Desarrollo del razonamiento probabilístico en profesores de matemáticas mediante simulación computacional

Jaime I. García-García
jaime.garcia@ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0002-8799-5981

Nicolás A. Fernández Coronado
nicolasalonso.fernandez@alumnos.ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0002-9613-3144

Isaac A. Imilpán Rivera
isaacalejandro.imilpan@alumnos.ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0001-5882-5505

Universidad de Los Lagos (ULAGOS, Chile)

Recibido: 31/05/2020 **Aceptado:** 06/07/2020

Resumen

En este estudio se analiza el desarrollo del razonamiento probabilístico del profesor de matemáticas frente a dos tareas de cálculo de probabilidades en problemas binomiales, antes y después de realizar una actividad de simulación computacional. El método de investigación corresponde a un estudio de caso, en el que se trabajó con siete profesores. Con base en la taxonomía SOLO, se definen cuatro niveles jerárquicos (preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional) para analizar el razonamiento probabilístico de estos. El estudio revela que, posterior a la actividad de simulación, cuatro profesores modificaron su razonamiento probabilístico alcanzando el nivel relacional en la tarea de calcular los valores teóricos de la distribución binomial; mientras que dos profesores lo alcanzaron en la tarea de calcular la probabilidad de un evento compuesto. El trabajo con simulación computacional ha permitido a los profesores abordar el cálculo de probabilidades binomiales mediante un enfoque frecuencial e identificar, en algunos casos, los valores teóricos.

Palabras clave: Razonamiento probabilístico; Profesor en servicio; Probabilidad; Distribución binomial; Tecnología.

Development of probabilistic reasoning in mathematics teachers through computational simulation

Abstract

This study analyzes the development of the mathematics teacher's probabilistic reasoning when solving two probability calculation tasks in binomial problems, before and after performing a computational simulation activity. The research method corresponds to a case study, in which we worked with seven teachers. To analyze their probabilistic reasoning, four hierarchical levels are defined (prestructural, unistructural, multistructural and relational) based on the SOLO taxonomy. The study reveals that, after the simulation activity, four teachers modified their probabilistic reasoning by reaching the relational level in the task of calculating the theoretical

values of the binomial distribution; while two teachers did it on the task of calculating the probability of a compound event. Work with computational simulation has allowed teachers to approach the calculation of binomial probabilities using a frequency approach and, in some cases, to identify theoretical values.
Key words: Probabilistic reasoning; In-service teacher; Probability; Binomial distribution; Technology.

Desenvolvimento do raciocínio probabilístico em professores de matemáticas através de simulação computacional

Resumo

Neste estudo analisa-se o desenvolvimento do raciocínio probabilístico do professor de matemática diante duas tarefas de cálculo de probabilidade em problemas binomiais, antes e depois da realização de uma atividade de simulação computacional. O método de pesquisa corresponde a um estudo de caso, no qual se trabalhou com sete professores. Com base na taxonomia SOLO, definem-se quatro níveis hierárquicos (pré-estrutural, uni-estrutural, multi-estrutural e relacional) para analisar seu raciocínio probabilístico destes. O estudo revela que, após da atividade de simulação, quatro professores modificaram seu raciocínio probabilístico, atingindo o nível relacional na tarefa de calcular os valores teóricos da distribuição binomial; enquanto dois professores o atingiram na tarefa de calcular a probabilidade de um evento composto. O trabalho com simulação computacional tem permitido que aos professores abordar o cálculo das probabilidades binomiais usando uma abordagem de frequência e identificar, em alguns casos, os valores teóricos.
Palavras-chave: Raciocínio probabilístico; Professor em serviço; Probabilidade; Distribuição binomial; Tecnologia.

Introducción

La investigación sobre la comprensión de la probabilidad en los estudiantes ha sido fuertemente impulsada en los últimos 15 años, esto a partir de que Gal (2005, p.43) planteara la pregunta reflexiva "¿Qué queremos que los estudiantes aprendan acerca de la probabilidad, y por qué queremos que aprendan eso?" Para responder esta pregunta, este autor señala dos razones desde el ámbito educativo (la probabilidad es parte de la estadística y la matemática, campos del conocimiento que son importantes aprender como parte de la educación actual; y el aprendizaje de la probabilidad es esencial para ayudar a preparar a los estudiantes para la vida, ya que los eventos aleatorios se presentan en nuestro entorno cotidiano) y una tercera razón relacionada con poner énfasis en aspectos que son externos a la estructura de la probabilidad, es decir, la reflexión sobre la naturaleza de las situaciones de probabilidad en el mundo real para comprenderlas o afrontarlas.

En general, Gal (2005) plantea la necesidad de fomentar una alfabetización probabilística para hacer frente a una amplia gama de situaciones cotidianas que implican la interpretación o la generación de mensajes probabilísticos, así como la toma de decisiones. En este sentido, propone un modelo fundamentado en la interacción de dos componentes: 1) componente de conocimiento, conformado por cinco elementos: grandes ideas (variación, aleatoriedad, independencia, predicción/incertidumbre), cálculo de probabilidades (formas de encontrar o estimar la probabilidad de eventos), lenguaje (términos y métodos utilizados para comunicar sobre la probabilidad), contexto (comprender el papel e implicaciones de los problemas y mensajes probabilísticos en diversos contextos, incluyendo la vida cotidiana) y preguntas críticas (preguntas para reflexionar al tratar con probabilidades); y 2) componente disposicional, conformado por la postura crítica, las creencias y actitudes, y los sentimientos personales con respecto a la incertidumbre y el riesgo. Considerando lo anterior, podemos establecer que algunos de los propósitos del estudio de la probabilidad son que nuestros estudiantes, e inclusive nosotros como profesores, comprendan que muchos eventos de la vida cotidiana son de naturaleza aleatoria, identifiquen los resultados posibles y calculen la probabilidad de ocurrencia de estos eventos.

