NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 107, marzo de 2021, páginas 169-185

Donde dijimos Diego decimos Digo
(Problemas Comentados LVI)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Resolvemos los problemas del artículo anterior mediante modelización, organización de la información en tablas de doble entrada, y ensayo y error. Y rectificamos la respuesta al problema propuesto en NÚMEROS 66 sobre la suma y el producto de las edades de las hijas del caníbal. Los ejercicios que presentamos provienen de la primera prueba del Rally Matemático Transalpino nº 28.

Palabras clave Resolución de problemas, Modelización, Ensayo y error, Tablas de doble entrada, Organizando la información, Resolución gráfica.

Abstract We solve the problems in the previous article by modeling, organizing the information in double-entry tables, and trial and error. And we rectify the answer to the problem proposed in NUMBERS 66 about the sum and the product of the ages of the cannibal's daughters. The exercises that we present today come from the first test of the Transalpine Mathematical Rally nº 28.

Keywords Problem resolution, Through mathematical modeling, trial and error, double entry tables, organizing information, Graphic resolution.

1. Introducción

A lo largo de los artículos que hemos presentado aquí se han escapado pocos errores importantes. La mayoría han consistido en deslices de escritura o alguno ortográfico. Nosotros, conscientes de ello, llegamos a bromear en algún momento con nuestros lectores prometiendo premios a los que nos comunicasen algún error. Pues bien, nos ha llegado un escrito de uno de nuestros lectores, Alfredo Monereo, que no solo es lector de nuestros artículos y resolutor de los problemas que proponemos, sino que, siguiendo nuestras recomendaciones, utiliza los problemas con sus alumnos en clase. El escrito de Alfredo se refiere a uno de esos problemas, “El problema de las edades de las hijas del caníbal” que apareció propuesto en la revista nº 66 y resuelto en la nº 67; en las revistas 68 y 69 aparecieron algunos problemas más del mismo tipo.

Nos indica sobre el problema que debe estar mal redactado, pues al intentar resolverlo sale más de una solución. Y en efecto, así es. Hay en su redacción una palabra que dificulta la resolución del problema. Seguramente fue mal traducida por nosotros cuando lo encontramos. Y por ello debemos desdecirnos de lo que en su día apareció. Donde dijimos **alguna** decimos **cualquiera**.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

El problema quedaría así: En el curso de una exploración en una isla perdida, tú y un amigo sois capturados por una tribu de aborígenes. Se trata de feroces caníbales, que además tienen una gran pasión por las matemáticas. Las cosas se ponen mal, pero el rey de los caníbales os ofrece una posibilidad de salvación.

El rey tiene dos hijas; se sabe que (¿~~alguna~~?) **cualquiera** de ellas tiene más de 1 año. El rey te dice que la suma de las dos edades es 15, mientras comunica a tu amigo, detenido en otra prisión, el producto de las dos edades.

En este punto, para salvarte la vida, debes hallar cuántos años tienen las dos hijas del rey. ¿Qué hacer? Si tú pudieses recibir información de tu amigo, deberías solamente resolver un clásico sistema de suma y producto, pero está excluida toda posibilidad de comunicación. Estás a punto de dar una respuesta, cuando el rey, que después de todo no es tan feroz, trata de animarte: "Tu amigo está a salvo, porque ha determinado las dos edades sin una pizca de duda".

¡He aquí, ésta es la información que te faltaba! ¿Por qué?

Ahora ya el enunciado permite determinar con seguridad las edades de ambas.

Hay dos hijas, ambas tienen más de un año, la suma de sus edades es 15, el producto de sus edades es conocido y determina de forma única el par de edades.

Utilizaremos la estrategia de Eliminar (lógica) con una herramienta auxiliar en forma de Tabla.

La tabla tendrá tres columnas: la primera para todas las formas de obtener 15 como suma de dos números naturales; la segunda para obtener los productos de los sumandos de cada una de las sumas obtenidas en la primera; la tercera, finalmente, para escribir todas las descomposiciones de cada uno de los productos obtenidos en la segunda.

Suma: 15	Producto:	Descomposiciones:
1 + 14	1 x 14 = 14	**1 y 14** – 2 y 7
2 + 13	2 x 13 = 26	1 y 16 – **2 y 13**
3 + 12	3 x 12 = 36	1 y 36 – 2 y 18 – **3 y 12** – 4 y 9 – 6 y 6
4 + 11	4 x 11 = 44	1 y 44 – 2 y 22 – **4 y 11**
5 + 10	5 x 10 = 50	1 y 50 – 2 y 25 – **5 y 10**
6 + 9	6 x 9 = 54	1 y 54 – 2 y 27 – 3 y 18 – **6 y 9**
7 + 8	7 x 8 = 56	1 y 56 – 2 y 28 – 4 y 14 – **7 y 8**

Las parejas que suman 15 están señaladas en violeta en la tabla. Eliminamos las parejas que contienen al 1. Nos quedan diversas opciones en las edades para cada producto, excepto en el producto 26, donde sólo queda una opción que satisface la condición de la suma 2 + 13 = 15.

