2013), como una organización de actividades de aprendizaje que se realizarán con los estudiantes con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo. Las secuencias didácticas son el resultado de proponer una serie de actividades de aprendizaje con orden interno entre sí, se parte de recuperar aquellas nociones previas que tienen los estudiantes sobre un hecho, vincularlo a situaciones problemáticas y de contextos reales y trabajar de manera individual o en grupo con información que sea significativa. Estas actividades de aprendizaje se organizan en: actividades de apertura, actividades de desarrollo y actividades de cierre.

Para el diseño de las secuencias se tomó en cuenta al currículum oficial vigente: el Programa de Estudios correspondiente a Matemáticas V oficial de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), versión 2010, así como el Programa de Cálculo diferencial de la Dirección General de Bachillerato de la Secretaría de Educación Pública (DGB-SEP) versión 2013. Con base en ello, se reconoce una estructura que organiza competencias por bloques. Se constituye de cuatro bloques. Al momento de la investigación, los estudiantes del grupo con quienes se desarrolló la secuencia didáctica, trabajaban con el bloque 3, el cual se plantea el objetivo: calcular, interpretar y analizar razones de cambio en fenómenos naturales, sociales, económicos, administrativos, en la agricultura en la ganadería y en la industria.

Es por esto que nuestra secuencia didáctica adoptó el objetivo: desarrollar en los estudiantes las habilidades para calcular, interpretar y analizar razones de cambio en fenómenos variacionales.

Por otro lado, de acuerdo con nuestro marco teórico, la retroalimentación permeó el diseño de la secuencia. A un nivel macro, se contemplan las tres preguntas claves de la retroalimentación: ¿A dónde voy?, ¿Cómo voy? y ¿Qué sigue?

Las preguntas se utilizaron para el diseño de las fases de la secuencia didáctica, del modo siguiente: en la fase de apertura, que tiene la intención de plantear interrogantes significativas, para que los estudiantes recuperen sus conocimientos previos, se agrega una actividad para comunicar y hacer entender el objetivo de la misma, así como para hacer conscientes a los estudiantes, sobre sus conocimientos previos y los que son requeridos, para alcanzar el objetivo de la secuencia. Respondiendo a la primera pregunta: ¿A dónde voy?

En la fase de desarrollo, se busca que el estudiante interaccione con una nueva información, a partir de los conocimientos previos, desarrollar actividades que posibiliten la incorporación de la información nueva, es en esta fase opera en un marco general la pregunta ¿Cómo voy?

Por último, la fase de cierre tuvo la finalidad de lograr una integración del conjunto de tareas realizadas, se busca que los estudiantes reelaboren su estructura conceptual, las actividades de cierre

posibilitan además una evaluación por parte del docente, en esta fase se busca responder a la pregunta en un nivel macro, ¿Qué sigue?

A un nivel micro, las tres preguntas se utilizan de manera integral y de manera continua en el trabajo de cada una de las actividades. En la tabla siguiente se presenta la secuencia empleada.

DATOS IDENTIFICACIÓN	
1. Asignatura:	Matemáticas V
2. Unidad temática o ubicación del programa dentro del curso general:	Cálculo diferencial
3. Tema general:	Razón de cambio
4. Contenidos:	
5. Duración de la secuencia:	8 horas
6. Número de sesiones previstas:	4 sesiones de 2 horas cada una
7. Nombre del profesor que elaboró la secuencia:	El investigador
8. Finalidad, propósitos u objetivos:	

Objetivo general: Formar en los estudiantes la capacidad de resolver problemas de fenómenos variacionales, con el uso de razón de cambio. Para ello se requiere alcanzar los siguientes objetivos particulares:

1. Que el estudiante sea capaz de reconocer o identificar los fenómenos variacionales y su naturaleza.
2. Desarrollar la habilidad de calcular razones de cambio en fenómenos variacionales.
3. Capacidad para interpretar y analizar razones de cambio en fenómenos variacionales.

SECUENCIA DIDÁCTICA

1. Elección de un problema, caso o proyecto: A partir del concepto de pendiente de una recta.

2. Orientaciones generales para la evaluación:

Se utiliza la evaluación formativa, con la intención de retroalimentar al estudiante durante el proceso de e-a para que alcance el objetivo planteado.

Para la evaluación se utilizarán los dominios cognitivos para las competencias matemáticas según OCDE (2004):

El grupo de **reproducción**.

El grupo de **conexión**.

El grupo de **reflexión**.

Por lo que se evaluará en estos tres dominios del modo siguiente:

En el grupo de **reproducción**:

- Reconocer o identificar fenómenos variacionales y su naturaleza.
- Identificar las magnitudes variacionales principales en los fenómenos.
- Identificar el comportamiento variacional de una magnitud respecto de la otra.
- Identificar razones de cambio.

En el grupo de **conexión**.

- Calcular razones de cambio en fenómenos variacionales.
- Resolver problemas de razones de cambio en fenómenos variacionales.

En el grupo de **reflexión**.

- Interpretar y analizar razones de cambio en fenómenos variacionales.
- Comprensión del concepto de razón de cambio.

Como instrumento se utiliza una rúbrica.



3. Secuencia didáctica

Línea de Secuencias didácticas

3.1 Actividades de apertura.

(Esta fase se corresponde con la pregunta de retroalimentación, ¿A dónde Voy?)

Actividad 1. Esta actividad está enfocada a comunicar el objetivo que se persigue con esta secuencia, de modo que sea asequible para ellos, así como la forma en que se pretende realizar, y los criterios generales que serán los indicadores sobre el cumplimiento de los objetivos. En este primer momento la intención es que el estudiante reconozca los diferentes fenómenos variacionales y sus características básicas, para que se oriente sobre el objetivo: estudiar estos tipos de fenómenos. Actividad 1.

(en el marco de la retroalimentación se debe responder a la pregunta ¿a dónde voy?)

Actividad 2. En esta actividad se hará consciente a los estudiantes sobre los conocimientos previos requeridos, así como el nivel en el que se encuentran ellos respecto de estos conocimientos previos necesarios para transitar hacia el objetivo (se debe responder la pregunta ¿Cómo voy?, en dependencia de la respuesta a esta pregunta, se debe plantear y responder ¿y ahora? lo que hay que hacer para tener las condiciones previas) (Esta se retoma de los resultados obtenidos en el diagnóstico).