Ahora bien, el estudio acerca del cálculo de probabilidades proporciona un marco para investigar las nociones de los estudiantes acerca de conceptos como probabilidad, fenómenos aleatorios, distribuciones de probabilidad, independencia y ley de los grandes números (Jones et al., 2007). Para Gal (2005), los estudiantes deben estar familiarizados con la manera de encontrar la probabilidad de eventos aleatorios para entender afirmaciones probabilísticas realizadas por otros, o bien, para estimar la probabilidad de eventos y comunicar a los demás sobre esta; en este sentido, tres enfoques de la probabilidad son útiles: clásico, frecuencial y subjetivo (Batanero, 2005). La actividad desarrollada en este estudio se centró en el cálculo o estimación de la probabilidad de eventos aleatorios, adoptando un enfoque frecuencial para su diseño, con el objetivo de analizar el desarrollo del razonamiento probabilístico del profesor de matemáticas frente a tareas de cálculo de probabilidades en problemas binomiales mediante simulación computacional.

La binomial es una de las distribuciones teóricas discretas más importantes en probabilidad, debido a su uso para modelar una gran cantidad de situaciones aleatorias, su aplicación en inferencia estadística y su estrecha relación de convergencia con la distribución normal (Alvarado & Batanero, 2007; García et al., 2014; García-García et al., 2018). Esta distribución se encuentra inscrita en el currículo de educación media en México, sin embargo, es posible hacer simulaciones de cualquier situación binomial con ayuda de softwares dinámicos, abriendo la posibilidad de calcular probabilidades de eventos bajo un enfoque frecuencial, así como analizar su comportamiento sin necesidad de poner en operación la fórmula matemática.

Con respecto a la simulación, Hoffman et al. (2014, p.284) señalan que "es una herramienta fundamental que permite a los estudiantes acercarse experimentalmente y de manera adecuada a las ideas estocásticas [teóricas]. Los estudiantes se familiarizan con la interpretación frecuencial de la probabilidad". Consideramos que "acercarse experimentalmente…a las ideas estocásticas" se refiere a entender la relación entre las frecuencias relativas (enfoque frecuencial) y las probabilidades teóricas (enfoque clásico) cuando es posible contar con éstas. De hecho, la relación entre el enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad es una de las líneas de investigación presentes que sugieren Jones et al. (2007); asimismo, estos autores señalan que es necesario desarrollar prácticas efectivas que contemplen el uso de software en la enseñanza de la probabilidad dentro del aula, ya que este proporcionan la oportunidad de crear ambientes de aprendizaje completamente nuevos, donde la simulación computacional permite la retroalimentación en condiciones inalcanzables mediante la simulación física.

Esta idea la refuerzan Ireland y Watson (2009), quienes indican que el uso de la simulación computacional en sus investigaciones permitió mejorar la comprensión de nociones como variación, distribución y vínculos entre datos y azar. Al respecto, Konold et al. (2001) señalan que la simulación computacional permite la visualización de grandes cantidades de datos obtenidos por la repetición de experimentos aleatorios. En Biehler y Maxara (2007) se caracterizan tres aspectos diferentes del uso de la simulación: 1) como herramienta de representación de experimentos aleatorios, 2) como herramienta de interacción entre cálculos teóricos y métodos empíricos, y 3) como herramienta *sui generis*, es decir, única en su género. En este estudio consideramos los dos primeros aspectos con el uso de Fathom, al apoyar el proceso de aprendizaje de cálculo de probabilidades desde un enfoque frecuencial y la comprensión de la conexión entre los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad.

Considerando lo anterior, este estudio busca responder la siguiente pregunta de investigación: ¿qué tipo de razonamiento probabilístico predomina en el profesor de matemáticas frente a tareas de cálculo de probabilidades en problemas binomiales, antes y después de realizar una actividad de simulación computacional?

Marco conceptual

A continuación, se expone el marco conceptual que da sustento al presente estudio. Miles y Huberman (1994, p.18) describen en forma breve que: "Un marco conceptual explica […] las principales cosas que van a ser estudiadas –los factores clave, constructos o variables– y las supuestas relaciones entre ellas". Bajo esta idea, consideramos tres componentes conceptuales que permiten entender y fundamentar este estudio: 1) la distribución binomial, como contenido probabilístico inscrito en el problema a resolver; 2) el razonamiento probabilístico, como la forma en que los profesores unen y transforman sus ideas previas sobre probabilidades de eventos; y 3) la taxonomía SOLO, como modelo para evaluar el razonamiento probabilístico de los profesores mediante la jerarquización de las respuestas que dan a las tareas de cálculo de probabilidades del problema binomial.