Por consiguiente, **las edades de las hijas son 2 y 13 años.**

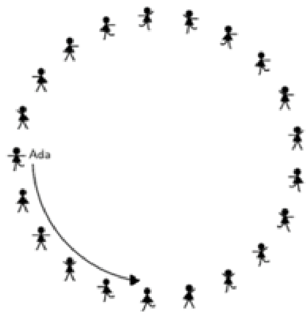
¡Gracias, Alfredo!

2. Retos anteriores

Y sin más empezamos a desvelar las soluciones de algunos de los retos del artículo anterior.

Estos provienen de la Prueba Final del Rally Matemático Transalpino nº 27, celebrado en 2019 y a cuyos redactores, una vez más, expresamos nuestro agradecimiento.

Todos sentados



En una clase de 21 niños, la maestra dice:
"Hagamos un juego. Debéis colocaros en círculo y seguir estas reglas:

- Partamos de Ada que dirá "uno", su vecino o su vecina en la dirección indicada por la flecha dirá "dos", el o la que sigue dirá "tres" y se sigue así…
- Cuando un niño dice un número par o un múltiplo de 3 (2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12,…) debe sentarse y no dirá nada más hasta el final del juego.
- Y continuando así a cada vuelta los niños restantes en pie continúan contando de uno en uno con la misma regla.
- El último niño que queda en pie continúa contando hasta que dice el primer número que le permitirá sentarse
- ¡El juego termina cuando estéis todos sentados! "
- Al final de la primera vuelta, el último jugador antes de Ada ha dicho "21" y se ha sentado, pero el juego continúa con los niños que quedan en pie. Ada dice "22" y se sienta, el jugador siguiente, entre los que están de pie, dice "23" y sigue de pie.

¿Cuál es el número que dirá el último niño que se sienta?

Muestra cómo has hecho para encontrar tu respuesta.

Proceso de Resolución

COMPRENDER. Datos: Un juego, 21 niños colocados en círculo. Se parte de Ada que dirá "uno", su vecino o su vecina en la dirección indicada por la flecha dirá "dos", el o la que sigue dirá "tres" y se sigue así…, hasta que al final de la primera vuelta, el último jugador antes de Ada ha dicho "21" y se ha sentado, pero el juego continúa con los niños que quedan en pie. Ada dice "22" y se sienta, el jugador siguiente, entre los que están de pie, dice "23" y sigue de pie. Y continuando así a cada vuelta los niños restantes en pie continúan contando de uno en uno con la misma regla. El último niño que queda en pie continúa contando hasta que dice el primer número que le permitirá sentarse. El juego termina cuando estén todos sentados.

Objetivo: Cuál es el número que dirá el último niño que se sienta.

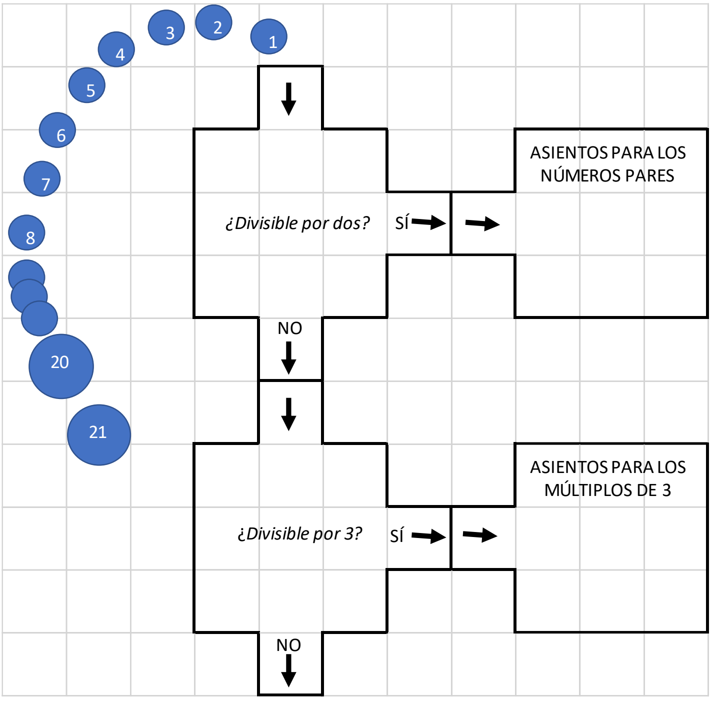
Relación: Cuando un niño dice un número par o un múltiplo de 3 (2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12,…) debe sentarse y no dirá nada más hasta el final del juego.

Diagrama: Ordinograma, Tabla.

PENSAR. Estrategias: Modelización y organizar la información.

EJECUTAR. Eliminar los múltiplos de 2 y de 3 en una sucesión "cíclica", a partir del conteo de 21 elementos en un contexto de jugadores dispuestos en círculo.

Mediante Modelización. Necesitamos dos cajas con tapas, 21 tapas de botella y círculos de papel o cartulina numerados del 1 al 32 y del tamaño de las tapas de botellas.



