NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 108, julio de 2021, páginas 195-213

La lógica de los problemas y los problemas de lógica
(Problemas Comentados LVII)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen

Soluciones a los problemas expuestos en anterior artículo, con aportaciones del lector Paco Morales, mediante distintas formas de pensar y ejecutar: usando algebra, ensayo y error, modelización, ir hacia atrás, organización de la información, uso de tablas de doble entrada o búsqueda de patrones. Iniciamos el estudio de problemas donde la lógica es el principal desafío. Veremos qué metodología se puede usar en el aula para su resolución.

Palabras clave

Métodos para la resolución de problemas. Algebraicamente, ensayo y error, modelización, ir hacia atrás, organización de la información, uso de tablas de doble entrada, búsqueda de patrones. Problemas de lógica inductiva y deductiva.

Abstract

Solutions to the problems exposed in the previous article, with contributions from the reader Paco Morales, through different ways of thinking and executing: using algebra, trial and error, modeling, going backwards, organizing information, using double-entry tables or searching. of patterns. We begin the study of problems where logic is the main challenge. We will see what methodology can be used in the classroom for its resolution.

Keywords

Methods for solving problems. Algebraically, trial and error, modeling, going backwards, organizing information, using double-entry tables, searching for patterns. Inductive and deductive logic problems.

1. Solución de los Retos anteriores

Dejamos planteados cuatro problemas extraídos de la Primera prueba del Rally Matemático Transalpino nº 28. Presentamos, en primer lugar, las soluciones que nos manda nuestro amigo y asiduo lector Paco Morales:

CESTO DE FRUTA (II)

Tomás ha metido en un cesto las peras y las manzanas que ha recogido en su huerto. El número de manzanas es el doble del número de peras. Tomás da la mitad de las manzanas a Sofía y la mitad de las peras a Adela. En el cesto le quedan 36 frutas.

¿Cuántas peras y cuántas manzanas ha recogido Tomás? Explica cómo has encontrado tu respuesta.

---

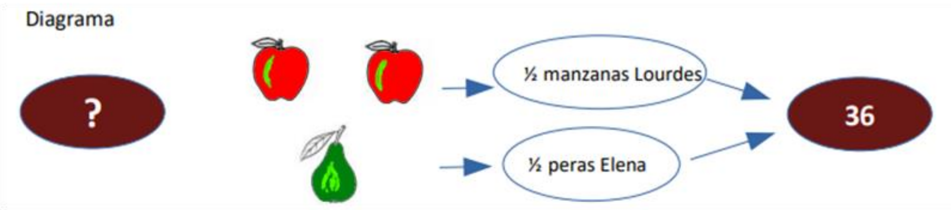
[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

Solución de Paco Morales:

COMPRENDER. Datos: hay peras y manzanas en un cesto, en el cesto le quedaron 36 frutas tras los repartos.

Objetivo: saber las peras y manzanas que recogió Tomás.

Relación: hay el doble de manzanas que de peras, Tomás da la mitad de las manzanas a Lourdes y la mitad de las peras a Elena. Si sumo las manzanas repartidas a Elena y Lourdes, con las 36 que quedaron, obtengo el total inicial.



PENSAR. Estrategias: Modelización, Ensayo y Error, Organización de la Información, Ir hacia Atrás.

EJECUTAR. Organización de la información algebraica:

Peras P. Manzanas 2P

$(P - ½\ P) + (2P - ½\ 2P) = 36$
$P/2 + P = 36$

$P = 24$, por tanto, hay 24 peras y 48 manzanas

Organización de la información partes todo:

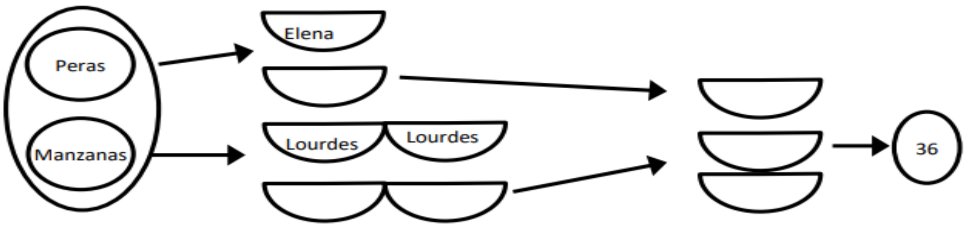
Total fruta			
Peras		Manzanas	
½ Elena	½ cesto	½ Lourdes	½ cesto
½ Peras Elena	½ Manzanas Lourdes	½ Peras cesto	½ Manzanas cesto
		36 (12+24)	

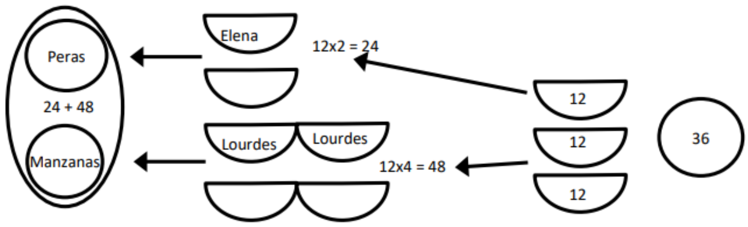
Al principio había el doble, ya que Tomás regaló la mitad y se quedó con la otra mitad. Había 24 peras y 48 manzanas.