La distribución binomial

La distribución binomial es un modelo matemático que nos permite el cálculo y estudio de la probabilidad de un gran número de experiencias aleatorias, por ejemplo, la de lanzar tres monedas (equivalente a lanzar tres veces una moneda) y observar el número de 'caras' que ocurren; es una distribución discreta que se obtiene al modelar la repetición de ensayos de Bernoulli independientes entre sí. Un ensayo de Bernoulli es un experimento aleatorio que tiene sólo dos posibles resultados, comúnmente denominados 'éxito' y 'fracaso', con probabilidades p y q respectivamente. Ahora bien, al definir la variable aleatoria X como el número de éxitos obtenidos al realizar n repeticiones de un ensayo de Bernoulli, la distribución binomial emerge al responder la pregunta ¿cuál es la probabilidad de obtener k éxitos en esos n ensayos? Esta probabilidad está dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, donde\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n;\ 0 \leq p \leq\ 1;\ q = 1 - p$$

Por lo tanto, se establece que el comportamiento de la variable aleatoria X tiene una distribución binomial con parámetros n y p, la cual se expresa como:

$$X \sim Binomial\,(n, p) \quad \text{o} \quad B(x, n, p)$$

Razonamiento probabilístico

El razonamiento probabilístico constituye un enfoque diferente de pensar y razonar acerca de fenómenos bajo condiciones de incertidumbre. Batanero et al. (2016) afirman: “El razonamiento probabilístico es un modo de razonamiento que se refiere a juicios y toma de decisiones bajo incertidumbre y es relevante para la vida real” (p. 9). Dicho razonamiento incluye cuatro capacidades: 1) identificar eventos aleatorios en la naturaleza, la tecnología y la sociedad, 2) analizar las condiciones de dichos eventos y derivar los supuestos para un modelado apropiado, 3) construir modelos matemáticos para situaciones estocásticas, así como, explorar diversos escenarios y los resultados de tales modelos, y 4) aplicar métodos y procedimientos matemáticos de probabilidad y estadística. Con respeto a los modelos de probabilidad, como la distribución binomial, estos autores señalan que constituyen herramientas importantes para reconocer, comprender, analizar y resolver problemas.

Bajo esta perspectiva, consideramos que una persona razona probabilísticamente cuando reconoce y modela situaciones de azar, escapa de sesgos cognitivos, cuida que sus concepciones no estén en contradicción con el razonamiento normativo, sabe cuándo y cómo la probabilidad puede jugar un papel importante, puede determinar la probabilidad de eventos a partir de probabilidades dadas, construye e interpreta distribuciones de probabilidad y, en consecuencia, las utiliza para hacer inferencias. En este estudio nos enfocamos en la modelación de problemas binomiales para resolver tareas de cálculo de probabilidades mediante simulación computacional; con la premisa de que la simulación es una herramienta que permite calcular la probabilidad de eventos de situaciones aleatorias desde un enfoque frecuencial, en vez de utilizar reglas formales.

La taxonomía SOLO

Una manera de evaluar el razonamiento probabilístico del profesor de matemáticas, frente a tareas de cálculo de probabilidades en problemas binomiales, es a través de niveles jerárquicos que permitan delimitar características de dicho razonamiento. La taxonomía SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) desarrollado por Biggs y Collis (1982, 1991) ha sido utilizada para caracterizar y evaluar la calidad del aprendizaje del estudiante en términos de la respuesta dada a alguna tarea relacionada con conceptos estadísticos o probabilísticos (e.g. Díaz-Levicoy et al., 2017; García-García et al., 2018; Juárez & Inzunsa, 2014; Pfannkuch, 2005; Reading y Reid, 2006). Esta taxonomía establece cinco niveles de desarrollo cognitivo, los cuales se describen a continuación.

- *Nivel preestructural*. El sujeto realiza la tarea, pero no presenta componentes conexos con el conocimiento asociado a esta.
- *Nivel uniestructural*. El sujeto enfoca su atención en un sólo un componente conexo con el conocimiento asociado a la tarea.
- *Nivel multiestructural*. El sujeto considera dos o más componentes conexos con el conocimiento asociado a la tarea, sin embargo, no es capaz de relacionarlos de manera adecuada.
- *Nivel relacional*. El sujeto considera dos o más componentes conexos con el conocimiento asociado a la tarea y los relaciona de manera adecuada.
- *Nivel abstracto extendido*. El sujeto representa una generalización del conocimiento adquirido en el nivel relacional al considerar más y nuevos componentes abstractos.

En particular, para este estudio se consideraron componentes de análisis para cada una de las tareas de cálculo de probabilidades binomiales y, con ello, se establecieron niveles jerárquicos que permiten clasificar las respuestas de los profesores de matemáticas según su nivel estructural.

Investigaciones relacionadas

A continuación, con el objetivo de situar nuestro estudio, se presentan algunas investigaciones relacionadas con la distribución binomial y la conexión entre los enfoques frecuencial y clásico de la probabilidad, realizadas con estudiantes y profesores en servicio y en formación.

Alvarado y Batanero (2007) analizaron la comprensión teórica y práctica de la aproximación a la binomial por medio de la distribución normal, alcanzada por un grupo de estudiantes de ingeniería después de realizar actividades con apoyo de Excel. Sus principales resultados arrojaron que una alta proporción de los estudiantes reconocen a la variable aleatoria binomial como la suma de variables de Bernoulli, comprenden los efectos que tienen los parámetros sobre la aproximación y son capaces de calcular y comparar probabilidades aproximadas y exactas, pero recurren con frecuencia a la heurística de la representatividad, a pesar de haber hecho uso de la simulación computacional. En Abrahamson (2009) se presentan tres estudios de caso sobre el razonamiento de estudiantes universitarios frente a una situación simple de probabilidad hipergeométrica (la cual es casi binomial). Se propone mostrar cómo un enfoque semiótico ilumina el proceso y el contenido del razonamiento de los estudiantes y, haciéndolo, explica y posiblemente mejora la metodología de la investigación basada en el diseño. Para conseguirlo, propone a los estudiantes trabajar con tres tipos de dispositivos de mediación: una pala para extraer cuatro canicas, un arreglo de columnas de cuadrados que representan permutaciones organizadas en un arreglo de torres y una distribución experimental de resultados obtenidos mediante simulación en la computadora. Muestra cómo los estudiantes se apropian de los medios que se les proporcionan al materializar, comunicar y elaborar su razonamiento acerca de la binomial.

