NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 105, noviembre de 2020, páginas 189-200

¡PANDEMÓNIUM!
(Problemas Comentados LV)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Soluciones, con el aporte de los lectores, de los problemas propuestos en nuestro artículo anterior (mayo 2020). Metodología para la resolución de problemas en cuatro fases: comprender, pensar, ejecutar y responder. Usamos diagramas, ensayo y error u organización de la información, modelización, en las estrategias de resolución. Los problemas resueltos y propuestos tratan distintos aspectos tales como divisibilidad, geometría, fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes, visión espacial, etc.

Palabras clave Metodología para la resolución de problemas. Estrategias de resolución de problemas. Técnicas como la modelización, ensayo y error, organización de la información o visión espacial son explicadas y usadas en la resolución.

Abstract Solutions, with the contribution of readers, of the problems proposed in our previous article (May 2020). Methodology for solving problems in four phases: understand, think, execute and respond. We use diagrams, trial and error or organization of information, modeling, in resolution strategies. The solved and proposed problems deal with different aspects such as divisibility, geometry, formulas for calculating areas and volumes, spatial vision, etc.

Keywords Methodology for solving problems. Problem solving strategies. Techniques such as modeling, trial and error, organization of information or spatial vision are explained and used in the resolution.

1. Introducción

Ha llegado el PANDEMÓNIUM con el ruido de los políticos y la confusión de los científicos; y nos tiene al borde del desastre. El confinamiento parecía que nos podía dar tiempo para trabajar en estos artículos y mejorar lo que ofrecemos periódicamente. Pero la verdad es que no ha sido así. Nos ha dejados abúlicos, desnortados y con carencia de ideas.

No obstante, aquí tenemos este artículo y sigue la línea de los anteriores. Ver las soluciones a los retos del artículo anterior, analizar los procesos de resolución y las estrategias utilizadas además de proponer unos nuevos retos para que nuestros lectores se sientan impulsados a resolverlos y enviarlos a nuestro correo electrónico.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

Sociedad Canaria *Isaac Newton*
de Profesores de Matemáticas

P R O B L E M A S

2. Últimos retos

Aquí va el primero, extraído de la Prueba Final del Rally Matemático Transalpino nº 27, celebrado en 2019, a cuyos redactores estaremos siempre agradecidos:

Flexiones

Marcos ha decidido seguir un programa de ejercicios físicos para mantenerse en forma. El programa prevé comenzar haciendo 10 flexiones el primer día y añadir cada día un cierto número de flexiones, siempre el mismo. Hoy, habiendo comenzado su programa hace más de una semana, ha batido su récord con 73 flexiones. **¿Cuántos días lleva Marcos con su programa de flexiones? Escribe todas las posibilidades.** Explica cómo has encontrado tus respuestas.

Parece muy a propósito de ese confinamiento al que nos vimos abocados y que a casi todo el mundo lo llevó a la práctica del deporte en casa. Un programa progresivo de flexiones es una buena idea. Uno de nuestros lectores, Francisco Morales Villegas, nos ha enviado su solución a este problema. Como verán, sigue el proceso que desde aquí tratamos de impulsar y lo hace con sus comentarios explicativos muy interesantes. Es de esperar ese esmero, ya que Paco es uno de los muchos componentes del equipo de formadores del Proyecto Matemáticas Newton Canarias.

He aquí su propuesta:

El problema, después de una primera lectura, parece accesible a cursos medios de primaria, aunque se le puede sacar mucho partido en los últimos niveles (5º y 6º). Es interesante para el trabajo de los divisores, que habitualmente se trabajan desconectados de la realidad, y también para ofrecer al alumnado problemas con varias soluciones (poco frecuente).

Proceso de resolución.

Siguiendo las indicaciones del proceso del Proyecto Newton para la resolución de problemas, comenzamos con:

COMPRENDER. *Datos: (es la información que me dan en el problema que no cambia, es información concreta, absoluta, independiente, que se necesita para resolver el problema). Hay un chico que comienza a hacer ejercicio, el programa comienza con 10 flexiones el primer día, el programa contempla que se añadan más flexiones cada día, hoy ha batido su récord con 73 flexiones. Objetivo: (es lo que queremos conseguir, lo que hay que averiguar, o a dónde tenemos que llegar). Saber los días que lleva Marcos en el programa. Relación: (es información que me dan en el problema cambiante, dependiente, que relaciona diferentes elementos del problema, conecta datos entre sí y con el objetivo. La relación da valores relativos, no absolutos). El incremento diario siempre tiene que ser el mismo, lleva más de 7 días con el programa. Diagrama:*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	+1=11	+1=12	+1=13	...					
10									

De la observación del diagrama se sacan algunas conclusiones: 1) El incremento no puede ser par, pues no se llegaría a 73 y 2) Si se parte de 10 y se llega a 73, el incremento deberá ser divisor de 63 (1, 3, 7, 9, 21, 63).