En los bordes largos de las cajas y sus tapas hacemos unos cortes hacia el centro, para que se pueda doblar una pestaña hacia afuera de longitudes los altos de las tapas y de las cajas. En las tapas abrimos otros cortes en los bordes largos, de tal forma que el primer corte (lado corto) quede arriba y el segundo a la derecha, y un tercer corte en el otro lado corto.

En la primera tapa escribimos *¿Divisible por dos?* Y en el "puente" de la derecha escribimos *SI* y una flecha de salida, mientras que en el puente inferior escribimos *NO* y una flecha de salida. En la segunda tapa escribimos *¿Divisible por 3?* Poniendo en las dos salidas de la segunda tapa lo mismo que en la otra tapa primera. En los cortes superiores de las tapas dibujamos una flecha orientada hacia el interior.

En la primera de las cajas escribimos *Asientos para los números pares* mientras que en la segunda escribiremos *Asientos para los múltiplos de tres.*

Colocamos en las 21 tapas de las botellas (las llamaremos fichas a partir de ahora) las primeras 21 etiquetas y las ordenamos empezando por el 1, apuntando hacia la entrada de la primera tapa.

Hacemos entrar a la primera de las fichas, la numerada con un 1, a la tapa primera y puesto que la respuesta a la pregunta allí formulada es NO para este número 1, sale por el puente inferior (NO) pasando a la segunda tapa. La respuesta en este caso para el número 1 vuelve a ser NO por lo que abandona la tapa por el puente inferior y la colocamos en la cola de las tapas tras el número 21, tapando el 1 de la ficha con la etiqueta 22. A continuación, repetimos el proceso con la ficha 2, que se sale de la primera tapa por el puente de la derecha ya que la respuesta a la pregunta es SÍ.

Seguimos de esta manera pasando las fichas y renumerando las que salen del circuito por la parte inferior, que son 5, 7, 11, 13, 17 y 19, que estarán renumeradas como 23, 24, 25, 26, 27 y 28 colocando una nueva etiqueta sobre la anterior. Las hacemos pasar ahora del 22 al 28 por el circuito, lo que dejará pasar las fichas 23 y 25 que se renumerarán como 29 y 30. De estas dos últimas sólo atravesará el circuito la ficha 29 que se renumeraría como 31. Mirando los números que están en esta ficha 31 vemos que son 31, 29, 23 y 5. Así pues, la ficha que indica quién se sienta el último es el número 5, que dirá 32 antes de sentarse.

También lo podemos razonar ayudándonos de una tabla de doble entrada. La tabla quedaría así:

Nº ORDEN	¿Divisible por2?	¿Divisible por 3?	¿Se sienta?	Nuevo número	¿Se sienta?	Nuevo número	¿Se sienta?	Nuevo número	¿Se sienta?	Nuevo número	¿Se sienta?
1	**NO**	**NO**	**NO**	**22**	**SÍ**						
2	SÍ	NO	SÍ								
3	NO	SÍ	SÍ								
4	SÍ	NO	SÍ								
5	**NO**	**NO**	**NO**	**23**	**NO**	**29**	**NO**	**31**	**NO**	**32**	**SÍ**
6	SÍ	SÍ	SÍ								
7	**NO**	**NO**	**NO**	**24**	**SÍ**						
8	SÍ	NO	SÍ								
9	NO	SÍ	SÍ								
10	SÍ	NO	SÍ								
11	**NO**	**NO**	**NO**	**25**	**NO**	**30**	**SÍ**				
12	SÍ	SÍ	SÍ								
13	**NO**	**NO**	**NO**	**26**	**SÍ**						
14	SÍ	NO	SÍ								
15	NO	SÍ	SÍ								
16	SÍ	NO	SÍ								
17	**NO**	**NO**	**NO**	**27**	**SÍ**						
18	SÍ	SÍ	SÍ								
19	**NO**	**NO**	**NO**	**28**	**SÍ**						
20	SÍ	NO	SÍ								
21	NO	SÍ	SÍ								

Mediante Organizar la información. Una vez entendidas las reglas del juego, comprender que, a partir de la primera vuelta y en las siguientes, la numeración sigue sólo para los niños en pie, que se sientan cuando dicen un múltiplo de 2 o de 3.

Se estudia la primera vuelta para ver quiénes se han sentado y quiénes quedan de pie. Habrán quedado de pie los niños que hayan dicho 1, 5, 7, 11, 13, 17 y 19.

Iniciamos la segunda vuelta: quien haya dicho 1 dice 22 y se sienta; quien haya dicho 5 dice 23 y queda de pie; quien haya dicho 7 dice 24 y se sienta; quien haya dicho 11 dice 25 y queda de pie, quien haya dicho 13 dice 26 y se sienta; quien haya dicho 17 dice 27 y se sienta; finalmente quien haya dicho 19 dice 28 y se sienta. Después de la segunda vuelta, quedan de pie los niños que han dicho 23 y 25.

Estos niños iniciarán la tercera vuelta y deberán decir, respectivamente, 29 y 30. Al final de esta tercera vuelta queda de pie un solo niño, aquel que ha dicho 29, que deberá entonces en la cuarta vuelta decir 31, y quedar de pie, y, finalmente en la quinta vuelta dirá 32, y se sentará.