3.2 Actividades de desarrollo (Responde a la pregunta: ¿Cómo Voy?):

Actividad 3. Esta actividad tiene el objetivo de que los estudiantes puedan calcular la razón de cambio en el contexto intramatemático, se inicia con actividades que posibiliten al estudiante trascender de la matemática estática a la matemática variacional, identificando cambios en x e y , calculando cambios y por último razones de cambio. Como objetivos particulares se persigue que el estudiante:

- Identifique las magnitudes variacionales.
- Identifique el comportamiento variacional de una magnitud respecto de la otra.
- Reconozca el concepto de razón de cambio.
- Calcule razones de cambio particulares de este fenómeno.

En esta actividad se utilizan las tres preguntas de la retroalimentación a nivel de proceso (¿A dónde voy?, ¿Cómo voy?, ¿Qué sigue?).

Actividad 4. Con esta actividad se pretende que el estudiante construya el concepto de razón de cambio. A partir del estudio de diferentes fenómenos variacionales, se generalizará para la construcción formal del concepto y su escritura matemática en términos de función. Se pretende que el estudiante comprenda el concepto, se espera que sea capaz de:

1. Identificar ejemplos del concepto razón de cambio.
2. Conocer y usar su designación y su simbología.
3. Conocer sus propiedades.
4. Identificar contraejemplos y sus argumentos.
5. Señalar casos especiales.
6. Reconocer la relación con otros conceptos.
7. Conocer su definición o diversas definiciones.
8. Calcular razones de cambio en fenómenos variacionales.
9. Usarlo en la resolución de problemas de fenómenos variacionales.
10. Interpretar y analizar razones de cambio en fenómenos variacionales.

3.3 Actividades de Cierre (¿y ahora? Retroalimentación general):

Actividad 5. Esta actividad tiene el objetivo de integrar el conjunto de tareas realizadas, realizar una valoración general por parte del profesor y por parte del estudiante acerca del alcance de la meta planteada inicialmente.

En esta actividad se plantean problemas para constatar el alcance de cada una de las competencias antes mencionadas:

Por lo que se evaluará en los tres dominios cognitivos del modo siguiente:

En el grupo de **reproducción**:

- Reconocer o identificar fenómenos variacionales y su naturaleza.
- Identificar las magnitudes variacionales principales en los fenómenos.
- Identificar el comportamiento variacional de una magnitud respecto de la otra.
- Identificar razones de cambio.

En el grupo de **conexión**.

- Calcular razones de cambio en fenómenos variacionales.
- Resolver problemas de razones de cambio en fenómenos variacionales.

En el grupo de **reflexión**.

- Interpretar y analizar razones de cambio en fenómenos variacionales.

Generalizar en la construcción del concepto de razón de cambio.

Para esta actividad se usa una rúbrica.

Con base en los resultados anteriores se hace una retroalimentación general, y se dejan tareas que ayuden a superar dificultades.

4. Línea de evidencias de evaluación del aprendizaje

- La Rúbrica 1. la cual se diseñó tomando como para la valoración del desarrollo de los tres dominios cognitivos.
- Contrastación del cuestionario de diagnóstico (Pre) con el cuestionario final(Post).

5. Recursos:

- Stewart, J. (2007). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: CENGAGE Learning.
- Larson, R. E., Edwards, B. H. (2002) *Cálculo y Geometría Analítica Volumen I*. México: McGraw-Hill.

Tabla 4. Secuencia Didáctica.

3.4. Aplicación y evaluación

La aplicación se llevó a cabo en condiciones de aula ordinaria, estando presente el profesor titular del curso, impartieron las sesiones los dos profesores investigadores. El grupo en el que se intervino fue el 505 correspondiente al quinto semestre de bachillerato de la escuela Preparatoria No. 9 Comandante Ernesto “Che” Guevara, de la Universidad Autónoma de Guerrero, ubicada en la Ciudad de Chilpancingo Guerrero, México. El grupo estuvo conformado por 45 estudiantes, con edades entre 16 y 18 años, en el momento de la investigación cursaban la asignatura de Matemáticas V, en la que se trabaja el Cálculo Diferencial.

La secuencia se desarrolló en cinco sesiones, dos por semana, en un tiempo de dos horas cada una. En la primera sesión se aplica el cuestionario de diagnóstico y la primera actividad correspondiente a la apertura. En la segunda sesión se concluye la apertura e inicia la fase de desarrollo, la cual concluye



en la tercera sesión. En la cuarta sesión se trabaja la fase del cierre y en la última se aplica el cuestionario post-test.

Para la evaluación se utilizaron dos tipos de evaluaciones: la evaluación para el aprendizaje que retroalimenta en todo momento el proceso de e-a, en esta se utilizan como instrumentos las rúbricas diseñadas sobre la base de los tres dominios cognitivos, y la evaluación de tipo sumativa para valorar el efecto del empleo de la primera, al finalizar la intervención y contrastando los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario pos-test con el cuestionario pre-test. En este sentido podemos afirmar que la evaluación se aplica con dos objetivos por un lado para ayudar al aprendizaje de los estudiantes y por el otro responde a la intención de este trabajo.

Recolección y análisis de los datos. Los datos se recolectan de tres maneras: grabaciones, producciones escritas en clase o tareas y los cuestionarios pre-test y pos-test.

Los datos recolectados se analizaron del modo siguiente:

1. Las grabaciones de audio y video. Se revisan las grabaciones y se registran las retroalimentaciones más importantes en tablas de Excel, que produjeron mejores resultados en el rendimiento de los estudiantes, permitiendo transitar en los distintos niveles cognitivos.
2. Las actividades diarias. Se analizan para valorar el avance en el proceso de e-a y actuar en consecuencia en la reestructuración de las actividades planteadas originalmente, cuando fue necesario.
3. Los cuestionarios pre y post-test. Se analizan realizando la contrastación entre ambos. Por dominios cognitivos y por estudiante, se ponderan los resultados de manera cuantitativa y cualitativamente. El análisis se realiza tomando en cuenta las tres categorías definidas por los dominios cognitivos evaluados.