PENSAR. *Elección de una estrategia. Ensayo error. Sería posible, añadiendo de manera exhaustiva incrementos de 1, 2, 3, 4, 5… a las 10 flexiones iniciales hasta llegar a resultados que dieran 3, pero sería largo y el alumnado podría no llegar a tener tiempo de encontrar todas las soluciones. Es frecuente que encontrada una, o a lo sumo dos (dado que el problema me indica que encuentre todas las posibilidades), el alumnado finalice el proceso sin tener claro si puede haber otras soluciones.*

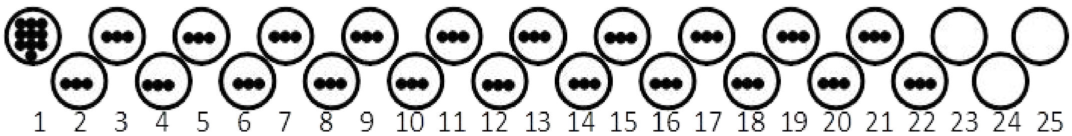
Organización de la información. Partiendo de las observaciones acerca de los divisores de 63, se podría organizar la información para cada divisor.

Inicial	***Incremento diario***	***Días de incremento***	***Total días***
10	*1*	*63:1=63*	*64*
10	*3*	*63:3=21*	*22*
10	*7*	*63:7=9*	*10*
10	*9*	*63:9=7*	*8*
10	*21*	*63:21=3*	*4 (ya no cumple)*

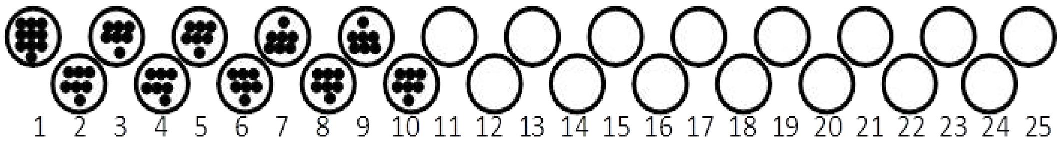
Organización de la información algebraica.

- *10 + 1d = 73   d = 63 días de incremento, más el de inicio → 64*
- *10 + 3d = 73   d = 21 días de incremento, más el de inicio → 22*
- *10 + 7d = 73   d = 9 días de incremento, más el de inicio → 10*
- *10 + 9d = 73   d = 7 días de incremento, más el de inicio → 8*

EJECUTAR. *Modelización. Necesitaríamos 73 fichas, y un número alto de recipientes, o dibujar pequeñas cajitas en el cuaderno que representarían los días, después con cruces o puntitos pondríamos las flexiones realizadas. Sería un proceso lento para los incrementos menores, pero se podría utilizar a modo de comprobación. Tendríamos que saber que los incrementos no pueden ser cantidades cualesquiera, porque en ese caso estaríamos haciendo un ensayo-error con material manipulativo. Las representaciones presentadas, para no hacer muy larga la explicación, corresponden al caso de incrementar 3 y 7 flexiones diarias. Se colocarían 10 en el primer día y se continuaría añadiendo 3 diarios hasta que se nos agotaran las 73 piezas. Después, contaríamos el número de cajitas que han quedado ocupadas, en este caso 22.*



En este caso se colocarían 10 en el primer día y se continuaría añadiendo 7 diarios hasta que se nos agotaran las 73 piezas. Contaríamos el número de cajitas que han quedado ocupadas, ahora 10.