<u>Ensayo Error</u>

P	M (x2)	Reparto P	Quedan P	Reparto M	Quedan M	Cesto (36)
10	20	5	5	10	10	15 - no
20	40	10	10	20	20	30 - no
22	44	11	11	22	22	33 - no
24	48	12	12	24	24	36 - sí

<u>Ir hacia Atrás</u>





<u>Modelización</u>: Puede representarse con una tira de papel que represente las peras y dos tiras de papel que representen las manzanas. Cortamos con la mano cada tira para dar la mitad de la fruta, y nos quedan 3 medias tiras.

Las completamos con 36 fichas, una a una en cada tira, así sabremos que la media tira correspondiente a las peras tiene 12 fichas y cada tira correspondiente a las manzanas tiene también 12 fichas. Esto significa que hay 12 peras y 24 manzanas.

Si lo que tenemos es la mitad, y entregamos la otra mitad, al principio habría el doble de lo que tenemos ahora: 24 peras y 48 manzanas.

RESPONDER. <u>Comprobar</u>**:** Tomás puso 24 peras y 48 manzanas. (manzanas, doble que peras). Dio 12 peras (mitad) y 24 manzanas (mitad). Quedó 12 + 24 = 36 frutas.

<u>Analizar</u>: Solo hay una solución posible.

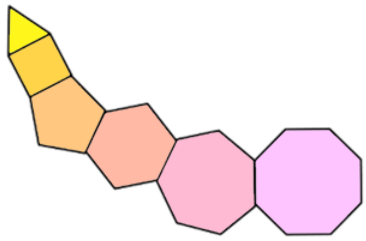
Responder: ¿Cuántas peras y cuántas manzanas ha recogido Tomás? **Tomás recogió 24 peras y 48 manzanas.**

Comentarios añadidos por los autores del artículo: Es curioso que en este problema se pueda partir, en la resolución, de dos situaciones diferentes, arrancando de los mismos datos.

Si Tomás regala la mitad de sus manzanas y de sus peras, en el cesto queda la mitad del número de manzanas y la mitad del número de las peras recogidas. La relación entre el número de manzanas y el de peras es la misma que hay entre sus mitades. El problema consiste entonces en buscar dos números, uno doble del otro, cuya suma sea 36 y duplicar después los dos números encontrados. O al revés, buscar dos números, uno doble del otro, cuya suma sea 72.

Por modelización también se puede proceder repartiendo 36 fichas (o 72 fichas) en dos montones, 1 para el montón de las peras y 2 para el montón de las manzanas, hasta acabar con todas las fichas. El conteo final de ambos montones nos dará las cantidades pedidas (para el caso de comenzar con 72 fichas) o la mitad (para el caso de comenzar con 36 fichas.

CADENA DE POLÍGONOS



Una "cadena" de polígonos regulares se construye de esta manera:

- Se dibujan tres segmentos que forman un triángulo equilátero.
- A partir de un lado del triángulo se dibujan los segmentos que faltan para formar un cuadrado.
- A partir de un lado del cuadrado se dibujan los segmentos que faltan para formar un pentágono regular.
- Se continúa así, de la misma manera, dibujando cada vez los segmentos que faltan para formar un polígono regular con un lado más que el anterior.

La figura muestra los primeros elementos de la cadena: se ven un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono, un hexágono, un heptágono y un octógono, pero la cadena continúa.

¿Cuántos lados tendrá el polígono al cual pertenece el 2020º segmento dibujado en esta cadena de polígonos? Muestra cómo has encontrado tu respuesta.

COMPRENDER. Datos: Una "cadena" de polígonos regulares: se comienza con un triángulo equilátero; a partir de un lado del triángulo se dibuja un cuadrado; a partir de un lado del cuadrado se dibuja un pentágono regular; se continúa así dibujando cada vez un polígono regular con un lado más que el anterior.

Objetivo: Cuántos lados tendrá el polígono al cual pertenece el 2020º segmento dibujado en esta cadena de polígonos.

Relación: Los lados de todos los polígonos tienen la misma longitud. Cada nuevo polígono tiene un lado más que el inmediatamente anterior.

Diagrama: La figura que ilustra el problema y que muestra los primeros elementos de la cadena: se ven un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono, un hexágono, un heptágono y un octógono, pero la cadena continúa. Una tabla.

PENSAR. Estrategias: organizar la información y buscar patrones.

EJECUTAR. Mediante la organización de la información: Comprender como se construye la cadena y las características de los polígonos que la componen: cada uno tiene un lado más respecto al precedente a partir de 3; 4; 5; 6; ...

Un primer modo de apropiarse del problema es contar todos los segmentos que hay en la figura: en total son 28.

Observar que construyendo el séptimo polígono, con 9 lados, se añaden a los 28 otros 8 segmentos (28 + 8 = 36) y continuando así se añade cada vez el número siguiente del que se acaba de añadir que corresponde al polígono que tiene un lado más del número añadido: 36 + 9 = 45 (polígono con 10 lados), 45 + 10 = 55 (polígono con 11 lados) y así se continua hasta llegar a 1891 + 62 = 1953 (polígono con 63 lados), 1953 + 63 = 2016 (polígono con 64 lados) y darse cuenta que los cuatro segmentos que faltan para llegar al 2020 pertenecen al polígono con 65 lados.