Maxara y Biehler (2010) realizan un estudio post-curso con estudiantes, futuros profesores de matemáticas, que participaron en un curso introductorio sobre estocástica. Durante el curso, los estudiantes aprendieron a utilizar el software Fathom para el análisis exploratorio de datos, la simulación y la estadística inferencial. Se presenta el análisis de tres entrevistas reportando las intuiciones de los estudiantes sobre el rol del tamaño de la muestra (n) en dos tareas en contexto de azar, y su comprensión del papel de n y N (número de simulaciones) en distribuciones muestrales en un contexto de lanzamientos de monedas; particularmente, en la binomial. Dentro de sus resultados señalan que las respuestas a las tareas dependieron bastante del contexto de esta, los estudiantes que resuelven bien una tarea no necesariamente logran resolver otra con la misma estructura y, en general, usan argumentos similares en las tareas que resuelven; además, indican la existencia de falsas concepciones.

Por su parte, Toledo et al., (2019) exploran los diferentes tipos de razonamientos que tienen sesenta y tres profesores de secundaria frente a dos problemas binomiales (con y sin equiprobabilidad). Para el análisis, proponen una jerarquización basada en la taxonomía SOLO, considerando los elementos necesarios para la resolución de problemas binomiales y destacando la definición clásica de probabilidad, el uso de diagramas de árbol, la regla del producto, la combinatoria y la fórmula de la distribución binomial como indicadores de transición entre niveles de razonamiento.

Con relación a estudios sobre la distribución binomial y la conexión entre el enfoque frecuencial y clásico de la probabilidad, podemos mencionar el realizado por Bill et al., (2009). En este estudio se examina un problema binomial mediante tres métodos diferentes: clásico, el triángulo de Pascal y un enfoque frecuencial con el uso de Fathom. Participaron diecinueve estudiantes de décimo grado al responder un pre-test y post-test, con ítems comunes, aplicados bajo condiciones de un examen tipo tradicional. Para el análisis de las respuestas se definieron niveles jerárquicos considerando la taxonomía SOLO. El post-test mostró que dieciséis estudiantes tuvieron procedimientos correctos en al menos un método, y doce fueron competentes en los tres métodos. Además, mencionan que Fathom proporcionó un rol de respaldo y una tercera perspectiva sobre el tema, además, pareció ser más valorado por los estudiantes menos hábiles que por los más competentes en procedimientos.

Los trabajos de investigación aquí mencionados nos dan un panorama de la relación entre el concepto de distribución binomial con otros conceptos probabilísticos, así como los errores y dificultades que presentan los estudiantes para desarrollar un razonamiento probabilístico adecuado.

Metodología

Método de investigación y participantes

De acuerdo con Yin (1994, p. 13), un estudio de caso es “una investigación empírica que estudia un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de la vida real, especialmente cuando los límites entre el fenómeno y su contexto no son claramente evidentes”. Esta investigación, de carácter cualitativo de tipo descriptivo, corresponde a un estudio de caso en el que se trabajó con siete profesores de matemáticas que estaban inscritos en la Unidad de Aprendizaje *Probabilidad y Estadística*, curso optativo de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Esta maestría tiene orientación profesionalizante, cuyo propósito es incidir en el desarrollo profesional de las competencias del profesor de matemáticas centradas en la planeación, desarrollo y evaluación de estrategias que promuevan su mejora continua.

Los participantes no habían recibido ningún tipo de enseñanza formal acerca de la distribución binomial durante el curso de la maestría, y no recibieron información alguna respecto del propósito del estudio. La Tabla 1 muestra algunas características de los participantes, quienes se identifican con pseudónimos.

Tabla 1: Características de los participantes del estudio

Profesor	Edad	Grado académico	Nivel educativo en el que imparte clase	Años de experiencia docente	Había tomado algún curso de probabilidad o estadística en su carrera
Emanuel	29	Licenciatura en Matemáticas	Secundaria	7	Si
Ismael	35	Maestría en Competencias Profesionales para la Docencia Licenciatura en Educación Primaria	Primaria	12	Si
Ignacio	39	Licenciatura en Arquitectura y Urbanismo	Secundaria	3	No
José	35	Licenciatura en Matemáticas y Computación	Media superior	4	Si
María	32	Licenciatura en Matemáticas	Secundaria	2	Si
Mónica	26	Licenciatura en Matemáticas	Media superior	2	Si
Beatriz	29	Licenciatura en Matemáticas	Media superior	3	Si
Nota: En México, la Secretaria de Educación Pública (SEP) señala que la edad reglamentaria o idónea del estudiante para cada nivel educativo es: educación preescolar de 3 a 6 años, educación primaria de 6 a 12 años, educación secundaria de 12 a 15 años, y educación media superior de 15 a 18 años.					

Fuente: Elaborado por los autores (2020)

En México es común encontrar contadores públicos, administradores, arquitectos, etc., ejerciendo la labor de profesor de matemáticas, como es el caso de Ignacio; o bien, el caso de Ismael quien es profesor de educación primaria e imparte todas las asignaturas en el aula de clase (por ejemplo: Matemáticas, Ciencias Naturales, Geografía, Historia, Formación Cívica y Ética).