RESPONDER. *Comprobación.* *Veamos si cumplen las 4 soluciones obtenidas las condiciones del problema.*

10 + 63 veces 1 = 73	*64 días*
10 + 21 veces 3 = 73	*22 días*
10 + 9 veces 7 = 73	*10 días*
10 + 7 veces 9 = 73	*8 días*

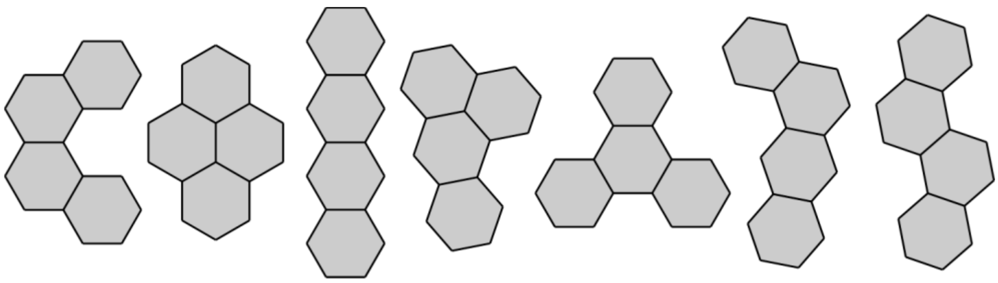
Análisis. Hay cuatro respuestas, coherentes con la pregunta del problema y corresponden a las condiciones que se pedían.

Respuesta. ***Marcos puede llevar con su programa de flexiones 8, 10, 22 o 64 días.***

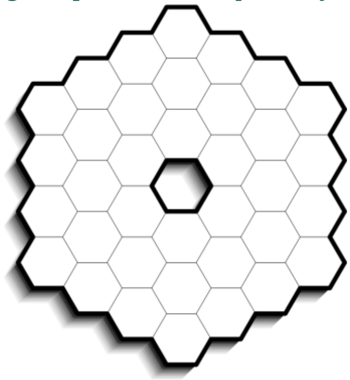
El segundo reto tiene el mismo origen que el anterior.

Juego hexagonal

En la caja de este juego hay muchas piezas. Todas las piezas están compuestas por cuatro hexágonos regulares. Hay siete tipos diferentes de piezas, como muestra la imagen siguiente.



El juego consiste en recubrir completamente el tablero de juego representado aquí abajo, utilizando cada vez un solo tipo de pieza. Es posible rotar y también girar una pieza, pero no deberán estar superpuestas, ni por fuera, ni sobre el agujero central ya presente en el tablero de juego.



Señalar, entre las piezas disponibles, los tipos de piezas que permiten recubrir enteramente el tablero de juego respetando las reglas. Para cada tipo de pieza señalada, dibujar la solución utilizando repetidamente el tablero que se adjunta en el problema.

Proceso de Resolución

COMPRENDER. Datos Piezas formadas por cuatro hexágonos regulares. Siete tipos diferentes de piezas. Hay que recubrir completamente el tablero de juego utilizando cada vez un solo tipo de pieza. Objetivo Señalar qué piezas permiten recubrir enteramente el tablero, respetando las reglas. Para cada tipo de pieza, dibujar la solución. Relación Es posible rotar y también girar una pieza, pero no deberán estar superpuestas ni por fuera, ni sobre el agujero central del tablero de juego. Diagrama El tablero y las piezas que acompañan al problema. Modelo en madera o cartulina o dibujo sobre fotocopias del tablero o sobre papel isométrico.

PENSAR. Estrategias. MODELIZACIÓN, ENSAYO Y ERROR.

EJECUTAR. En primer lugar, comprender que desplazar, girar (sobre el plano; giro) y rotar (voltear en el espacio; simetría) son los movimientos permitidos para colocar cualquiera de las piezas sobre el tablero, que está dividido en hexágonos regulares y que en el centro hay un agujero que no deberá ser recubierto.

Comprender que se debe utilizar un solo tipo de pieza de las siete disponibles para cada recubrimiento y que deberá repetirse hasta recubrir completamente el tablero.

El tablero de juego contiene 36 hexágonos y, como cada pieza está formada por 4 hexágonos (tetrahexos: si quiere saber más sobre este puzle visite nuestra sección de juegos en la revista, artículos correspondiente a los volúmenes 79 y 80), necesitamos siempre 9 piezas (36 : 4 = 9).