4. Resultados

Los resultados se presentan valorando los efectos de las retroalimentaciones en cada uno de los tres dominios cognitivos, contrastando las producciones de los estudiantes en los cuestionarios pre-test (diagnóstico) con el pos-test.

Para facilitar el análisis, dadas las condiciones deficientes del grupo, el dominio cognitivo de reproducción lo dividimos en dos subniveles, el elemental y el básico. En el primero se ubicaron las acciones más elementales, por ejemplo, la ubicación de puntos en el plano, ubicación de cuadrantes, la identificación de los cambios en x y en y , etc. En el segundo se ubicaron acciones que requerían de las anteriores para identificar el ángulo de inclinación de la recta en el plano, reconocer a la pendiente como razón de cambio y el cálculo de razones de cambio. Por otro lado, el dominio cognitivo de Conexión, demanda acciones como: el uso de los conocimientos adquiridos en el dominio de reproducción, para aplicarlos en la resolución de problemas de fenómenos de variación y cambio. Por último, el dominio cognitivo de Reflexión, requiere acciones más complejas como la interpretación y análisis de situaciones de variación donde la razón de cambio juega un papel fundamental.

Dominio Reproducción. La escasez de conocimientos previos configuraba un precario nivel de partida. Sin embargo, presumimos que las retroalimentaciones contribuyeron en la mejora de su aprendizaje de este nivel cognitivo y por tanto crearon condiciones necesarias para el alcance de la meta. En el diagnóstico, se notó que, el 85% de los estudiantes tenían deficiencias elementales que no les

permitían alcanzar las dos metas planteadas para este dominio. Al final, se logra reducir la brecha de manera considerable, ya que el 80% de los estudiantes participantes dieron evidencias en el pos-test de haber alcanzado las metas propuestas. (figura 3).

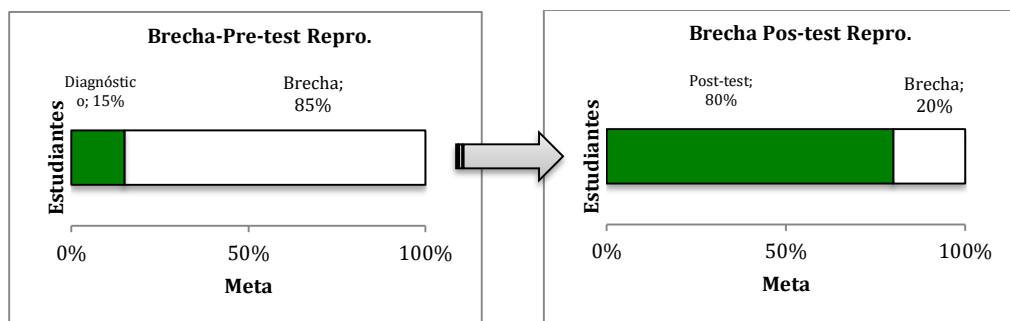


Figura 3. Brechas en el dominio de reproducción.

Lo anterior significa que los estudiantes pasaron de no reconocer los cuadrantes en el plano, de no poder ubicar puntos, de no poder calcular los Δx y Δy ; y de no relacionar a la pendiente con razón de cambio, a utilizar estos elementos para poder calcular de manera correcta la razón de cambio. Lo que equivale a alcanzar la meta propuesta. (Tablas 5 y 6).

Meta: Ubica puntos en el plano e identifica los cambios en x y en y .

DIAGNÓSTICO ¿Cómo voy?	META ¿A dónde voy?	RETROALIMENTACIONES ¿Qué sigue?	EFECTO
<ul style="list-style-type: none"> • El 60% de los estudiantes, no reconocían los cuadrantes, tenían la concepción de punto euclidiano no cartesiano. • El 60% no asociaban el signo de las coordenadas con la dirección. 	Que sea capaz de identificar y representar los cambios en x e y .	<ul style="list-style-type: none"> • Actividades en clase y de tareas para ubicar cuadrantes, puntos y su sentido variacional. • Ubicación de puntos en el plano, en el pizarrón. • Explicitación de errores y corrección por parte de los alumnos y del profesor. • Trabajo en binas usando la coevaluación y la validación. • Se proporcionaron más ejemplos de los planificados. 	<ul style="list-style-type: none"> • El 85% de los estudiantes ubican de manera correcta los puntos en el plano. • El 85% reconocen las coordenadas de un punto, con dirección dependiendo del signo.
<ul style="list-style-type: none"> • El 100% no podían representar en el plano los cambios de x y de y. • Ignoraban el 85% que los cambios en x ocasionan cambios en y. 	Que sea capaz de identificar y representar los	<ul style="list-style-type: none"> • Se plantean actividades de reforzamiento para estimar y calcular los Δx y Δy. • Reflexión sobre los significados variacionales de Δy y Δx. 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocen y calculan los cambios en x, así como los cambios correspondientes en la variable

<ul style="list-style-type: none"> • No relacionaban los incrementos vistos en Física con los cambios. 	cambios en x e y .	<ul style="list-style-type: none"> • Reflexión sobre la correlación del Δy y Δx. 	dependiente y , el 85% de los estudiantes.
---	------------------------	---	--

Tabla 5. La retroalimentación y sus efectos. Reproducción, nivel elemental.

Meta: Reconoce a la pendiente de la recta, como razón de cambio y le da significado. Calcula razones de cambio.