Instrumentos de recolección de datos y procedimiento de aplicación

Los instrumentos de recolección de datos que se utilizaron fueron: un cuestionario, que sirvió como previo y posterior, y una actividad guiada de simulación computacional para trabajar con el software Fathom, acompañada de preguntas para responder en hojas de trabajo. Cada uno de los instrumentos nace del rediseño de los elaborados por García-García (2017), considerando un problema que cumple con las características de un experimento binomial denominado ¡Refresco gratis!, donde la $X \sim Binomial\ \left(3,\ \frac{1}{2}\right)$. En el cuestionario se plantearon cinco tareas enfocadas en: 1) describir los elementos del espacio muestral, 2) indicar los valores de la variable aleatoria, 3) calcular la probabilidad de cada valor de la variable, 4) calcular la probabilidad de un evento compuesto y 5) predecir las frecuencias de cada valor de la variable en 1000 repeticiones del experimento. Por limitaciones de espacio, en este artículo sólo se expondrán y comentarán las tareas 3 y 4, las cuales se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2: Problema binomial y tareas de estudio

Problema binomial	Tarea 3. Distribución de probabilidad	Tarea 4. Probabilidad de un evento compuesto
¡Refresco gratis! Una compañía refresquera lanzó una promoción en todos sus productos en México. La promoción consiste en que las tapas que tengan la leyenda "Vale Otro" bajo la misma, podrán ser canjeadas de manera gratuita por el mismo refresco; es decir, recibirá un refresco gratis. La publicidad de la compañía indica que una de cada dos tapas tiene la leyenda.	Si una persona destapa tres refrescos, indica la probabilidad de obtener: a) ningún refresco gratis b) un refresco gratis c) dos refrescos gratis d) tres refrescos gratis Explica tu respuesta.	Si una persona destapa tres refrescos, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos dos refrescos gratis? Explica tu respuesta.

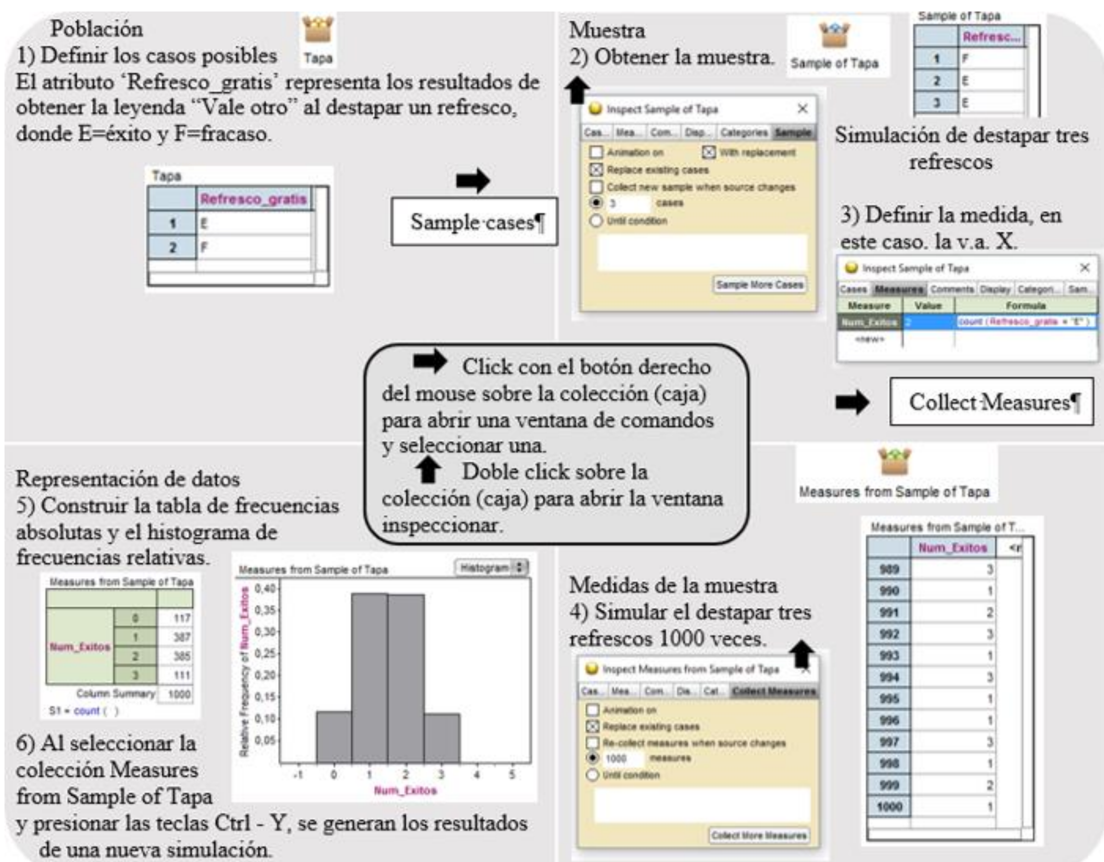
Fuente: Elaborado por los autores (2020)

Estos instrumentos se aplicaron en tres etapas:

- Etapa previa. Los profesores responden el cuestionario previo; esto cumple con el objetivo de explorar el razonamiento que poseen acerca del cálculo de probabilidades de eventos inscritos en un problema binomial, antes de realizar la actividad de simulación computacional.

- Etapa de simulación computacional. Los profesores realizan la simulación computacional del problema binomial a partir del desarrollo de una actividad guiada con Fathom. Primero, simulan el experimento de destapar tres refrescos con el objetivo de reconocer los elementos del espacio muestral (Ω = {EEE, EEF, EFE, EFF, FEE, FEF, FFE, FFF}, donde E=éxito y F=fracaso de obtener refresco gratis). Después, identifican los valores de la variable aleatoria (v.a.) X = 'número de refrescos gratis que se obtienen al destapar tres refrescos' ($X = 0, 1, 2, 3$). Posteriormente, efectúan la simulación de 1000 veces el experimento; con los datos obtenidos, realizan la tabla de frecuencias absolutas y el histograma de frecuencias relativas (enfoque frecuencial de la probabilidad). Finalmente, los profesores repiten la simulación en varias ocasiones con sólo presionar un par de teclas de manera conjunta, actualizándose los resultados en cada una de ellas; esto permite al profesor estudiar el comportamiento de la distribución binomial $B\left(x, 3, \frac{1}{2}\right)$ y la conexión entre el enfoque frecuencial y clásico de la probabilidad. En la Figura 1 se presenta de manera sucinta el proceso de simulación computacional del problema binomial ¡Refresco gratis!