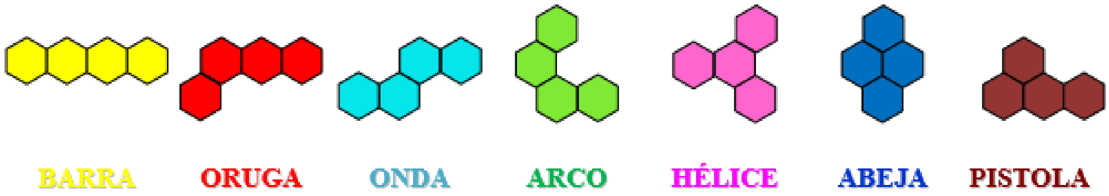
Para resolver el problema utilizaremos las dos estrategias seleccionadas de manera simultánea.

Para la MODELIZACIÓN podemos imprimir en cartulina las piezas y recortarlas en cantidad suficiente para trabajar con ellas sobre el modelo del tablero. O también coloreando poco a poco las piezas del mismo tipo sobre el tablero de juego buscando recubrirlo completamente, prestando atención a lo que cambia si se rotan o voltean. También podemos conseguir un tablero y piezas en madera (ver fotos) para trabajar de manera más sensorial. La colocación de las piezas de distintas maneras, buscando conectarlas entre sí de manera compacta, probando una y otra vez hasta conseguir encontrar las posibles soluciones constituyen el ENSAYO Y ERROR.

El primer paso consiste en probar a colocar las siete piezas y razonar con cuáles se podrá rellenar completamente el tablero y con cuáles no.

Hay que colocar cada pieza de todas las formas posibles y después repetir la misma pieza dos o tres veces hasta deducir si es posible o no rellenar el tablero.

Para distinguir las piezas usaremos los nombres que se les da habitualmente a las mismas:



En los siguientes dibujos coloreados vemos la posición de cada una de las 7 piezas sobre el tablero, cuando está colocada con el máximo de hexágonos en el borde. La barra, el arco, la pistola y la oruga tienen tres; la abeja y la onda, dos, y la hélice uno.


Arco


abeja


barra

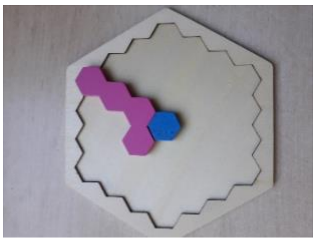

pistola


hélice


oruga

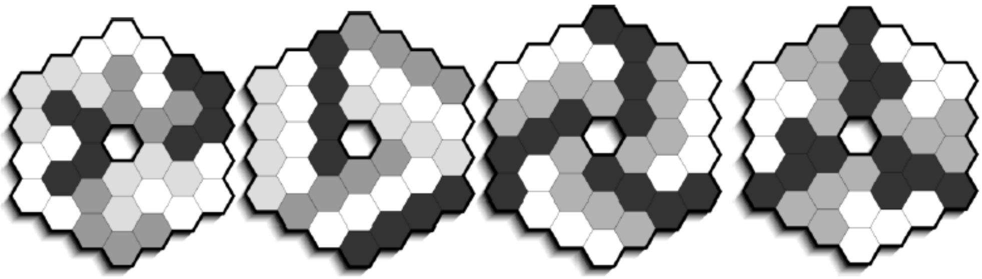

onda

Y aquí vemos con el tablero las distintas posiciones de una misma pieza en distintas partes del tablero.



La primera conclusión es que las piezas denominadas **abeja**, **hélice** y **onda** no permiten, respetando las reglas, el recubrimiento completo. La segunda consiste en encontrar los recubrimientos del tablero para las cuatro piezas restantes: **arco**, **barra**, **oruga** y **pistola**.

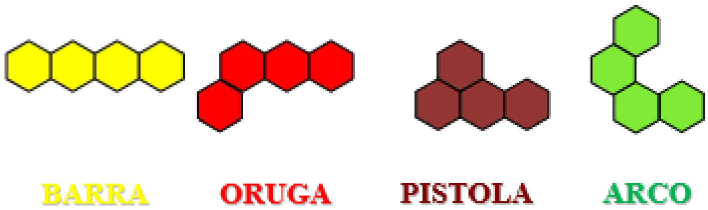
Solución Los cuatro recubrimientos correctos con cada una de las cuatro piezas distintas que lo permiten:



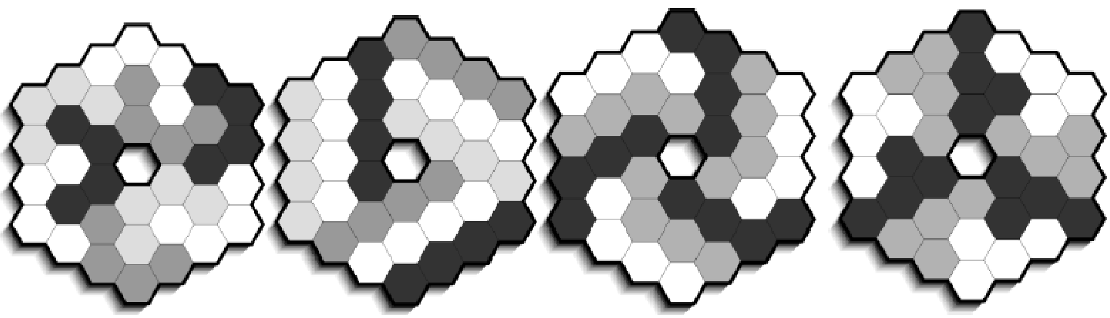
RESPONDER. Comprobación Al trabajar con las dos estrategias mencionadas es fácil probar la imposibilidad para recubrir con las piezas **abeja**, **hélice** y **onda**. Normalmente lo primero que se aprecia es que al adosar dos piezas de esos tipos dejan huecos imposibles de cubrir con otra del mismo tipo, o se salen del tablero o cubren el agujero central.

Análisis Es un problema de solución múltiple.

Respuesta: **Las piezas que pueden recubrir el tablero son:**



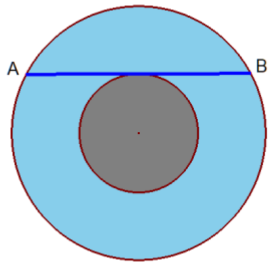
Y los recubrimientos obtenidos con ellas son los siguientes:



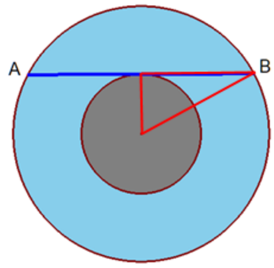
Y el tercero de los retos propuestos en el anterior artículo.

La Fuente

Una fuente tiene un depósito de agua con forma de corona circular. Pablo y Andrea miden con una cuerda la longitud AB, que resulta ser de 10 m. Si la altura de agua es de 33 cm, **¿qué volumen de agua contiene la fuente?**

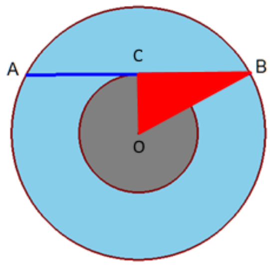


COMPRENDER. Datos Una fuente cuyo base está formada por una corona circular. La profundidad es de 33 cm y la cuerda de la circunferencia exterior que es tangente al círculo interior, mide 10 m. Objetivo Calcular el volumen de agua que contiene. Relación Los círculos son concéntricos, y podemos establecer una relación de perpendicularidad entre la tangente que nos dan y un radio del círculo pequeño. Diagrama Con un compás y una regla, o con dos objetos planos circulares de tamaños apropiados (la boca y el fondo de un vaso de plástico, por ejemplo), podemos dibujar un diagrama de la fuente como el que se muestra en el enunciado. Luego trazamos la tangente AB y el radio pequeño r. A la circunferencia exterior le asignamos un radio R.



PENSAR. Estrategias: ORGANIZAR LA INFORMACIÓN mediante conocimientos geométricos.

EJECUTAR. Formar un triángulo rectángulo con los radios y la mitad de la cuerda. Calcular el área de la corona circular y multiplicando por la profundidad de la fuente, hallamos el volumen de la misma. Tenemos que transformar los 33 cm de altura en m.



Aplicar las fórmulas de superficie de un círculo $A = \pi r^2$ y el Teorema de Pitágoras. La corona circular tiene un área que es la diferencia entre las superficies de los círculos.

Solución: Formado el triángulo OBC, el dato numérico que conocemos es el cateto CB, que mide la mitad de AB: 5 m. El área de la corona circular es $A = \pi R^2 - \pi r^2$. Y como podemos ver en la figura, en el triángulo OBC la hipotenusa mide R, un cateto mide r y el otro 5 m, por tanto:

$$R^2 = r^2 + 5^2, \quad A = \pi(25 + r^2) - \pi r^2 = 25\pi + \pi r^2 - \pi r^2 \;\; 25\pi \approx 78.54 \text{ m}^2$$

33 cm = 0.33 m, luego el volumen pedido es 78.54 x 0.33 = 25.92 m^3, prácticamente 26 m^3.