DIAGNÓSTICO ¿Cómo voy?	META ¿A dónde voy?	RETROALIMENTACIONES ¿Qué sigue?	EFECTO
<ul style="list-style-type: none"> • El 70% tenían idea de ángulo como arco, no como giro; no podían construir ángulos, usando juego geométrico. • El 50% no podían medir ángulos, con el transportador. 	Que reconozca, represente y puedan medir ángulos.	<ul style="list-style-type: none"> • Se ejemplificó mediante el giro de una pluma simulando las manecillas del reloj. • En el pizarrón se construyó el ángulo mediante el giro de un segmento. • En binas, se realizaron actividades de construcción y medición de ángulos con transportador. 	<ul style="list-style-type: none"> • El 60% reconocen y representan ángulos y los miden de manera correcta
<ul style="list-style-type: none"> • El 90% no establecían la relación entre pendiente y el ángulo de inclinación de la recta. • El 90% sólo asociaba a la pendiente con: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, sin significado • El 80% no identificaban el ángulo de inclinación de la recta. • El 80% no reconocían la relación entre la pendiente y la tangente trigonométrica. 	Identificar el ángulo de inclinación de la recta. Reconocer a la pendiente de la recta como tangente trigonométrica del ángulo de inclinación.	<ul style="list-style-type: none"> • Se proporcionó información sobre los triángulos rectángulos formados entre la recta y el eje x. • Actividades para discernir entre el ángulo de inclinación y su suplemento. • Repaso sobre equivalencias de pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $\tan \theta = \frac{\text{Cat. Op.}}{\text{Cat. Ad.}}$ 	<ul style="list-style-type: none"> • El 96% reconoce a la pendiente de la recta como la razón trigonométrica tangente del ángulo de inclinación. • 90% relacionan a la pendiente con la razón de cambio y la razón trigonométrica, incluso algunos la llaman como "m". • Realizan representaciones de la razón de cambio apoyándose en el triángulo característico el 70%

<ul style="list-style-type: none"> • El 100% consideraban a la pendiente inconexa con la razón de cambio; consideraban a la pendiente como estática. • El 80% No podían cuantificar los cambios de x y de y. • Para el 40% era indistinto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ • El 80% no le daban significado a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 	<p>Reconocer a la razón de cambio como pendiente de la recta.</p> <p>Encuentra la razón de cambio dados dos puntos del plano y la expresión analítica.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Repaso sobre ubicación de catetos e hipotenusa en un triángulo rectángulo. • Repaso sobre la representación de la tangente como razón trigonométrica en el plano. • Se induce a representar la pendiente de la recta como razón de cambios. • Actividades para calcular la razón de cambio a partir de la pendiente de la recta. 	<ul style="list-style-type: none"> • El 70% de los estudiantes lograron calcular la razón de cambio promedio en el plano analítico y gráfico. • El 70% reconocen a la pendiente de la recta como la razón de cambio y le dan significado, incluso algunos la llaman como “m”. • El 70% Realizan representaciones de la razón de cambio apoyándose en el triángulo característico.
---	--	---	--

Tabla 6. La retroalimentación y sus efectos reproducción, nivel básico.

Dominio Conexión. La meta propuesta para este dominio fue que los estudiantes resuelvan problemas en los que están presentes fenómenos variacionales usando la razón de cambio. Esta meta plantea mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos con el fin de alcanzar una solución.

El diagnóstico realizado para este fin, identificó una brecha hacia la meta similar al caso anterior. En este caso el 70% de los estudiantes no contaban con los conocimientos y habilidades básicas para trascender, del cálculo de la razón de cambio en el plano intramatemático al plano situacional de la vida real. Para ello eran necesarios conocimientos y habilidades tales como: identificar las variables independiente y dependiente, reconocer los incrementos en el contexto de una situación variacional, interpretación de las unidades involucradas en diferentes fenómenos, así como la interpretación del significado de la razón de cambio en diferentes contextos.

En esta parte, las retroalimentaciones, las centramos en proporcionar información acerca del nivel que poseían los estudiantes respecto a la meta y en ayudar a reducir la brecha existente. En particular se retroalimentó proporcionando diferentes ejemplos de situaciones variacionales, se utilizaron representaciones en el plano cartesiano de las situaciones, primero de la función correspondiente y posteriormente sobre los Δx y Δy , y se orientó a los estudiantes hacia el descubrimiento de nuevas unidades de medida de razones de cambio dependiendo del contexto.

La valoración del efecto de la retroalimentación en este dominio, se realiza considerando el estatus inicial de los estudiantes. En el pre-test se evidencia que el grupo en promedio obtiene 24% del puntaje, al final del proceso, el promedio es del 70%. Por medio de los diagnósticos específicos realizados en clase. Los resultados indican que se redujo la brecha existente al principio, ya que el diagnóstico indicó que el 76% de los estudiantes manifestaban escasez de conocimientos y habilidades en los aspectos básicos, antes mencionados, como son la resolución de problemas de fenómenos variacionales. En el



post-test se obtuvo como resultado que el 70% de estudiantes alcanzan la meta propuesta. Estos datos indican una apreciable mejoría en este dominio cognitivo, como resultado de la retroalimentación, estos evidencian un avance considerable en el aprendizaje de los estudiantes. En la figura 3, se representan de manera cuantitativa estos resultados.

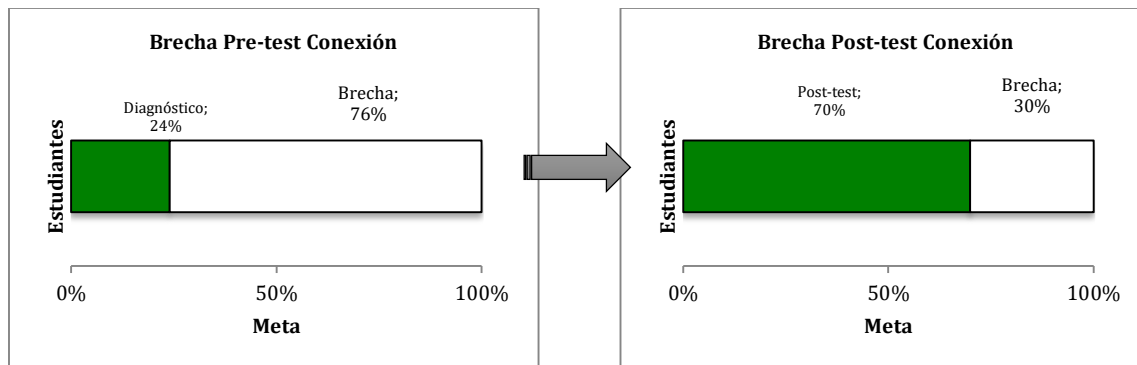


Figura 4. Brechas en el dominio de Conexión.