Este niño, al empezar el juego, tenía el número 5 pero para sentarse habrá esperado para decir 32 después de cinco vueltas.

Solución: 32.

RESPONDER. Comprobación: Se puede teatralizar en la clase el problema con 21 alumnos puestos en círculo y teniendo cada uno de ellos una etiqueta con los números del 1 al 21.

Análisis: La solución es única.

Respuesta: **El alumno número 5 de la clase dirá 32 antes de sentarse.**

¡No se pierde nunca!

Aldo juega hoy con un nuevo videojuego. Cada partida debe ser terminada en un tiempo establecido. Si la partida se acaba dentro del tiempo establecido se ganan 10 puntos, pero si no es así se ganan sólo 3 puntos. Hoy Aldo ha obtenido 63 puntos.

¿Cuántas partidas puede haber hecho hoy Aldo?

Muestra cómo has hecho para encontrar la respuesta.

Proceso de Resolución

COMPRENDER. Datos: Un videojuego. Cada partida debe ser terminada en un tiempo establecido. Aldo ha obtenido 63 puntos.

Objetivo: Cuántas partidas puede haber hecho hoy Aldo.

Relación: Si la partida se acaba dentro del tiempo establecido se ganan 10 puntos, pero si no es así se ganan sólo 3 puntos.

Diagrama: Modelo de regletas. Tabla

PENSAR. Estrategias: Modelización y Ensayo y error.

EJECUTAR. En cada partida se pueden ganar 10 puntos, si se ha respetado el tiempo, o, si no es así, solamente 3 puntos. Es necesario buscar el número de partidas jugadas para llegar a la puntuación final y que tal puntuación no puede variar (es siempre 63).

Aldo no puede haber concluido cada partida dentro del tiempo establecido porque la puntuación final (63) no es un múltiplo de 10.

Mediante Modelización: Usando regletas: varias de 10 (naranja) y varias de 3 (verde claro) para representar los dos tipos de puntuación. Formar una línea en el suelo que mida 63 unidades de regleta y que sirva de comparación para establecer las respuestas correctas. Cambiar la cantidad de regletas de cada color y verificar en cuántas de ellas se alcanza 63 unidades con exactitud.

Mediante Ensayo y error: Utilizar una tabla para realizar tentativas acerca de la cantidad de partidas realizadas de cada tipo:

A tiempo	(x10)	Fuera de tiempo	(x3)	Puntuación final (63)

Podemos proceder por tentativas al azar, por ejemplo, elegir un número de partidas de 10 puntos y calcular la correspondiente puntuación, controlar si la diferencia entre ésta y 63 es un múltiplo de 3 y, en el caso en que lo sea, sumar ambos para encontrar el número de partidas jugadas. De este modo se podrían olvidar algunas soluciones.

Es mucho mejor utilizar tentativas organizadas partiendo del número máximo de partidas de 10 puntos que puedan haber sido jugadas: 63 = 60 + 3, donde 60 es la puntuación de 6 partidas completadas en el tiempo establecido y 3 es la puntuación de 1 partida de 3 puntos, por tanto, han sido jugadas 6 + 1 = 7 partidas.

A tiempo	(x10)	Fuera de tiempo	(x3)	Puntuación final (63)
6	60	1	3	60 + 3 = 63 correcto

Seguimos la búsqueda, haciendo una hipótesis con un número inferior de partidas superadas cada una dentro del tiempo, por ejemplo 5, constatar que la diferencia entre 63 y 50 es 13 que no es un múltiplo de 3 y descartar esta posibilidad. Continuar así, rebajando de uno en uno el número de partidas de 10 puntos y encontrar dos soluciones más que son aceptables: 14 partidas (3 partidas de 10 puntos y 11 de 3 puntos) y 21 partidas (0 partidas de 10 puntos y 21 de 3 puntos).

A tiempo	(x10)	Fuera de tiempo	(x3)	Puntuación final (63)
6	60	1	3	60 + 3 = 63 correcto
5	50	4	12	50 + 12 = 62 incorrecto
4	40	7	21	40 + 21 = 61 incorrecto
3	30	11	33	30 + 33 = 63 correcto
2	20	14	42	20 + 42 = 62 incorrecto
1	10	17	51	10 + 51 = 61 incorrecto
0	0	21	63	0 + 63 = 63 correcto

En el transcurso de la búsqueda los alumnos podrían también observar la regularidad que permite especificar, después de las primeras dos, la otra solución posible (disminución de 3 del número de partidas de 10 puntos y aumento de 10 del número de partidas de 3 puntos).

Solución: 7 partidas, 14 partidas o 21 partidas.

RESPONDER. Comprobación: La tabla da los cálculos que verifican la corrección de las soluciones.

Análisis: Solución múltiple.