Este procedimiento parece largo y aburrido, necesitamos una sesentena de sumas y un control riguroso que sin embargo requiere solo pocos minutos con una calculadora.

Mediante la búsqueda de un patrón: Organizar los datos anteriores en una tabla, por ejemplo:

Nº de lados del polígono	3	4	5	6	…	n
Nº de nuevos segmentos		3	4	5	…	n - 1
Nº total de segmentos S_n	3	3 + 3	3 + 3 + 4	3 + 3 + 4 + 5		3 + 3 + … + (n – 1)

Observando que si el 3 se sustituye por 1+2, la suma que se debe calcular es: 1 + 2 +3 + 4 + 5 + …(n−1).

Si es conocida la fórmula que da la suma de los primeros n números naturales:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

el procedimiento es más rápido que el anterior; de hecho, algunos ensayos sobre los valores de n permiten descubrir que para n = 64 (polígono con 64 lados) la suma 1 + 2 + 3 + … + 63 es 2016 (= 63 × 64/2). Deducir por consiguiente que el 2020° segmento pertenece al polígono de 65 lados.

Solución: 65 lados

RESPONDER. Comprobación: Es complicado hacer una comprobación visual; el dibujo se complica enseguida. De forma numérica se debe confiar en la corrección de los resultados a partir de la adecuada ejecución de los cálculos, especialmente los hechos con calculadora.

Análisis: La solución es única.

P R O B L E M A S

Respuesta: **El 2020º segmento dibujado pertenece al polígono de 65 lados.**

LOS PRECIOS DE LAS PLUMAS

Andrés compra una pluma y paga con una moneda de 2 euros. La cajera le devuelve dos monedas diferentes entre sí. Beatriz compra tres plumas del mismo precio que la de Andrés y paga con un billete de 5 euros. La cajera le devuelve dos monedas diferentes entre sí y distintas a las que recibió Andrés.

¿Cuál es el precio de una pluma y qué monedas han recibido como devolución Andrés y Beatriz? Muestra cómo has encontrado tu respuesta.

Solución de Paco Morales:

COMPRENDER. Datos: 2 personas, plumas con un precio determinado, Andrés compra una con una moneda de 2€, Beatriz compra 3 con un billete de 5€, ambos reciben dos monedas diferentes de vuelta.

Objetivo: Saber el precio de la pluma y las monedas que se recibieron de vuelta en cada compra.

Relación: En ambos casos, la diferencia entre el dinero entregado y el precio son dos monedas distintas.

Otra información: Si con 5 € puedo comprar 3 plumas y me devuelven dos monedas, por pequeñas que sean, tendrán un valor de 1 y 2 cent. El precio máximo de las 3 plumas es de 4,97. Cada pluma no puede superar 1,65 €.

Esquema:

2€				5€				
PLUMA	MONEDA 1	MONEDA 2		PLUMA	PLUMA	PLUMA	MONEDA 3	MONEDA 4

PENSAR. Estrategia: Organización de la información.

EJECUTAR. Organizar la información, comenzando desde el precio mayor posible (1,65) y devolviendo 2 monedas:

Precio	Vuelta 1 de 2€	Gasto 3 plumas	Vuelta 2 de 5€	
1,49	0,50 – 0,01	4,47	No	
1,48	0,50 – 0,02	4,44	No	
1,45	0,50 – 0,05	4,35	No	
1,40	0,50 – 0,10	4,20	No	
1,30	0,50 – 0,20	3,90	0,10 - 1	Sí
0,99	1 – 0,01	2,97	No	
0,98	1 – 0,02	2,94	No	
0,95	1 – 0,05	2,85	No	
0,90	1 – 0,10	2,70	No	
0,80	1 – 0,20	2,40	No	
0,50	1 – 0,50	1,50	No	

RESPONDER.

COMPROBAR.

ANALIZAR. Solución única.

RESPONDER. La pluma cuesta 1,30€. A Andrés le devolvieron 0,20 € y 0,50 €. A Beatriz le devolvieron 0,10 € y 1 €.

<u>Comentarios añadidos por los autores del artículo</u>: Éste es un problema sumamente curioso, de esos que nunca aparecen en las matemáticas escolares ya que no hay forma de proceder mediante cálculos algorítmicos.

Pero es evidente que es un tipo de problema realístico. Y hay que resolverlo. El razonamiento debe ser como lo ha hecho nuestro colega Paco, o similar.

Lo que sigue es otra manera de organizar la información.

Partiendo de la compra de una pluma, las combinaciones posibles de dos monedas fraccionarias (de 1, 2, 5, 10, 20 o 50 céntimos) son $C_{6,2}$ es decir (6x5) / (2x1) = 15. Y estas son:

	CÉNTIMOS						A	B		C
	1	2	5	10	20	50				
1	1	1					0,03	1,97		5,91
2	1		1				0,06	1,94		5,82
3	1			1			0,11	1,89		5,67
4	1				1		0,21	1,79		5,37
5	1					1	0,51	1,49		4,47
6		1	1				0,07	1,93		5,79
7		1		1			0,12	1,88		5,64
8		1			1		0,22	1,78		5,34
9		1				1	0,52	1,48		4,44
10			1	1			0,15	1,85		5,55
11			1		1		0,25	1,75		5,25
12			1			1	0,55	1,45		4,35
13				1	1		0,30	1,7		5,1
14				1		1	0,60	1,4		4,2
15					1	1	0,70	1,3		3,9

El cuadro se puede realizar fácilmente a mano, pero también es un sencillo ejercicio para ser trabajado con una hoja de cálculo. La columna A indica el importe de las dos monedas; la columna B el precio de una pluma y la columna C el precio de tres plumas. En verde hemos puesto las posibles soluciones que permiten que el precio de las tres plumas no supere los 5 euros de los que dispone Beatriz. Ahora solo hemos de analizar estos cinco valores y comprobar si se puede devolver con dos monedas.