En términos cualitativos esto significa que los estudiantes pasaron: de no identificar y confundir a las variables x e y , así como a los Δx y Δy correspondientes a la interpretación de un fenómeno variacional; de no reconocer a la razón de cambio en un fenómeno; de no interpretar las razones de cambio en diferentes contextos; a conectar el concepto de razón de cambio con situaciones de rapidez, velocidad, aceleración o incluso con la pendiente misma. En la tabla 7 se detalla mejor todos estos resultados.

Meta: Resuelve problemas de fenómenos variacionales usando la razón de cambio.

DIAGNÓSTICO ¿Cómo voy?	META ¿A dónde voy?	RETROALIMENTACIONES ¿Qué sigue?	EFECTO
<ul style="list-style-type: none"> El 80% no recordaban los conceptos de rectas tangentes y secantes. El 80% no interpretaban en el contexto gráfico la razón de cambio en una curva. 	Interpreta el significado en el contexto gráfico de la razón de cambio de una situación no lineal.	<ul style="list-style-type: none"> Se recordó el concepto de recta tangente y secante a una circunferencia de manera grupal en el pizarrón. Se extrapola el concepto de secante a una circunferencia a secante a una curva cualquiera. 	<ul style="list-style-type: none"> El 70% interpretan el significado de la razón de cambio en el contexto gráfico de una función no lineal.
<ul style="list-style-type: none"> El 70% no identificaba las variables en un fenómeno variacional y no reconocían la 	Identifica los Δx y Δy en el contexto de un fenómeno variacional.	<ul style="list-style-type: none"> Se proporcionan diferentes ejemplos de fenómenos de variación y se resuelven de manera grupal en el pizarrón. 	<ul style="list-style-type: none"> El 70% de los estudiantes logran conectar el concepto de razón de cambio con situaciones de la vida real, esto se

<p>relación entre estas en un fenómeno.</p> <ul style="list-style-type: none"> • El 60% No reconocían los Δx y Δy, en los problemas planteados. 		<ul style="list-style-type: none"> • Se induce a que se haga la representación de la situación en el plano. • Se utilizan como ejemplos fenómenos en los que la variable independiente es el tiempo. 	<p>demostró al resolver problemas utilizando a la razón de cambio promedio.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • El 70% no podían representar un fenómeno en el plano cartesiano. • El 60% confundían la variable independiente con la dependiente al representarlas en el plano, así como Δx con Δy. 	<p>Representa de manera gráfica los Δx y Δy, así como la razón de cambio de un fenómeno de variación.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Se resuelve un ejemplo de variación usando la representación gráfica. • Se pasan al pizarrón de manera aleatoria a estudiantes a responder preguntas específicas y el grupo lo valida. • Se refuerza la representación en el plano de Δx con Δy, representando a éstos con segmentos. 	<ul style="list-style-type: none"> • El 70% de los estudiantes interpreta correctamente el significado de las razones de cambio de diferentes magnitudes o unidades de medida.
<ul style="list-style-type: none"> • El 80% no identificaban las razones de cambio correspondientes en diferentes situaciones de variación. • El 100% no interpretaba el significado de las razones de cambio de diferentes magnitudes. 	<p>Resuelve problemas de fenómenos variacionales, usando la razón de cambio</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Se resuelven diferentes ejercicios grupal e individual en diferentes contextos: pendientes del suelo, incremento del dólar, velocidad, rendimiento, índices, gasto, etc. • Se pide de manera secuencial, identificar las magnitudes variables, cuantificar los cambios, calcular la razón de cambio. 	<ul style="list-style-type: none"> • El 70% de los estudiantes conectan la razón de cambio con situaciones de la vida.

Tabla 7. La retroalimentación y sus efectos, conexión.

Dominio Reflexión. La meta propuesta en este dominio se centró en que el estudiante interprete y analice razones de cambio en problemas que contienen situaciones de variación y cambio. Para ello se plantearon problemas que requieren cierta comprensión y reflexión por parte del estudiante, la habilidad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distintas procedencias. Las tareas de este nivel requieren competencias más complejas, implican un mayor número de elementos, exigen generalización y explicación o justificación de los resultados. En particular, se propusieron y trabajaron problemas de variación y cambio que requerían de su interpretación y de generalización de las propiedades de las razones de cambio en relación con el comportamiento de las funciones.

Los resultados del diagnóstico indicaron que casi la totalidad de los estudiantes no contaban con los conocimientos ni las habilidades necesarias para alcanzar la meta, tales como: interpretar el



significado de los cambios en una variable y su efecto en la otra, concebir a la razón de cambio como un índice o indicador, interpretar el significado de la razón de cambio en diferentes fenómenos así mismo como interpretar el significado de casos especiales de razón de cambio.

La brecha existente entre el nivel de partida y la meta planteada era mucho más amplia que en los casos anteriores. Esto es comprensible ya que la naturaleza de este dominio es mucho más compleja que la de los anteriores, exige habilidades cognitivas superiores.

Las retroalimentaciones se proporcionaron ayudando a los estudiantes a representar e interpretar los diferentes fenómenos de variación y cambio en el plano cartesiano, de modo que pudieran dar significado a las diversas situaciones. En el plano gráfico se analizó el comportamiento variacional de los fenómenos y, posteriormente, se reinterpretó este comportamiento en el contexto del problema. La interpretación se logró proporcionando información que ayudaba a la traducción de las diferentes situaciones al modelo matemático y su relación con el significado de la razón de cambio en contextos de variación específicos. El análisis se desarrolló en torno del descubrimiento y utilización de la relación de generalización entre el signo de las razones de cambio y el comportamiento de las funciones. Estas tienen que ver con el crecimiento de las funciones cuando $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, el decrecimiento de las funciones cuando $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$; y el caso de la estabilización de las funciones, es decir cuando $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, así como casos del fenómeno en el que se presentan razones de cambio iguales.