Respuesta: **Aldo puede haber jugado 7 partidas (6 en tiempo y 1 fuera de tiempo), o 14 partidas (3 en tiempo y 11 fuera de tiempo) o 21partidas (todas fuera de tiempo).**

El campeonato de fútbol

El campeonato español de fútbol 2011-2012 ha visto enfrentados 20 equipos. Cada equipo ha jugado dos veces con cada uno de los adversarios (ida y vuelta) y, en el curso de la temporada, ha efectuado 38 partidos en total. La regla de asignación de los puntos es la siguiente:

- en caso de empate, 1 punto para cada uno de los equipos,
- en caso contrario, 3 puntos para el equipo ganador y 0 puntos para el equipo perdedor.

Esta es la clasificación final de los tres primeros equipos:

	Jugados	Ganados	Empatados	Perdidos	Total de Puntos
1. Real Madrid	38	32	4	2	100
2. Barcelona	38	¿?	¿?	¿?	91
3. Valencia	38	¿?	10	¿?	61

¿Cuántos partidos ha perdido el Valencia? Indica todos los modos posibles (partidos ganados, empatados, perdidos) en los cuales el Barcelona pudo haber totalizado 91 puntos.

Explica cómo has hecho para encontrar tu respuesta.

Proceso de Resolución

COMPRENDER. Datos: El campeonato español de fútbol 2011-2012 con 20 equipos. Cada equipo ha jugado dos veces con cada uno de los adversarios (ida y vuelta) y ha jugado 38 partidos en total. En la clasificación final el Real Madrid ha ganado 32 partidos, empatado 4 y perdido 2, totalizando 100 puntos. Del Barcelona sólo sabemos que ha totalizado 91 puntos. Del Valencia conocemos que ha empatado 10 partidos y totalizado 61 puntos.

Objetivo: Cuántos partidos ha perdido el Valencia. Indica todos los modos posibles (partidos ganados, empatados, perdidos) en los cuales el Barcelona pudo haber totalizado 91 puntos.

Relación: La regla de asignación de los puntos es la siguiente: - en caso de empate, 1 punto para cada uno de los equipos, - en caso contrario, 3 puntos para el equipo ganador y 0 puntos para el equipo perdedor.

Diagrama: Tabla.

PENSAR. Estrategias: Ensayo y error, y organizar la información.

EJECUTAR. Completar una tabla buscando ternas de números naturales que tengan como suma 38 y tales que la suma de los productos del primer número de cada terna multiplicado por 3, del segundo por 1, del tercero por 0 sea igual a números asignados (61 y 91). Para 61 se da uno de los tres números.

Ganados (x3)	**Empatados (x1)**	**Perdidos (x0)**

Podemos comprobar que la tabla funciona usándola para los resultados del **Real Madrid**:

Ganados (x3)	**Empatados (x1)**	**Perdidos (x0)**
32	4	2
32 x 3 = 96	4 x 1 = 4	0
Jugados: 32 + 4 + 2 = 38 partidos; puntos obtenidos: 96 + 4 + 0 = 100		

Se aprecia claramente que la cantidad de partidos perdidos no afecta a la puntuación total y que los puntos obtenidos de los partidos empatados es igual al número de dichos partidos.

Para el **Valencia**:

Ganados (x3)	**Empatados (x1)**	**Perdidos (x0)**

Si deducimos los puntos obtenidos en los partidos empatados obtenemos 61 – 10 = 51 que son los puntos obtenidos en los partidos ganados.

51 : 3 = 17 partidos ganados y, por tanto, que hay 38 – (17 + 10) = 11 partidos perdidos.

Ganados (x3)	**Empatados (x1)**	**Perdidos (x0)**
17	10	11
17 x 3 = 51	10 x 1 = 10	0
Jugados: 17 + 10 + 11 = 38 partidos; puntos obtenidos: 51 + 10 + 0 = 61		

Para el Barcelona, no tenemos datos suficientes (91 puntos totalizados y 38 partidos jugados) para trabajar con la tabla anterior para Organizar la información. Hemos de trabajar entonces mediante Ensayo y Error con una nueva tabla.

Ganados (x3)	Empatados (x1)	Perdidos (x0)	Puntuación total (91)	Partidos

El mayor número de partidos ganados es 30, porque 3 x 30 = 90 < 91.

Ganados (x3)	Empatados (x1)	Perdidos (x0)	Puntuación total (91)	Partidos
30 x 3 = 90	1 x 1 = 1	38 – 31 = 7	90 + 1 + 0 = 91	30 + 1 + 7 = 38

Desde ese valor vamos retrocediendo de uno en uno y calculamos los puntos obtenidos.

Ganados (x3)	Empatados (x1)	Perdidos (x0)	Puntuación total (91)	Partidos
30 x 3 = 90	1 x 1 = 1	38 – 31 = 7	90 + 1 + 0 = 91	30 + 1 + 7 = 38
29 x 3 = 87	4 x 1 = 4	38 – 33 = 5	87 + 4 + 0 = 91	29 + 4 + 5 = 38
28 x 3 = 84	7 x 1 = 7	38 – 35 = 3	84 + 7 + 0 = 91	28 + 7 + 3 = 38
27 x 3 = 81	10 x 1 = 10	38 – 37 = 1	81 + 10 + 0 = 91	27 + 10 + 1 = 38
26 x 3 = 78	13 x 1 = 13	38 – 39 (¡)	(¡)	

Con 26 partidos la suma de las victorias y de los partidos empatados sería superior a la de los partidos jugados   91 = 3 × 26 + 13 y 26 + 13 = 39 > 38.