Figura 1: Proceso de simulación con Fathom



Fuente: Elaborado por los autores (2020)

- Etapa posterior. Los profesores respondieron el cuestionario posterior; esto cumple con el objetivo de identificar el razonamiento que poseen acerca del cálculo de probabilidades de eventos inscritos en un problema binomial, después de realizar la actividad de simulación computacional.

Los cuestionarios previo y posterior se llevaron a cabo en sesiones de 30 minutos; mientras que la actividad de simulación computacional se realizó en una sesión de 60 minutos. Cabe señalar que Fathom es un software dinámico creado para la enseñanza de la probabilidad y la estadística. Algunas de sus funciones sobresalientes son la simulación de un experimento aleatorio en repetidas ocasiones, la representación y coordinación simultanea de datos en tablas y gráficos estadísticos, el cálculo de estadísticos como la media y la desviación estándar, la reproducción de distribuciones muestrales, la generación de datos aleatorios de diversas distribuciones, entre otras, que permiten concebir una gran cantidad de situaciones aleatorias (Erickson, 2008; Sánchez, 2002).

Procedimiento de análisis

La manera de responder de los profesores a las tareas 3 y 4 puede estar influida por su conocimiento inicial de la distribución teórica de probabilidad de la situación o por su descubrimiento con el desarrollo de la actividad de simulación. En el cuestionario previo se esperaba que los profesores asignaran valores bajo el enfoque subjetivo de la probabilidad; mientras que, en el cuestionario posterior se esperaban respuestas bajo el enfoque clásico, o bien, debido a que trabajaron con simulación computacional, propusieran valores bajo una aproximación frecuencial a la probabilidad. Para el análisis de las respuestas de los participantes a las tareas del estudio, se definieron niveles jerárquicos considerando los primeros cuatro del modelo taxonómico SOLO (ver Tabla 3).

Tabla 3: Niveles de razonamiento para tareas de estudio

Nivel	Tarea 3. Distribución de probabilidad	Tarea 4. Probabilidad de un evento compuesto
Preestrutural	La respuesta es incoherente o no pertinente, o bien, presenta elementos extraños a la situación o son incomprensibles.	La respuesta es incoherente o no pertinente, o bien, presenta elementos extraños a la situación o son incomprensibles.
Uniestructural	La respuesta muestra presencia o ausencia de la estructura de la distribución teórica de probabilidad, de manera excluyente. Por ejemplo, muestra presencia de la estructura cuando proporcionan probabilidades muy alejadas a las teóricas, pero consideran la forma de la distribución de probabilidad (las probabilidades de los valores de X=1 y X=2 son mayores que las de X=0 y X=3). Por otro lado, muestra ausencia de la estructura cuando proporcionan probabilidades que no cumplen con la forma de la distribución de probabilidad.	La respuesta presenta sólo la probabilidad del valor de X=2 o de X=3, de manera excluyente; ya sea bajo el enfoque clásico o frecuencial.
Multiestructural	La respuesta presenta valores correspondientes a una aproximación frecuencial a la probabilidad, por lo que se muestra la presencia de la estructura de la distribución teórica de probabilidad. Las frecuencias relativas proporcionadas de 0, 1, 2 y 3 caen dentro de los rangos de 0.125 ± 0.015, 0.375 ± 0.025, 0.375 ± 0.025 y 0.125 ± 0.015, respectivamente.	La respuesta presenta un valor correspondiente a una aproximación frecuencial a la probabilidad: $P(X \geq 2) = 0.5 \pm 0.025$
Relacional	La respuesta presenta la probabilidad teórica de cada valor de la variable aleatoria: $P(X = 0) = {}^{1}/_{8} = 0.125$, $P(X = 1) = {}^{3}/_{8} = 0.375$, $P(X = 2) = {}^{3}/_{8} = 0.375$ y $P(X = 3) = {}^{1}/_{8} = 0.125$	La respuesta presenta la probabilidad teórica del evento compuesto: $P(X \geq 2) = {}^{4}/_{8} = {}^{1}/_{2} = 0.5$
Nota: Con apoyo de Fathom se simulan 1000 valores de la variable aleatoria, se determina la frecuencia relativa de cada valor (0, 1, 2, 3) y se calcula la diferencia con la probabilidad teórica. Este proceso se repite 100 veces y se observa la distribución de las diferencias. Se toma un rango que en promedio considere el 90% de las frecuencias relativas simuladas, con centro en el valor teórico para cada valor de la variable.		

Fuente: Elaborado por los autores (2020)

Resultados

Tarea 3. Distribución de probabilidad binomial B $\left(x, 3, \frac{1}{2}\right)$

La Tabla 4 presenta la transcripción de las respuestas de los profesores a la tarea de distribución de probabilidad, en los cuestionarios previo y posterior, y su clasificación en los niveles jerárquicos propuestos.