B	C	Devolución	Monedas
1,49	4,47	53 céntimos	50 +2 +1
1,48	4,44	56 céntimos	50 +5 +1
1,45	4,35	65 céntimos	50 +10 +5
1,4	4,2	80 céntimos	50 +20 +10
1,3	3,9	110 céntimos	1 € + 10

Aparece la solución: Cuando las plumas cuestan 1€ y 30 céntimos.

Es importante el razonar desde el principio con las limitaciones que los datos imponen. Está claro que el precio máximo que puede tener la pluma es 1,66 euros, ya que 1,66 × 3 = 4,98 mientras que 1,67 × 3 = 5,01, pero se descarta este valor ya que Andrés tendría como devolución más de dos monedas. Tampoco valen 1,65 o 1,64 o 1,63 o 1,62 o 1,61 por el mismo motivo, mientras que 1,60 no vale tampoco porque Andrés tendría como devolución dos monedas iguales (20 céntimos). Si se examinan así todos los posibles precios de una pluma, casi todos son descartados inmediatamente sin considerar el triple ya que tienen como devolución más de dos monedas, hasta llegar a 1,30 euros que tiene como devolución una moneda de 20 céntimos y una de 50 céntimos y cuyo triple (3,90) tiene como devolución una moneda de 10 céntimos y una de 1 euro.

Con este ejercicio los alumnos practican la combinatoria, la organización de la información, la lógica, el cálculo, el manejo de las hojas de cálculo, etc., por todo ello nos parecía útil y valioso para la clase.

LOTERÍAS

Dos amigos, Pedro y Sandro, han decidido participar en tres loterías organizadas para beneficencia, comprando algunos billetes. Cada lotería tiene los billetes de colores diferentes: azul, amarillo y verde. Los billetes tienen precios distintos según el color y cada precio está expresado en euros con un número natural.

La pasada semana, Pedro ha comprado un billete azul, tres amarillos y siete verdes por un total de 44 euros, mientras que Sandro ha comprado un billete azul, cuatro amarillos y diez verdes por un total de 58 euros.

Hoy, último día de las loterías, ambos compran algunos billetes.

- Pedro compra un billete azul, un billete amarillo y un billete verde.
- Sandro compra dos billetes azules, tres billetes amarillos y cinco billetes verdes.

¿Cuánto gasta cada uno de los dos amigos en la última compra de billetes? Explica cómo has encontrado tu respuesta.

COMPRENDER. Datos: Dos amigos; tres loterías. Compran algunos billetes. Cada lotería tiene los billetes de colores diferentes: azul, amarillo y verde. Los billetes tienen precios distintos según el color y cada precio está expresado en euros con un número natural.

Objetivo: Cuánto gasta cada uno de los dos amigos en la última compra de billetes.

Relación: Los billetes tienen precios distintos según el color y cada precio está expresado en euros con un número natural. Pedro ha comprado un billete azul, tres amarillos y siete verdes por un total de 44 euros. Sandro ha comprado un billete azul, cuatro amarillos y diez verdes por un total de 58 euros. Hoy compran algunos billetes más: Pedro compra un billete azul, un billete amarillo y un billete verde. Sandro compra dos billetes azules, tres billetes amarillos y cinco billetes verdes.

Diagrama: Lenguaje algebraico, tabla.

PENSAR. Estrategias: ensayo y error, organizar la información.

EJECUTAR. Tenemos claro que los billetes de las tres loterías tienen precios distintos no conocidos, que se conoce el gasto total por la compra de dos cantidades diferentes de billetes de los tres tipos y que necesita encontrar cuánto paga cada uno de los dos amigos por la compra de otras dos combinaciones diferentes de los tres tipos de billetes.

Expresaremos mediante letras las informaciones relativas a la primera compra de los tres billetes: A (azul), G (amarillo), V (verde)

Primera compra: Pedro: $A + 3G + 7V = 44$ Sandro: $A + 4G + 10V = 58$

Segunda compra: Pedro: $A + G + V = ?$ Sandro: $2A + 3G + 5V = ?$

De las primeras relaciones deducimos que V no puede superar 6 porque si V = 6, entonces 10V será mayor de 58, y 7V serían 42 €, por lo que A + 3G serían 44 – 42 = 2, lo que implica que no serían números naturales diferentes. Así que el precio de un billete verde (V) ha de ser menor que 6 €.

Proceder por **ensayo y error**, asignando un valor al billete verde (que es el que está presente en mayor número en las dos compras cuyos precios se conocen). Los valores que se pueden asignar a V son, por tanto, 1, 2, 3, 4 y 5.