Hay, por tanto, cuatro maneras diferentes de conseguir los puntos para el Barcelona.

También se podría proceder haciendo el razonamiento mediante la variación del número de partidos empatados a partir de 1 sólo partido y aumentando de uno en uno.

Se puede observar también que, disminuyendo en uno el número de victorias, para tener la misma puntuación se deberá aumentar en 3 el número de empates. Es otra manera de buscar los mismos números.

Solución: **11partidos perdidos del Valencia; cuatro posibilidades para el Barcelona: 30/1/7, 29/4/5, 28/7/3 y 27/10/1.**

RESPONDER. Comprobación: Las tablas utilizadas y la manera de trabajar con ellas nos da las comprobaciones pertinentes.

Análisis: Una solución para el Valencia. Cuatro posibilidades para el Barcelona.

Respuesta: **El Valencia perdió 11 partidos. El Barcelona pudo obtener los 91 puntos de cuatro maneras diferentes: 30 ganados/1 empatado/7 perdidos; 29 ganados/4 empatados/5 perdidos; 28 ganados/7 empatados/3 perdidos; 27 ganados/10 empatados/1 perdido.**

Pasteles de Navidad

Para Navidad, Ana ha preparado dos tipos de dulces: pasteles de coco y pasteles de almendra. Ha preparado en total 174 dulces. Ana decide colocarlos en 27 bandejas y en cada bandeja quiere poner un solo tipo de dulce. En las bandejas de pasteles de coco pone 4 pasteles y en las bandejas de pasteles de almendra pone 7 pasteles. Cuando Ana ha terminado, las 27 bandejas están llenas.

¿Cuántas bandejas de pasteles de coco y cuántas de pasteles de almendra llena? Explica cómo has encontrado tu respuesta.

Proceso de Resolución

COMPRENDER. Datos: Ana ha preparado pasteles de coco y pasteles de almendra. En total 174 dulces. Los coloca en 27 bandejas y en cada bandeja un solo tipo de dulce. Las bandejas de pasteles de coco llevan 4 pasteles. Las bandejas de pasteles de almendra llevan 7 pasteles.

Objetivo: Cuántas bandejas de pasteles de coco y cuántas de pasteles de almendra se llenan.

Relación: Las 27 bandejas están llenas de dulces. Diagrama Una Tabla.

PENSAR. Estrategias: Modelización, Ensayo y error, y organizar la información.

EJECUTAR. Se trata de determinar dos números naturales tales que su suma sea 27 y la suma de los productos del primer número por 4 y del segundo por 7 sea 174.

Mediante modelización: Representar los dulces con fichas (174), sin diferenciar el sabor. Representar las bandejas con tarjetas (27).

Comenzar distribuyendo las fichas de 7 en 7 en las bandejas disponibles. Se llenan 24 tarjetas con 7 fichas cada una; otra queda con 6 fichas y 3 quedan vacías.

La idea consiste ahora en quitar 3 fichas de las tarjetas con 7 y colocarlas en las tarjetas vacías de 4 en 4. Tendremos en cuenta de entrada la que quedó con 6 fichas. Podemos verlo en la siguiente tabla:

Tarjetas con 7 fichas	Tarjetas con otra cantidad	Tarjetas con 4 fichas
24	1 de 6	0
24	1 de 2	1
23	1 de 1	3
22	0	5
22 x 7 = 154		5 x 4 = 20
	22 + 5 = 27	
	154 + 20 = 174	

Mediante ensayo y error: Crear una tabla donde se contemplen los dos tipos de dulces o, mejor, los dos tipos de bandejas:

Coco B	Bx4	Almendra 27 – B	(27-B)x7	Total de dulces (174)

Para encontrar la solución se puede comenzar por un ensayo escogiendo los dos números de bandejas (por ejemplo 10 y 17), calcular los números de dulces correspondientes ((4 × 10) + (7 × 17) = 129) y constatar que el número de dulces es diferente de 174.

Coco B	Bx4	Almendra 27 – B	(27-B)x7	Total de dulces (174)
10	40	17	119	159 < 174

Mejor es utilizar ensayos dirigidos en función de los resultados ya efectuados (por ejemplo, después de 10 y 17 darse cuenta que es necesario aumentar el número de bandejas que tienen el mayor número de dulces para, así, aumentar el total de dulces.

Por ejemplo 15 y 12 que conduce a (4 ×15) + (7 ×12) = 144, no sirve por que disminuye la cantidad total. Es mejor proceder de manera inversa poniendo 8 y 19, por ejemplo, para obtener una cantidad más cercana, 165 dulces.