Tabla 4: Clasificación de las respuestas a la tarea de distribución de probabilidad

Profesor	Respuesta en el cuestionario previo	Nivel	Respuesta en el cuestionario posterior	Nivel
Emanuel	0, 0, 1, 0 Porque digo que uno, porque muy claro dice que por cada 2 tapas hay premio.	Preestructural	1/8, 3/8, 3/8, 1/8 Con base en las posibilidades.	Relacional
Ismael	½, ½, ½, ½ - - - - -	Preestructural	1/8, 3/8, 3/8, 1/8 Al destapar tres resultados sólo existen 8 posibles resultados.	Relacional
Ignacio	0, 1, 2, 3 Aumenta la probabilidad igual al número de refrescos	Preestructural	0.125, 0.375, 0.375, 0.125 La probabilidad de un evento es de 0 a 1.	Relacional
José	1, 2, 3, 0 Son 6 posibilidades que se pueden obtener, pero no sabemos exactamente a cuantos les corresponde cada uno	Preestructural	2, 3, 3, 0 Es más alta la condición que resulte 1 y 2	Preestructural
María	0, 3, 3, 3 Dado que la probabilidad tiene nueve casos posibles, las posibilidades es que cada valor es que salga tres veces pueda salir (gano, pierdo, gano)	Preestructural	0, 1, 2, 6 Dado que hay posibilidades en donde se puede sacar un refresco gratis, se incluyen algunos eventos.	Preestructural
Mónica	1, 2, 2, 1 Se realizan tercias con posibles resultados y solo son las veces que se repiten los casos en la tercia.	Preestructural	1/8, 3/8, 3/8, 1/8 Tengo 8 ternas con diferentes posibilidades y en cada una hay diferentes resultados, sólo tomo las ternas con los valores que pide.	Relacional
Beatriz	3, 3, 3, 3 Porque es una gratis por 2 tapas y si destapamos 3, hay 3 posibilidades de cada uno	Preestructural	0, 3, 2, 1 Hay más probabilidad de que salga un refresco gratis, porque por cada dos, uno es gratis.	Preestructural

Fuente: Elaborado por los autores (2020)

En el cuestionario previo, todas las respuestas se clasifican el nivel preestructural. Todos los profesores, excepto Ismael, proporcionan números enteros como probabilidades, es decir, carecen del conocimiento acerca de que la probabilidad de que ocurra un evento cualquiera varía entre 0 y 1. Ismael propone una distribución uniforme, incurriendo en el sesgo de equiprobabilidad (este sesgo hace referencia a la creencia de que todos los eventos asociados a cualquier experimento aleatorio tienen la misma probabilidad de ocurrencia); este mismo sesgo podría asociarse a las repuestas de María y Beatriz, cuyas justificaciones aluden a la idea de que todos los resultados posibles son igualmente probables. En general, los razonamientos probabilísticos de los profesores tenían un punto de vista subjetivo (asignación subjetiva de probabilidades).

En el cuestionario posterior, después de la simulación computacional, los razonamientos probabilísticos de Emanuel, Ismael, Ignacio y Mónica tienen un enfoque clásico (cociente entre casos favorables y casos posibles), es decir, logran asignar la probabilidad teórica a cada valor de la variable aleatoria. Esto supone que la simulación permitió un análisis de la estructura del experimento binomial. Sin embargo, no se presentó un cambio en las nociones de José, María y Beatriz, cuya asignación de probabilidad siguió siendo de manera subjetiva.

Tarea 4. Probabilidad de un evento compuesto $P(X \geq 2)$

En la Tabla 5 se presenta la transcripción de las respuestas de los profesores a la tarea de probabilidad de un evento compuesto, en el cuestionario previo y posterior, y su clasificación en los niveles de razonamiento propuestos.

Tabla 5: Clasificación de las respuestas a la tarea de probabilidad de un evento compuesto

Profesor	Respuesta en el cuestionario previo	Nivel	Respuesta en el cuestionario posterior	Nivel
Emanuel	1 Ya que la promoción es muy clara	Preestructural	0.375 Ya que existen 3 posibilidades de 8	Uniestructural
Ismael	2 probabilidades Le puede salir gratis la primera y una de la segunda o tercera	Preestructural	4/8 Al destapar tres refrescos tenemos una probabilidad de 1/8; entonces, al destapar al menos tres tendremos 4/8	Relacional
Ignacio	50% de probabilidad Porque en cada botella es 50% probable y 50% no probable	Preestructural	3/8 Solo hay 3 posibles resultados de obtener 2 refrescos gratis de los 8 posibles	Uniestructural
José	2/6, porque existen dos posibilidades de 6 posibles	Preestructural	3/8 Porque existen tres posibilidades de 8 posibles	Uniestructural
María	La probabilidad es de 3/9 = 1/3	Preestructural	La probabilidad de que salgan dos refrescos gratis es 2/9	Preestructural
Mónica	2/6, sólo hay dos tercias donde pueden salir dos posibles refrescos gratis	Preestructural	4/8 de las 8 ternas, sólo 4 tienen 2 o más refrescos	Relacional
Beatriz	3 posibilidades	Preestructural	2 posibilidades, porque por cada 2 sale uno 1er R y 2doR → 1R grátis	Preestructural

Fuente: Elaborado por los autores (2020)

Como podemos observar, todas las respuestas de los profesores al cuestionario previo se clasifican en el nivel preestructural (de manera similar que en la tarea anterior). Sin embargo, es interesante citar el caso de Ignacio, José, María y Mónica, quienes en esta tarea proporcionan probabilidades entre 0 y 1 (o en porcentaje en el caso de Ignacio). El razonamiento probabilístico de Ignacio posiblemente alude a la idea de un ensayo Bernoulli, en donde sólo se pueden obtener dos resultados, o bien, es de suponer que la respuesta se debe a que considera lo que indica el problema 'una de cada dos tapas tiene la leyenda'. Los razonamientos probabilísticos de José y Mónica se basan en la idea de que existen dos casos favorables entre seis posibles, mientras que María indica tres casos favorables entre nueve posibles; en estos casos no fue posible saber cuál era la idea del profesor en su justificación. Emanuel, Ismael y Beatriz asignan un número entero a la probabilidad solicitada.