V	**A + 4G + 10V = 58**		**G**	**A**
1	A + 4G + 10 = 58	A + 4G = 48	11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1	4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44
2	A + 4G + 20 = 58	A + 4G = 38	9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1	2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34
3	A + 4G + 30 = 58	A + 4G = 28	6, 5, 4, 3, 2, 1	4, 8, 12, 16, 20, 24
4	A + 4G + 40 = 58	A + 4G = 18	4, 3, 2, 1	2, 6, 10, 14
5	A + 4G + 50 = 58	A + 4G = 8	1	4

Tomamos un valor de la terna (V, G, A) para cada caso obtenido y comprobamos cada una de ellas en la igualdad A + 3G + 7V = 44. Las que satisfagan esta relación serán soluciones del problema. Hay 31 ternas posibles.

A	**G**	**V**	**A + 3G + 7V = 44**	**Verificación**
4	11	1	4 + 33 + 7 = 44	44 = 44 SÍ
8	10	1	8 + 30 + 7 = 45	45 > 44 No
12	9	1	12 + 27 + 7 = 46	46 > 44 No
16	8	1	16 + 24 + 7 = 47	47 > 44 No
20	7	1	20 + 21 + 7 = 48	48 > 44 No
24	6	1	24 + 18 + 7 = 49	49 > 44 No
28	5	1	28 + 15 + 7 = 50	50 > 44 No
32	4	1	32 + 12 + 7 = 51	51 > 44 No
36	3	1	36 + 9 + 7 = 52	52 > 44 No
40	2	1	40 + 6 + 7 = 53	53 > 44 No
44	1	1	44 + 3 + 7 = 54	54 > 44 No
2	9	2	2 + 27 + 14 = 43	43 < 44 No
6	8	2	6 + 24 + 14 = 44	44 = 44 SÍ
10	7	2	10 + 21 + 14 = 45	45 > 44 No
14	6	2	14 + 18 + 14 = 46	46 > 44 No
18	5	2	18 + 15 + 14 = 47	47 > 44 No
22	4	2	22 + 12 + 14 = 48	48 > 44 No
26	3	2	26 + 9 + 14 = 49	49 > 44 No
30	2	2	30 + 6 + 14 = 50	50 > 44 No
34	1	2	34 + 3 + 14 = 51	51 > 44 No
4	6	3	4 + 18 + 21 = 43	43 < 44 No
8	5	3	8 + 15 + 21 = 44	44 = 44 SÍ
12	4	3	12 + 12 + 21 = 45	45 > 44 No
16	3	3	16 + 9 + 21 = 46	46 > 44 No
20	2	3	20 + 6 + 21 = 47	47 > 44 No
24	1	3	24 + 3 + 21 = 48	48 > 44 No
2	4	4	2 + 12 + 28 = 42	42 < 44 No
6	3	4	6 + 9 + 28 = 43	43 < 44 No
10	2	4	10 + 6 + 28 = 44	44 = 44 SÍ
14	1	4	14 + 3 + 28 = 45	45 > 44 No
4	1	5	4 + 3 + 35 = 42	42 < 44 No

Se obtienen así cuatro soluciones:

V = 1, G =11, A = 4 → A + G + V = 16	2A + 3G + 5V = 8 + 33 + 5 = 46
V = 2, G = 8, A = 6 → A + G + V = 16	2A + 3G + 5V = 12 + 24 + 10 = 46
V = 3, G = 5, A = 8 → A + G + V = 16	2A + 3G + 5V = 16 + 15 + 15 = 46
V = 4, G = 2, A = 10 → A + G + V = 16	2A + 3G + 5V = 20 + 6 + 20 = 46

que conducen todas a la misma solución para las segundas compras:

Pedro A + G + V = 16 euros

Sandro 2A + 3G + 5 V = 46 euros.

También se puede **organizar la información** mediante el uso de **técnica algebraica**. En resumen, se trata de determinar, dado en N un sistema de dos ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, el valor numérico de otras dos combinaciones con coeficientes naturales de las mismas tres incógnitas y que sean sencillas de resolver por haberse eliminado alguna de las incógnitas.

Pedro: A + 3G + 7V = 44 Sandro: A + 4G + 10V = 58

Si restamos miembro a miembro ambas ecuaciones:

(A + 4G + 10V) – (A + 3G + 7V) = 58 – 44 → G + 3V = 14

De manera similar al procedimiento anterior, vemos que V sólo puede tomar valores entre 1 y 4, pues, para valores superiores, la igualdad superaría el valor 14. Procedemos después a calcular los valores que tomará la G.

G = 14 – 3V

Para V = 1	→	G = 11
Para V = 2	→	G = 8
Para V = 3	→	G = 5
Para V = 4	→	G = 2

Sustituir estos valores en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales para determinar los valores correspondientes de B.