Coco B	Bx4	Almendra 27 – B	(27-B)x7	Total de dulces (174)
10	40	17	119	159 < 174
15	60	12	84	144 < < 174
8	32	19	133	165 < 174
6	24	21	147	171 < 174
5	**20**	**22**	**154**	**¡! 174 = 174 ¡¡**
4	16	23	161	177 > 174

Se llega así a la solución 5 y 22 verificada por (4 × 5) + (7 × 22) = 174.

También se puede proceder de manera sistemática, probando todas las parejas cuya suma es 27: (0; 27), (1; 26), …, hasta llegar a la correcta (5; 22).

Mediante organizar la información: Utilizar el álgebra para conectar los elementos de la situación: 174 dulces dispuestos en 27 bandejas, en cada una de las cuales los dulces son todos del mismo tipo: pasteles de coco en las de 4 o pasteles de almendra en las de 7.

Asignar las incógnitas (C, coco; A, almendra) a las relaciones numéricas, distinguiendo bien el número de bandejas y el número de dulces:

- el número de pasteles de coco es cuatro veces el número de bandejas de pasteles de coco: 4 × C
- el número de pasteles de almendra es siete veces el número de bandejas de pasteles de almendra: 7 × A
- la suma de los dos números de bandejas es: C + A = 27
- la suma de los dulces de los dos tipos de bandejas es: (4 × C) + (7 × A) = 174 → 4C + 7ª = 174

Podemos resolver el sistema formado por ambas ecuaciones

$$\begin{cases} C + A = 27 \\ 4C + 7^{a} = 174 \end{cases}$$

O, directamente, despejar en la segunda y razonar $A = \frac{(174 - 4C)}{7}$

Los valores enteros de C que podemos probar serán los que produzcan en el numerador un múltiplo de 7.

Solo es válido C = 5 y $A = \frac{174\text{-}20}{7} = \frac{154}{7} = 22.$

Solución: **5 y 22 bandejas.**

RESPONDER. Comprobación:

5 bandejas de pasteles de coco → 5 x 4 = 20

22 bandejas de pasteles de almendra → 22 x 7 = 154

5 + 22 = 27 bandejas

20 + 154 = 174 pasteles

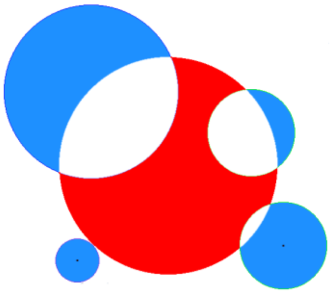
Análisis: La solución es única.

Respuesta: **Ana ha llenado 5 bandejas de pasteles de coco y 22 bandejas de pasteles de almendra.**

Este tiene una procedencia diferente, el libro "*Detectives*", de Adrián Paenza.

5 Círculos que se intersecan (del libro de Adrián Paenza: *Detectives*)

En la figura de a derecha aparecen cinco círculos, algunos de ellos se intersecan. El radio del círculo rojo es de 5 unidades, mientras que los de los círculos azules son de 4, 2, 2 y 1 unidades.



La pregunta es: **¿qué superficie es mayor, la roja o la azul?** Las áreas blancas de las intersecciones no cuentan.

¿Qué relación existe entre las superficies de un color y las del otro?

¿Y si cambiamos las posiciones de los círculos sin alterar sus dimensiones, qué ocurre ahora con la relación entre las áreas?

Proceso de Resolución

COMPRENDER. Datos: Cinco círculos de radios 5, 4, 2, 2 y 1 unidades.

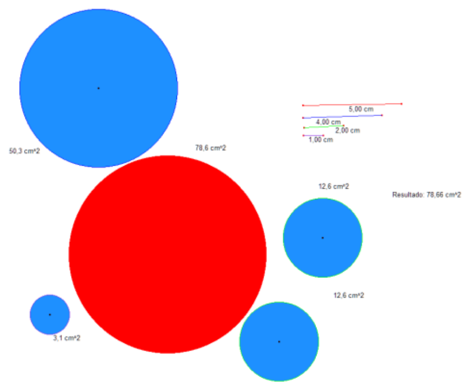
Objetivo: Qué superficie es mayor, la roja o la azul. Qué relación existe entre ambas superficies. Qué sucede cuando se cambian las posiciones de los círculos.

Relación: Los círculos menores se intersecan con el de mayor superficie.

Diagrama: El que ilustra el problema.

PENSAR. Estrategias: Organizar la información.

EJECUTAR. Para contestar a la primera pregunta hemos de comenzar por situar los círculos sin intersección alguna entre ellos.

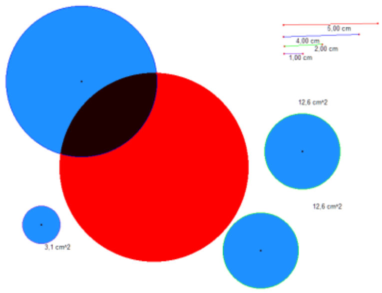


Situando los círculos azules exteriores al círculo rojo, podemos comprobar que el total de la suma de las áreas azules es igual al área del círculo rojo:

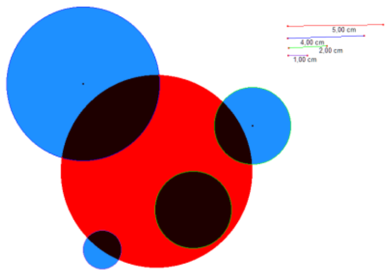
$$\pi \cdot 1^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 4^2 = \pi \cdot 5^2, \qquad ya\ que$$

$$\pi(1^2 + 2 \cdot 2^2 + 4^2) = \pi \cdot (1 + 8 + 16) = \pi \cdot 25 = \pi \cdot 5^2$$

Si ahora intersecamos uno de los círculos azules con el rojo observamos que el área perdida por el círculo mayor es la misma que la perdida por el círculo azul (en negro).