RESPONDER. Comprobación: Podríamos utilizar Geogebra; realizamos el dibujo de la fuente como dos cilindros concéntricos con las medidas dadas y, después, pedir el cálculo aproximado del volumen.

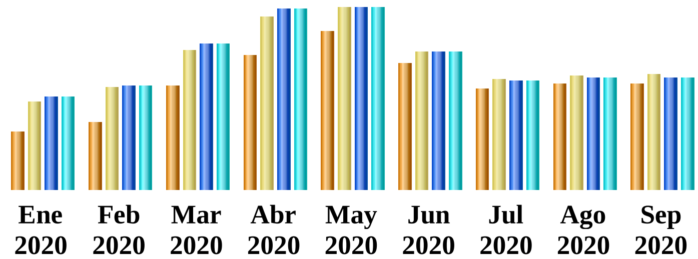
Análisis El problema es de solución única.

Respuesta: **El volumen de la fuente es de 25.92 m^3.**

3. Aumento de lectores

No sabemos aún cómo saldremos de esta situación en la que estamos, pero es de suponer que en algún momento algunos de nosotros volveremos a estar en una cuarentena o en un confinamiento. Aquellos que quieran aliviar su encierro resolviendo problemas encontrarán aquí unos cuantos retos.

Y parece ser que el proceso que hemos pasado ha propiciado el interés de los lectores. Al menos eso muestra la estadística de accesos a algunos de nuestros artículos, como podemos comprobar en la siguiente gráfica.



Se pone de manifiesto el aumento de lectores durante los meses de marzo, abril y mayo, sobre todo. Estos datos sirven, en cierto modo, para comprobar los picos de la pandemia durante el confinamiento y con la segunda oleada es de esperar que en los meses de septiembre, octubre y noviembre, suban de nuevo el número de visitas a NÚMEROS.

Mes	Visitantes distintos	Número de visitas	Páginas	Solicitudes
Ene 2020	3027	4662	5498	5498
Feb 2020	3579	5345	6282	6282
Mar 2020	5523	7415	8822	8822
Abr 2020	7039	9136	10865	10865
May 2020	8362	9563	10981	10981
Jun 2020	6640	7327	8417	8417
Jul 2020	5263	5747	6474	6474
Ago 2020	5550	6045	6791	6791
Sep 2020	5584	6060	6794	6794
Total	50567	61300	70924	70924

Los países que más han acudido son los que, ahora mismo, presentan valores peores en cuanto a los contagios y la difusión del virus COVID-19 en América del Norte, del Sur y Europa.

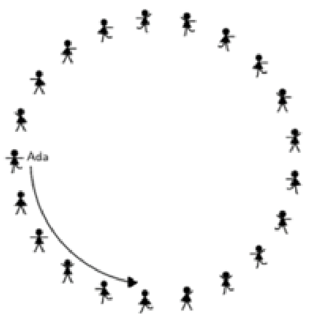
	Países		Páginas	
?	Desconocido	ip	4486	
	United States	us	1722	
	Spain	es	167	
	Colombia	co	167	

4. Nuevos retos

Estos son los nuevos retos que proponemos, tienen el mismo origen que los dos primeros del comienzo del artículo, es decir, la Prueba Final del Rally Matemático Transalpino nº 27, celebrado en 2019 y a cuyos redactores, una vez más, expresamos nuestro agradecimiento. No olviden que nuestros lectores tienen objetivos muy diferentes cuando acceden a nuestros artículos. Unos quieren entretenerse leyendo, los más resolviendo los retos. Algunos quieren los problemas para sí. Otros los buscan para seleccionar y proponer a sus alumnos. Nosotros debemos atender a todos y por eso los retos que leerán a continuación tienen la variedad de contexto y de dificultad para que todos encuentren algo que les satisfaga.