A + 4G + 10V = 58	→	A = 58 – 10V – 4G
Para V = 1 y G = 11	→	A = 58 – 10 – 44 = 4
Para V = 2 y G = 8	→	A = 58 – 20 – 32 = 6
Para V = 3 y G = 5	→	A = 58 – 30 – 20 = 8
Para V = 4 y G = 2	→	A = 58 – 40 – 8 = 10

Sólo queda utilizar cualquiera de las relaciones de la segunda compra para encontrar los precios pagados por Pedro y Sandro, es decir, las soluciones del problema:

V = 1, G =11, A = 4 → A + G + V = 16 2A + 3G + 5V = 8 + 33 + 5 = 46

V = 2, G = 8, A = 6 → A + G + V = 16 2A + 3G + 5V = 12 + 24 + 10 = 46
V = 3, G = 5, A = 8 → A + G + V = 16 2A + 3G + 5V = 16 + 15 + 15 = 46
V = 4, G = 2, A = 10 → A + G + V = 16 2A + 3G + 5V = 20 + 6 + 20 = 46

De una manera más esquemática, podemos presentarlos así:

Primero hallamos la suma y la diferencia de las primeras compras de Pedro y Sandro.

	A	G	V	SUMA
1ª COMPRA PEDRO	1	3	7	44
1ª COMPRA SANDRO	1	4	10	58
SUMA 1ª COMPRA TOTAL	2	7	17	102
Resta SANDRO - PEDRO	1G + 3V = 14			

Vemos que la resta: 1G + 3V debe dar 14 €. Descomponemos 14 en sumandos, y solo consideramos las descomposiciones donde uno de los sumandos (3V) es un múltiplo de 3.

Descomposición de 14 en sumandos G y 3V						
G	3V	V	2A = 102 - 7G - 17V			
				A	G	V
1	13	4,3				
2	12	4	20	10	2	4
3	11	3,7				
4	10	3,3				
5	9	3	16	8	5	3
6	8	2,7				
7	7	2,3				
8	6	2	12	6	8	2
9	5	1,7				
10	4	1,3				
11	3	1	8	4	11	1
12	2	0,7				
13	1	0,3				

Por tanto, las soluciones deben ser:

RESPUESTA. COSTES 2ª COMPRA				
			PEDRO	SANDRO
A	G	V	A +G +V	2A + 3G + 5V
10	2	4	16	46
8	5	3	16	46
6	8	2	16	46
4	11	1	16	46

También se puede trabajar reduciendo el sistema de ecuaciones inicial, sabiendo ya la nueva relación G + 3V = 14 encontrada:

$$\left.\begin{array}{r} A + 4G + 10V = 58 \\ G + 3V = 14 \end{array}\right\}$$

A + 4G + 10V = A + (G+3G) + (9V+V) = A+ G + V + 3(G+3V) = A + G + V + 3×14 = A + G + V + 42 = 58

de donde obtendremos A + G + V = 58 – 42 = 16, valor de la segunda compra de Pedro.

Y de igual manera para determinar el valor de la segunda compra de Sandro:

2A + 3G + 5V = 2A + (G+3V) + 2G + 2V = (2A+2G+2V) + (G+3V) = 2 × 16 + 14 = 32 + 14 = 46.

Incluso podríamos intentar otras combinaciones lineales de las dos ecuaciones iniciales para, con un poco de ingenio obtener las ecuaciones correspondientes a las segundas compras de Pedro y Sandro.

Para Pablo: A + G + V = 3(A + 3G + 7V) – 2(A + 4G + 10V) = 3 × 44 – 2 × 58 = 16

Para Sandro: 2A + 3G + 5V = 5(A + 3G + 7V) – 3(A + 4G + 10V) = 5 × 44 – 3 × 58 = 46

Encontrando así, una vez más, las dos mismas soluciones del problema.

Solución: Pedro compra 16 euros y Sandro compra 46 euros.

RESPONDER. Comprobación: A partir de los valores individuales (A, G, V) de los billetes de lotería, basta con calcular los valores de las compras iniciales y las segundas compras para comprobar la corrección de las soluciones obtenidas.

Análisis: Solución única.

Es curioso ver que, aunque la solución para las segundas compras es única, la solución para los valores de los billetes es múltiple.

Respuesta: **En la segunda compra de billetes de lotería Pedro gasta 16 euros y Sandro gasta 46 euros.**

2. Lógica y Problemas

Tratando de encontrar un tema que ofrecer a nuestros lectores y alrededor del cual giren los retos que vamos a proponer, se nos ocurrió que ese tema podía ser el tratamiento de los problemas lógicos.

No es la primera vez que proponemos problemas de lógica en estos artículos, claro que no. Han sido abundantes a lo largo de los 56 artículos anteriores. Pero ahora queremos hacer con ellos un tratamiento más directo, tratando de poner un poco de orden en ellos y buscando facilitar su proceso de resolución. Partiremos de dos artículos encontrados en la red y trataremos de resumir su esencia.

La **Lógica**, según *Wikipedia*, es una ciencia formal que estudia la estructura o formas del pensamiento humano (como proposiciones, conceptos y razonamientos) para establecer leyes y principios válidos para obtener criterios de verdad. Como adjetivo, "lógico" o "lógica" significa que algo sigue las reglas de la lógica y de la razón. Indica también una consecuencia esperable natural o normal. Se utiliza también para referirse al llamado "sentido común". Es una ciencia formal que estudia los principios de la demostración y la inferencia válida, las falacias, las paradojas y la noción de verdad.

La inferencia es el proceso por el cual se derivan conclusiones a partir de premisas. La inferencia es el objeto de estudio tradicional de la lógica. Tradicionalmente, se distinguen dos clases principales de inferencias: las deducciones y las inducciones. La lógica matemática estudia la inferencia, las reglas de deducción formales, las capacidades expresivas de los diferentes lenguajes formales y las propiedades metalógicas de los mismos.