Respecto del efecto de la retroalimentación valorada por el cambio observado, en el aprendizaje de los estudiantes mediante la comparación de los resultados del diagnóstico con los resultados del post-test, ambos respecto a la meta, se puede afirmar que el diagnóstico indicó que ningún estudiante tenía desarrollada las habilidades para este dominio cognitivo. Las actividades de diagnóstico realizado en las sesiones correspondientes a este dominio, evidenciaron que todo el grupo no contaba con los conocimientos necesarios para alcanzar la meta. Contrastando este resultado con los resultados del post-test, se encontró que el 28% de los estudiantes alcanzaron la meta propuesta (contestaron correctamente al menos la mitad de las preguntas relativas a este dominio), mientras que 24% alcanza medianamente esta meta (contestaron correctamente un número mayor a la tercera parte y menor a la mitad de las preguntas planteadas), estos últimos sólo interpretan y analizan razones de cambio en algunos fenómenos variacionales. (Figura 5).

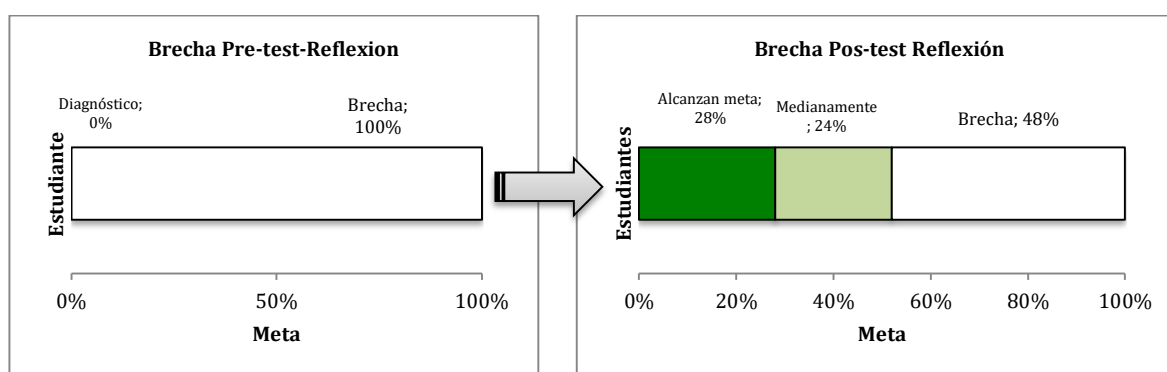


Figura 5. Brechas en el dominio de Reflexión.

Cualitativamente, esto significa que al principio prácticamente la totalidad del grupo no tenía los conocimientos y habilidades básicas para la interpretación y análisis de la razón de cambio en fenómenos

variacionales. Mientras que al final un poco más de la cuarta parte de estudiantes pudieron alcanzar esta meta de manera satisfactoria. (Tabla 8).

Meta: Interpreta y analiza razones de cambio en fenómenos variacionales.

DIAGNÓSTICO ¿Cómo voy?	META ¿A dónde voy?	RETROALIMENTACIONES ¿Qué sigue?	EFECTO
<ul style="list-style-type: none"> • El 90% no interpretaban el significado de los cambios en una variable y cómo esto afecta a la otra. 	<p>Interpreta los cambios y la cuantificación de los cambios en un fenómeno variacional, así como la correlación entre ellas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Se realizaron representaciones en el plano cartesiano de la función. • Se representan los cambios de manera gráfica, por medio del “triángulo característico”. • Realizando cambios en la variable independiente se pide el cambio en la variable dependiente. 	<ul style="list-style-type: none"> • El 34% de los estudiantes del grupo son los que logran alcanzar de manera satisfactoria este nivel, es decir: • Pueden resolver problemas con el uso de la razón de cambio promedio. • Interpretan y realizan análisis del comportamiento variacional de funciones.
<ul style="list-style-type: none"> • El 90% no concebían a la razón de cambio como un índice. • El 90% no interpretaban el significado de la razón de cambio en diversas situaciones. • El 90% no interpretaban el significado de las unidades de medida al calcular razones de cambio. 	<p>Interpreta la razón de cambio en diferentes fenómenos variacionales.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Se resuelven de manera grupal problemas de fenómenos variacionales, sobre pendiente, velocidad, rendimiento, tasas de cambio, índices, gasto. • Las razones de cambio encontradas en cada fenómeno atendido, se definen según el contexto. 	<ul style="list-style-type: none"> • El 28% de los estudiantes alcanza medianamente este nivel, al resolver correctamente 3 problemas de 9 de este nivel. • El 38% de los estudiantes no logra alcanzar este nivel, ya que resuelven de cero a dos ejercicios.



<ul style="list-style-type: none"> • El 90% no le daban significado a la razón de cambio igual a cero, la relacionaban con el valor de cero de la función. • El 80% confundían el valor positivo o negativo de la razón de cambio con el valor de la función. • El 80% a razones de cambio iguales le asociaban valores de funciones iguales. 	<p>Interpreta casos especiales de razón de cambio: cero, negativa, positiva, iguales.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Se utiliza la representación gráfica y se analizan diferentes casos especiales de la razón de cambio, vista esta como la pendiente de la recta secante a la curva. • Se analizan el significado de la razón de cambio como pendientes de una recta con pendiente cero, positiva y negativa, significado de pendientes iguales. 	
<ul style="list-style-type: none"> • El 100% no integraban los significados de la razón de cambio en diferentes casos, para analizar un fenómeno y describir su comportamiento variacional. 	<p>Analiza el comportamiento variacional de un fenómeno.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Se analizan las relaciones entre el signo de las razones de cambio y el comportamiento de las funciones. 	

Tabla 8. La retroalimentación y sus efectos, reflexión.

5. Conclusiones

En este trabajo nos planteamos como objetivo valorar el efecto que tiene el uso de la retroalimentación en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática. El contenido matemático curricular tratado para tal fin se refiere a la razón de cambio, en concreto nos propusimos dar alcance al objetivo relativo a la interpretación y análisis de la razón de cambio con estudiantes de bachillerato. Para dar alcance al objetivo de la investigación se diseñó, aplicó y valoró una intervención didáctica orientada por el método de investigación acción y fundamentada en el marco de la evaluación para el aprendizaje. La valoración fue hecha en dos niveles, en un primer nivel se hace valorando el nivel alcanzado por parte de los estudiantes respecto del objetivo perseguido con las secuencias aplicadas, en un segundo nivel se valora el efecto de la retroalimentación comparando el estatus inicial de los estudiantes con su estatus final.