Con lo cual el área roja sigue siendo igual a la superficie azul.



Si son varios los círculos que se intersecan el razonamiento es el mismo: las áreas azules y roja siguen siendo iguales, pues lo que pierde un color es lo mismo que pierde el otro.

Razonando de esta manera queda demostrado el enunciado del problema.

Solución: **Iguales.**

RESPONDER. Comprobación: El razonamiento es totalmente visual y no necesita buscar ningún cálculo.

Análisis: La solución es única.

Respuesta: **La superficie roja es igual a la superficie azul. Cuando cambian las posiciones de los círculos las superficies coloreadas cambian de valor, pero siguen siendo iguales entre sí.**

Y bien, ahora es el momento de proponer:

3. Nuevos retos

Los problemas que proponemos a continuación forman parte de la Primera prueba del Rally Matemático Transalpino nº 28, única (por lo que nosotros sabemos) del curso pasado debido a la pandemia de Coronavirus.

Esperemos que esta situación acabe pronto y podamos volver a la normalidad escolar de siempre.

Cesto de fruta (II)

Tomás ha metido en un cesto las peras y las manzanas que ha recogido en su huerto. El número de manzanas es el doble del número de peras. Tomás da la mitad de las manzanas a Sofía y la mitad de las peras a Adela. En el cesto le quedan 36 frutas.

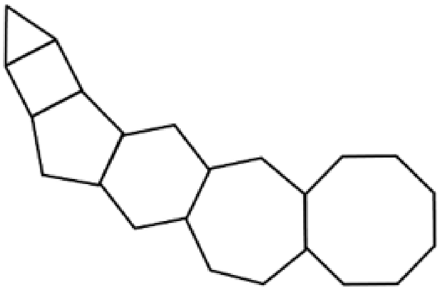
¿Cuántas peras y cuántas manzanas ha recogido Tomás? Explica cómo has encontrado tu respuesta.

Cadena de polígonos

Una “cadena” de polígonos regulares se construye de esta manera:

- Se dibujan tres segmentos que forman un triángulo equilátero.
- A partir de un lado del triángulo se dibujan los segmentos que faltan para formar un cuadrado.
- A partir de un lado del cuadrado se dibujan los segmentos que faltan para formar un pentágono regular.
- Se continúa así, de la misma manera, dibujando cada vez los segmentos que faltan para formar un polígono regular con un lado más que el anterior.

La figura muestra los primeros elementos de la cadena: se ven un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono, un hexágono, un heptágono y un octógono, pero la cadena continúa.



¿Cuántos lados tendrá el polígono al cual pertenece el 2020º segmento dibujado en esta cadena de polígonos? Muestra cómo has encontrado tu respuesta.

Los precios de las plumas

Andrés compra una pluma y paga con una moneda de 2 euros. La cajera le devuelve dos monedas diferentes entre sí. Beatriz compra tres plumas del mismo precio que la de Andrés y paga con un billete de 5 euros. La cajera le devuelve dos monedas diferentes entre sí y distintas a las que recibió Andrés.

¿Cuál es el precio de una pluma y qué monedas han recibido como devolución Andrés y Beatriz?

Muestra cómo has encontrado tu respuesta.

Loterías

Dos amigos, Pedro y Sandro, han decidido participar en tres loterías organizadas para beneficencia, comprando algunos billetes. Cada lotería tiene los billetes de colores diferentes: azul, amarillo y verde. Los billetes tienen precios distintos según el color y cada precio está expresado en euros con un número natural.

La pasada semana, Pedro ha comprado un billete azul, tres amarillos y siete verdes por un total de 44 euros, mientras que Sandro ha comprado un billete azul, cuatro amarillos y diez verdes por un total de 58 euros.

Hoy, último día de las loterías, ambos compran algunos billetes.

- Pedro compra un billete azul, un billete amarillo y un billete verde.
- Sandro compra dos billetes azules, tres billetes amarillos y cinco billetes verdes.

¿Cuánto gasta cada uno de los dos amigos en la última compra de billetes? Explica cómo has encontrado tu respuesta.

Y, como siempre, terminamos con nuestro *mantra* particular:

Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Nos repetimos: vamos, anímense… ¡Si es divertido! Hagan como Alfredo Monereo: resuelvan los problemas y nos envían las soluciones (o las dudas y errores encontrados) para nosotros publicarlas aquí. No sólo es divertido, también es ¡muy interesante!

Como decimos persistentemente, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista. NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**