Según Fabrizio Pomata, la lógica estudia las leyes del razonamiento correcto. Cuando alguien nos pide que le demos nuestras razones para creer en una afirmación P, lo que nos está pidiendo es que hagamos explícitas las premisas que "sostienen" a P. La conclusión se sigue o es consecuencia lógica de las premisas.

La Lógica se divide en dos grandes ramas: la **lógica deductiva** y la **lógica inductiva**. La primera se encarga de estudiar los razonamientos en los que las premisas garantizan la verdad o la falsedad de la conclusión, de modo que en un razonamiento deductivo ocurre que, si todas las premisas son verdaderas, la conclusión es necesariamente verdadera; nótese que la contraria no ocurre: si una o más premisas son falsas, la conclusión puede ser tanto falsa como verdadera (si bien por pura suerte). De esta forma, puede haber razonamientos válidos con premisas o conclusiones falsas. Por último, también puede haber razonamientos inválidos con conclusiones verdaderas.

La lógica tiene lugar también en la vida cotidiana de cualquier persona. Está claro que la Lógica (aunque sea en su vertiente informal, no-matemática) puede ser una herramienta útil para aprender a pensar mejor acerca de todo.

En la escuela, los niños deberían ser instruidos para definir sus conceptos claramente, identificar premisas y conclusiones, falacias lógicas, distinguir entre argumentos válidos e inválidos, deductivos e inductivos, etc., y luego aplicar esas herramientas a todo el resto del currículo escolar. Los estudiantes tendrán más facilidad para aprender y probablemente terminen siendo ciudadanos capaces de llevar adelante debates de mayor calidad, algo clave para la construcción de una sociedad más democrática.

Nosotros creemos que la Lógica es importante en el currículo, pero la lógica formal es muy compleja en las edades de los alumnos de Primaria y Secundaria. Por lo tanto, lo más sensato es instruir a los alumnos en esa lógica informal mediante la resolución de problemas que lo requieran, añadiendo el uso de diagramas adecuados para la realización de estos. La teoría vendrá después, cuando se necesite y los alumnos tengan la edad adecuada.

Los problemas adecuados para los alumnos, desde el comienzo de la escolaridad hasta el Bachillerato se centran en: clasificar, ordenar, deducir, inducir, etc. Y los diagramas a enseñar su utilización: tablas (simples, de doble entrada, de verdad, …), diagramas (rectilíneos, ramificados, de flechas, …), y un largo etcétera.

La estrategia principal utilizada para resolver estos problemas es la **eliminación**, ayudada a veces por el ensayo y error o la organización de la información. En general, el alumno debe primero comprender la información disponible. Para ello, si tiene informaciones negativas, debe saber convertirlas en positivas, lo cual no siempre es fácil. O al contrario. Luego ha de hacer una distribución espacial adecuada sobre el diagrama idóneo para el problema concreto.

Al utilizar la estrategia de eliminar se produce de manera muy sencilla la ejecución y resolución del problema. Al momento de responder deberá antes comprobar y analizar adecuadamente la solución o soluciones.

Esto no es otra cosa que el **proceso de resolución de problemas** que utilizamos de manera habitual en los artículos de esta sección de la revista, como la mayoría de nuestros lectores ya habían adivinado.

Podemos ver todo esto con un problema de ejemplo.

Ricardo, César, Pedro y Manuel, tienen diferente ocupación.

- Ricardo y el carpintero están enojados con Manuel.
- César es amigo del electricista.
- El comerciante es familiar de Manuel.
- El sastre es muy amigo de Pedro y del electricista.
- Ricardo desde muy joven se dedica a vender herramientas.

¿Quién es el electricista?

COMPRENDER. Datos: Cuatro amigos: Ricardo, César, Pedro y Manuel. Cuatro profesiones: carpintero, electricista, comerciante y sastre.

Objetivo: Averiguar quién es el electricista y, para ello, averiguar también los nombres de los amigos con otras profesiones.

Relación: Las cinco frases que acompañan al problema y todas aquellas informaciones que se pueden inferir de las mismas.

- Ricardo y el carpintero están enojados con Manuel → Ni Manuel ni Ricardo son carpinteros.
- César es amigo del electricista → César no es electricista.
- El comerciante es familiar de Manuel → Manuel no es el comerciante.
- El sastre es muy amigo de Pedro y del electricista → Pedro no es sastre ni electricista.
- Ricardo desde muy joven se dedica a vender herramientas → Ricardo es comerciante, no es carpintero, ni electricista, ni sastre.

PENSAR. Estrategia: Eliminar.

EJECUTAR. Para resolver el problema bastará con tener en cuenta las informaciones, disponibles en el problema o inferidas de ellas, para ver de forma clara que César, Pedro y Ricardo no son electricistas. Por tanto, el electricista ha de ser Manuel.

PROBLEMAS

Solución: Manuel.

RESPONDER. Comprobar: Basta con revisar las relaciones del problema a partir de la solución y observaremos que no hay ninguna contradicción.

Análisis: La solución es única.

Respuesta: **El electricista es Manuel**.