Los resultados de la primera valoración nos permitieron concluir que se obtuvieron avances significativos, ya que más de la mitad del grupo de estudiantes, al concluir las secuencias demostraron: haber desarrollado la capacidad de calcular de manera correcta la razón de cambio promedio, así como de interpretar y analizar en el plano gráfico a la razón de cambio (relativo a los dominios cognitivos reproducción y conexión), esto es un alcance medio de la meta principal prevista. Mientras que un poco

más de la cuarta parte de los estudiantes, logra un nivel de desarrollo superior ya que alcanzan el nivel cognitivo de reflexión, esto significa que lograron desarrollar las habilidades para resolver problemas con el uso de razón de cambio en distintos contextos, logran interpretar y analizar la razón de cambio en distintos contextos, este es considerado un alcance completo de la meta. Por tanto, se concluye que las retroalimentaciones brindadas contribuyeron a la mejora del aprendizaje de los estudiantes.

Respecto de la valoración en el sentido idiográfico, referida a la contrastación con el nivel inicial y el nivel alcanzado, se concluye que las retroalimentaciones propiciaron que los estudiantes pudieran alcanzar un nivel de aprendizaje superior, al avanzar cada vez con metas planteadas acorde a su nivel de desempeño real, fijándose metas a corto plazo logrando así un avance significativo al final de la experiencia. En este sentido la valoración que hacemos fue efectiva, ya que como se evidencia en el diagnóstico, en general el grupo con el que se trabajó era un grupo de muy bajo rendimiento en cuanto al tema de interés, muestra de ello es que más de la mitad tenían problemas al principio, tan elementales como ubicar puntos en el plano, problemas con el concepto de ángulo, problemas con medición de ángulo, dirección del ángulo, problemas con reconocer los catetos e hipotenusa en un triángulo rectángulo, dificultades para reconocer la razón trigonométrica tangente, así como dificultades con la pendiente de una recta.

Al finalizar se logró llevar a la mayoría de estudiantes a que pudieran ubicar de manera correcta puntos en el plano; que trascendieran de la concepción estática de función a una concepción variacional; a que pudieran representar, medir e interpretar aceptablemente los ángulos; a que pudieran calcular la pendiente de la recta, la interpretación de esta en diferentes contextos; a reconocer a la razón de cambio promedio y la pendiente como caso particular, a calcularla en el plano matemático y en el plano gráfico. Los que mostraron un rendimiento medio y alto (contaban con el dominio de reproducción y medianamente el de conexión) al principio, se llevaron al nivel más alto (al nivel de reflexión) de desarrollo respecto de la razón de cambio promedio. Es decir, éstos alcanzaron los conocimientos y habilidades requeridas para la resolución de problemas variacionales con el uso de la razón de cambio promedio en diferentes contextos, así como para el análisis e interpretación de esta.

Las retroalimentaciones proporcionadas se orientaron en dos sentidos, en un sentido macro y en un sentido micro. La primera responde al objetivo planteado en las secuencias didácticas y que se concretó en el diseño propiamente de estas, y fueron de uso del profesor-investigador, insertas en las etapas de apertura, desarrollo y cierre. En un sentido micro las retroalimentaciones se proporcionaron de manera personalizada, continua y puntual. Estos dos sentidos utilizados en la retroalimentación ayudaron a que se alcanzara mejoría notable en el aprendizaje en los estudiantes del grupo. La retroalimentación a nivel macro ayudó al diseño previo y a orientar al profesor para modificar cuando era necesario las actividades, la retroalimentación a nivel micro ayudó a los estudiantes para que pudieran avanzar de manera gradual y sistemática hacia la meta, esto los motivó y orientó en su proceso de mejora de su aprendizaje.

Este trabajo, por una parte, aporta evidencia de que usando de manera planificada y sistemática la retroalimentación, se puede mejorar el aprendizaje en el aula. Por otra parte, este trabajo deja en claro el papel tan importante que el profesor debiera jugar en el proceso de enseñanza y aprendizaje además del que ya realiza. Particularmente en proporcionar información a sus estudiantes sobre el nivel de desempeño real, el nivel esperado y la brecha existente entre ambos, pero sobre todo de las decisiones y actividades de retroalimentación específicas que tiene que implementar para reducir esa brecha. Aquí radica una parte importante del éxito en el aprendizaje de la matemática, en evaluar continuamente para retroalimentar lo necesario y mejorar el aprendizaje. En esto justamente radica la tesis más importante de la evaluación para el aprendizaje y que aquí hemos utilizado.



La anterior es una importante contribución, al campo de la Matemática Educativa desde el punto de vista empírico, porque demuestra que es posible mejorar al aprendizaje a través de la práctica docente basada en un marco al alcance de los profesores. Además, mediante este trabajo se contribuye al fortaleciendo la Línea de Generación y Aplicación del Conocimiento: Evaluación de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, línea que se desarrolla al interior del Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) de la UAGro.

Respecto de las limitaciones de la investigación, en el aspecto teórico, podemos concluir que aunque diversos enfoques reconocen la importancia del uso de la evaluación formativa y en particular de la retroalimentación, como el enfoque socio-constructivista y otros aunque no de manera explícita; hace falta mayor sustento teórico, mayor fundamentación, sobre como este elemento: la retroalimentación se puede insertar en las diferentes metodologías de e-a. En este sentido, a pesar de que a la evaluación formativa, se le concibe como parte del proceso de e-a, en las teorías y metodologías actuales aún se le considera por un lado la enseñanza y por otro a la evaluación, a veces se le puede interpretar incluso que primero deba ocurrir la enseñanza para después evaluar. En el presente trabajo, se adapta el modelo de retroalimentación de Hattie y Timperley (2007), en la e-a planeada, en la que se utiliza como línea principal de orientación, la evaluación a partir de la retroalimentación. Sin embargo, hace falta mayor profundización teórica para poder integrar de manera natural y justificada desde este plano, estos elementos en el proceso de e-a.