TODOS SENTADOS

En una clase de 21 niños, la maestra dice: “Hagamos un juego. Debéis colocaros en círculo y seguir estas reglas:



- Partamos de Ada que dirá “uno”, su vecino o su vecina en la dirección indicada por la flecha dirá “dos”, el o la que sigue dirá “tres” y se sigue así…
- Cuando un niño dice un número par o un múltiplo de 3 (2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12,…) debe sentarse y no dirá nada más hasta el final del juego.
- Y continuando así a cada vuelta los niños restantes en pie continúan contando de uno en uno con la misma regla.
- El último niño que queda en pie continúa contando hasta que dice el primer número que le permitirá sentarse.
- ¡El juego termina cuando estéis todos sentados! “

Al final de la primera vuelta, el último jugador antes de Ada ha dicho “21” y se ha sentado, pero el juego continúa con los niños que quedan en pie. Ada dice “22” y se sienta, el jugador siguiente, entre los que están de pie, dice “23” y sigue de pie. **¿Cuál es el número que dirá el último niño que se sienta?** Muestra cómo has hecho para encontrar tu respuesta.

¡NO SE PIERDE NUNCA!

Aldo juega hoy con un nuevo videojuego. Cada partida debe ser terminada en un tiempo establecido. Si la partida se acaba dentro del tiempo establecido se ganan 10 puntos, pero si no es así se ganan sólo 3 puntos. Hoy Aldo ha obtenido 63 puntos. **¿Cuántas partidas puede haber hecho hoy Aldo?** Muestra cómo has hecho para encontrar la respuesta.

EL CAMPEONATO DE FÚTBOL

El campeonato español de fútbol 2011-2012 ha visto enfrentados 20 equipos. Cada equipo ha jugado dos veces con cada uno de los adversarios (ida y vuelta) y, en el curso de la temporada, ha efectuado 38 partidos en total. La regla de asignación de los puntos es la siguiente:

- en caso de empate, 1 punto para cada uno de los equipos,
- en caso contrario, 3 puntos para el equipo ganador y 0 puntos para el equipo perdedor.

Esta es la clasificación final de los tres primeros equipos:

	Jugados	Ganados	Empatados	Perdidos	Total de Puntos
1. Real Madrid	38	32	4	2	100
2. Barcelona	38	¿?	¿?	¿?	91
3. Valencia	38	¿?	10	¿?	61

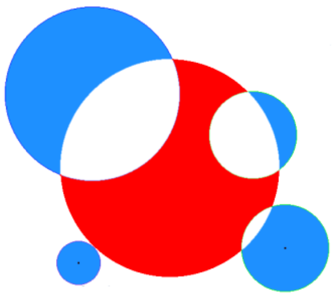
¿Cuántos partidos ha perdido el Valencia? Indica todos los modos posibles (partidos ganados, empatados, perdidos) en los cuales el Barcelona pudo haber totalizado 91 puntos. Explica cómo has hecho para encontrar tu respuesta.

PASTELES DE NAVIDAD

Para Navidad, Ana ha preparado dos tipos de dulces: pasteles de coco y pasteles de almendra. Ha preparado en total 174 dulces. Ana decide colocarlos en 27 bandejas y en cada bandeja quiere poner un solo tipo de dulce. En las bandejas de pasteles de coco pone 4 pasteles y en las bandejas de pasteles de almendra pone 7 pasteles. Cuando Ana ha terminado, las 27 bandejas están llenas. **¿Cuántas bandejas de pasteles de coco y cuántas de pasteles de almendra llena?** Explica cómo has encontrado tu respuesta.

CINCO CÍRCULOS QUE SE INTERSECAN (Del libro de Adrián Paenza: *Detectives*)

En la figura de la derecha aparecen cinco círculos, algunos de ellos se intersecan. El radio del círculo rojo es de 5 unidades, mientras que los de los círculos azules son de 4, 2, 2 y 1 unidades. La pregunta es: **¿qué superficie es mayor, la roja o la azul?** Las áreas blancas de las intersecciones no cuentan. ¿Qué relación existe entre las superficies de un color y las del otro? ¿Y si cambiamos las posiciones de los círculos sin alterar sus dimensiones, qué ocurre ahora con la relación entre las áreas?



Terminamos con nuestro mantra particular:

Resuelvan los problemas, singulares y alejados de los cotidianos; utilícenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntennos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema.

Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Nos repetimos: vamos, anímense… ¡Si es divertido! Hagan como Paco Morales: resuelvan los problemas y nos envían las soluciones para nosotros publicarlas aquí. No sólo es divertido, también es ¡muy interesante!

Un saludo afectuoso del Club Matemático.

Como decimos persistentemente, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista. NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**