No obstante, si quisiéramos conocer las profesiones de los otros tres amigos deberíamos utilizar un **diagrama de doble entrada** que iríamos llenando a partir de la lectura de cada información.

	Ricardo	César	Pedro	Manuel
Carpintero				
Electricista				
Comerciante				
Sastre				

Utilizamos ahora, una por una, las informaciones disponibles:

Ricardo y el carpintero están enojados con Manuel → Ni Manuel ni Ricardo son carpinteros.

	Ricardo	César	Pedro	Manuel
Carpintero	NO			NO
Electricista				
Comerciante				
Sastre				

César es amigo del electricista → César no es electricista.

	Ricardo	César	Pedro	Manuel
Carpintero	NO			NO
Electricista		NO		
Comerciante				
Sastre				

El comerciante es familiar de Manuel → Manuel no es el comerciante.

	Ricardo	César	Pedro	Manuel
Carpintero	NO			NO
Electricista		NO		
Comerciante				NO
Sastre				

El sastre es muy amigo de Pedro y del electricista → Pedro no es sastre ni electricista.

	Ricardo	César	Pedro	Manuel
Carpintero	NO			NO
Electricista		NO	NO	
Comerciante				NO
Sastre			NO	

Ricardo desde muy joven se dedica a vender herramientas → Ricardo es comerciante, no es carpintero, ni electricista, ni sastre.

	Ricardo	César	Pedro	Manuel
Carpintero	NO			NO
Electricista		NO	NO	
Comerciante	SÍ	NO	NO	NO
Sastre			NO	

Ahora se trata de llenar los huecos de la tabla, teniendo en cuenta que en cada fila o columna sólo puede haber un SÍ.

	Ricardo	César	Pedro	Manuel
Carpintero	NO		SÍ	NO
Electricista		NO	NO	
Comerciante	SÍ	NO	NO	NO
Sastre			NO	

Continuamos, teniendo en cuenta la nueva información:

	Ricardo	César	Pedro	Manuel
Carpintero	NO	NO	SÍ	NO
Electricista		NO	NO	
Comerciante	SÍ	NO	NO	NO
Sastre		SÍ	NO	

	Ricardo	César	Pedro	Manuel
Carpintero	NO	NO	SÍ	NO
Electricista		NO	NO	
Comerciante	SÍ	NO	NO	NO
Sastre	NO	SÍ	NO	NO

	Ricardo	César	Pedro	Manuel
Carpintero	NO	NO	SÍ	NO
Electricista	NO	NO	NO	SÍ
Comerciante	SÍ	NO	NO	NO
Sastre	NO	SÍ	NO	NO

Obteniendo la solución completa: **El carpintero es Pedro, el electricista es Manuel, el comerciante es Ricardo y el sastre es César.**

En los próximos artículos trataremos de ampliar con otros tipos de problemas de lógica (indígenas mentirosos y veraces, carteles falsos, respuestas incompletas, etc.) que pueden ser propuestos para su resolución por los alumnos de Primaria y Secundaria.

3. Nuevos retos

LA MARATÓN

Nilda, Lucía, Miriam, Sonia y Ángela han competido en la gran Maratón de la Solidaridad. Al preguntárseles quien fue la ganadora, ellas respondieron.

Nilda: "Ganó Lucía"
Lucía: "Ganó Miriam"
Miriam: "Ganó Ángela"
Sonia: "Yo no gané"
Ángela: "Miriam mintió cuando dijo que yo gané"
Si una es la ganadora y solamente es cierta una de las afirmaciones,
¿quién ganó la Maratón?

LA BARAJA ESPAÑOLA.

En una mesa hay cuatro cartas en fila:

- El caballo está a la derecha de los bastos.
- Las copas están más lejos de las espadas que las espadas de los bastos.
- El rey está más cerca del as que el caballo del rey.
- Las espadas, más cerca de las copas que los oros de las espadas.
- El as está más lejos del rey que el rey de la sota.

¿Cuáles son los cuatro naipes y en qué orden se encuentran?

LOS TRES DADOS.

Tengo tres dados con letras diferentes. Al tirar los dados puedo formar palabras como: OSA, ESA, ATE, CAE, SOL, GOL, REY, SUR, MIA, PIO, FIN, VID, pero no puedo formar palabras tales como DIA, VOY, RIN. **¿Cuáles son las letras de cada dado?**

EL ENCUENTRO.

Ángel, Boris, César y Diego se sentaron a beber.
El que se sentó a la izquierda de Boris, bebió agua.
Ángel estaba frente al que bebía vino.
Quien se sentaba a la derecha de Diego bebía anís.
El del café y el del anís estaban frente a frente.
¿Cuál era la bebida de cada hombre?

Estos problemas han sido obtenidos de los libros de problemas de lógica de Jesús Escudero.

Y, como siempre, aunque seamos pesados, terminaremos con nuestro *mantra* particular:

Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Nos repetimos: vamos, anímense… ¡Si es divertido! Hagan lo que les pedimos: resuelvan los problemas y nos envían las soluciones (o las dudas y errores encontrados) para nosotros publicarlas aquí. No sólo es divertido, también es ¡muy interesante!

Como decimos persistentemente, aguardamos sus noticias a lo largo de este verano postpandémico (al menos eso deseamos) a la espera de la próxima edición de la revista.

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**