Respecto de las limitaciones en el aspecto metodológico. Es importante mencionar que aunque el modelo de evaluación adoptado tanto como el diseño las actividades e instrumentos prevén la coevaluación, haciendo uso de la retroalimentación por pares, la realidad de aula relacionado al nivel académico limitado de los estudiantes que participaron en esta investigación, no fue posible llevarla a cabo de manera estricta y sistemática, en este sentido las rúbricas fueron utilizadas (tanto el llenado como la interpretación) por los profesores. Esto se justifica por la naturaleza cíclica de la metodología investigación acción, la cual brinda la facilidad de modificar para adaptar los diseños de manera constante a la realidad estudiada, de aquí que no se logra reportar en el presente trabajo todas las modificaciones y ciclos recorridos. Para el uso de la coevaluación y de las rúbricas como instrumentos se sugiere para futuras investigaciones capacitar a los estudiantes para que se familiaricen y puedan emplearlas de manera correcta. También es necesario mencionar las limitaciones del método cualitativo utilizado y la necesidad de utilizar los métodos cuantitativos, e incluso los mixtos, que permitan ponderar con mayor precisión la relación causa-efecto que la retroalimentación tiene o puede tener en la mejora del aprendizaje de la matemática.

Bibliografía

- Alkin, M. (1969). Evaluation theory development. *Evaluation Comment*, 2, 1, 2-7.
- ARG. (2002). *Assessment For Learning 10 principles, research-based principles to guide classroom practice* (1.^a ed.). Londres: Assessment Reform Group.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp.97-140), Grupo Editorial Iberoamérica.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe E., Larsen, S., Hsu, E (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 33, No. 5, pp. 352–378.
- Coll, C. (2001). Constructivismo y práctica docente. *Aula de innovación educativa*, (102), 71.

- Coll, C., Barberà, E., & Onrubia, J. (2000). La atención a la diversidad en las prácticas de evaluación. *Infancia y Aprendizaje*, 23(90), 111-132. <https://doi.org/10.1174/021037000760087991>.
- Cronbach, L. J. (1982). *Designing evaluations of educational and social programs*. Chicago: Jossey-Bass.
- Cronbach L. J. (2000). Course Improvement through Evaluation. In: Stufflebeam D.L., Madaus G.F., Kellaghan T. (eds) *Evaluation Models. Evaluation in Education and Human Services*, vol 49. Springer, Dordrecht.
- Díaz, F. (2006). *Enseñanza situada: Vínculo entre la escuela y la vida*. McGraw Hill (1.ª ed.). México D. F.
- Díaz-Barriga, A (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Profesorado Revista de Currículum Y Formación Del Profesorado*, 17(3), 11–33.
- Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 7(3), 195–218.
- Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 5 (3), pp. 225-250.
- Dolores, C., & García, J. (2016). Concepciones de Profesores de Matemáticas sobre la Evaluación y las Competencias. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 92(1), 71-92.
- Escudero, T. (2003). Desde los tests hasta la investigación evaluativa actual. Un siglo, el XX, de intenso desarrollo de la evaluación en educación. *Revista ELección de Investigación Y Evaluación Educativa*, 9(1), 11–43. Retrieved from http://www.uv.es/RELIEVE/v9n1/RELIEVEv9n1_1.
- Glaser, R. (1963). Instructional technology and the measurement of learning outcomes: some questions. *American Psychologists*, 18, 519-521.
- Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81-112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>.
- Lewin, K. (1946). Action Research and Minority Problems. *Journal of Social Issues*, 2(4), 34-46. <https://doi.org/10.1111/j.1540-4560.1946.tb02295.x>.
- OCDE, & INECSE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003 Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Madrid: I.N.E.C.S.E.
- Ramaprasad, A. (1983). On the definition of feedback. *Behavioral Science*, 28(1), 4–13.
- Rodríguez, D., & Valldeoriola, J. (2009). *Metodología de la investigación*. Barcelona, España: Eureka Media, SL.
- Sadler, D. R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science*, 18(2), 119-144. <https://doi.org/10.1007/BF00117714>.
- Scriven, M. (1967). The methodology of evaluation. En *Perspectives of Curriculum Evaluation*, (pp. 39-83). AERA Monograph 1. Chicago: Rand McNally and Company.
- SEP. (2011). *Lineamientos de evaluación del aprendizaje*. (DGB, Ed.), *Secretaría de Educación Pública*. México D. F.: SEP.
- Stufflebeam, D. L. (1968). *Evaluation as enlightenment for decision making*. Columbus. Ohio State University. Evaluation Center.
- Stufflebeam, D. L. (2000). *Guidelines for developing evaluation checklists*. recuperado de: https://wmich.edu/sites/default/files/attachments/u350/2014/guidelines_cdc.pdf, el 27 de octubre de 2019.
- Stufflebeam, D. L., & Shinkfield, A. J. (1987). *Evaluación sistemática: guía teórica y práctica* (1.ª ed.). Barcelona, España: Paidós.



- Tobón, S., Rial, A., Carretero, M. A., & García, J. A. (2006). *Competencias, calidad y educación superior*. (J. V. Joven, Ed.) (1st ed.). Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Tyler, R. (1942). General Statement on Evaluation, *The Journal of Educational Research*, 35:7, 492-501, DOI: [10.1080/00220671.1942.10881106](https://doi.org/10.1080/00220671.1942.10881106).
- William, D. (2011). What is assessment for learning? *Studies in Educational Evaluation*, 37(1), 3–14. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2011.03.001>.

Antonio Zavaleta Bautista. Universidad Autónoma de Guerrero, Av. Javier Méndez Aponte No. 1, Col. Servidor Agrario, Chilpancingo Gro. México C.P. 39070, Es Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, por la UAGro, trabaja línea de generación y aplicación del conocimiento: evaluación de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Actualmente es profesor del posgrado en Docencia de la Matemática de la UAGro.
E-mail: azavaleta@uagro.mx

Crisólogo Dolores Flores. Centro de Investigación en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, Guerrero, México. Doctor en Ciencias Pedagógicas, con especialidad en Metodología de la Enseñanza de la Matemática por el Instituto Superior Pedagógico “Enrique J. Varona”. Trabaja en la línea de Pensamiento y Lenguaje Variacional, Evaluación y actualmente en Conexiones Matemáticas.
E-mail: cdolores2@gmail.com