El caso de Ismael también es interesante, esto porque le asigna a la probabilidad de la tarea 3 un número entre 0 y 1, mientras que en la tarea 4 no traslada esa idea en su respuesta; en su razonamiento probabilístico, bajo un enfoque subjetivo, se apega a la idea de que obtendrá un refresco gratis en la primera tapa (es decir, asegura que sucederá ese resultado) y otro refresco gratis en la segunda o tercera tapa, lo que indica tener una noción parcial de la aleatoriedad del experimento.

En el cuestionario posterior, después de la simulación computacional, las respuestas de María y Beatriz se clasifican en el nivel preestructural, cuyos razonamientos probabilísticos se apegan a lo mostrado en el previo. Emanuel, Ignacio y José consideraron sólo el valor de la probabilidad de la variable aleatoria igual a dos, es decir, no sumaron el valor de la variable igual a tres, por lo que sus respuestas se clasificaron en el nivel uniestructural; consideramos el razonamiento probabilístico de estos profesores como parcialmente adecuado desde el punto de vista de que únicamente indican la probabilidad de un evento. Las respuestas de Ismael y Mónica se clasifican en el nivel relacional, al considerar y/o sumar las probabilidades de la variable aleatoria igual a dos e igual a tres.

Consideración conjunta de las respuestas a las tareas 3 y 4

Para organizar y analizar las respuestas de las tareas 3 y 4 de manera conjunta, se considera la clasificación de acuerdo con los niveles de razonamiento en cada una de ellas, por cuestionario, y se realiza una tabla de contingencia (ver Tabla 6).

Tabla 6: Consideración conjunta de la clasificación de las respuestas de los profesores

Cuestionario previo					
Tarea 4. Probabilidad de un evento compuesto					
	Nivel	Preestrutural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
Tarea 3. Distribución de probabilidad	Preestrutural	Emanuel, Ismael, Ignacio, José, María, Mónica, Beatriz			
	Uniestructural				
	Multiestructural				
	Relacional				
Cuestionario posterior					
Tarea 4. Probabilidad de un evento compuesto					
	Nivel	Preestrutural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
Tarea 3. Distribución de probabilidad	Preestrutural	María, Beatriz	José		
	Uniestructural				
	Multiestructural				
	Relacional		Emanuel, Ignacio		Ismael, Mónica

Fuente: Elaborado por los autores (2020)

El análisis de manera conjunta permitió observar que los niveles de razonamiento de los profesores en el cuestionario previo no cambian con respecto al tipo de tarea, todas las respuestas se clasificaron en preestructural.

En el cuestionario posterior, no se muestra cambio en los casos de María y Beatriz en preestructural, e Ismael y Mónica en relacional. Se observa una modificación en niveles de razonamiento de las respuestas de Emanuel e Ignacio, pero ésta se justifica porque en la tarea 4 sólo consideran el valor de la probabilidad de la variable aleatoria igual a dos. Sin embargo, al analizar el caso de José, observamos que su razonamiento probabilístico es inadecuado, ya que sus respuestas a la tarea 3 y 4 se clasifican en preestructural y uniestructural, al proporcionar números enteros como probabilidades (*2, 3, 3, 0*) y un número entre 0 y 1 (*3/8*), respectivamente.

En general, nuestros resultados coinciden con los de otros estudios (e.g. Alvarado y Batanero, 2007; García-García et a., 2018; Maxara y Biehler, 2010) en relación con el uso de la simulación computacional para favorecer en la comprensión de la binomial. Por otro lado, como se mencionó en líneas anteriores, en este estudio se analizaron los niveles de razonamiento probabilístico de profesores de matemáticas frente a tareas de cálculo de probabilidades binomiales bajo una aproximación frecuencial, o bien, desde el enfoque clásico haciendo uso de la regla de Laplace, a diferencia de los realizados en otras investigaciones en donde se proponen niveles de razonamiento a partir del uso de la combinatoria y la fórmula binomial (Landín & Sánchez, 2010; Toledo et al., 2019).

Conclusiones

La enseñanza de la probabilidad, así como las investigaciones en torno a la comprensión de ésta, ha venido creciendo en los últimos años; esto debido a que un buen manejo de probabilidad debe ser parte de las competencias que debe poseer un profesor, como sus estudiantes. En general, consideramos que un ciudadano debe saber probabilidad para entender muchos de los fenómenos aleatorios que ocurren en la vida cotidiana. Bajo esta perspectiva, este estudio permitió observar la forma de calcular o estimar, a priori, la probabilidad de eventos por siete profesores de matemáticas, y el desarrollo su razonamiento probabilístico frente a tareas de cálculo de probabilidades en problemas binomiales mediante simulación computacional.

El uso que se le dio a la simulación computacional en este estudio fue el de un mediador semiótico, permitiendo establecer relaciones entre las frecuencias absolutas y relativas representadas en una tabla y un histograma, respectivamente, del experimento aleatorio trabajado. Uno de los elementos que podemos destacar es la gran cantidad de datos que nos permite desarrollar esta simulación y que genera en el profesor competencias de predicción de un fenómeno estocástico, así como el cálculo de probabilidades desde un enfoque frecuencial.

Inicialmente, en el cuestionario previo, los razonamientos probabilísticos de los profesores tenían un punto de vista subjetivo, por lo que sus respuestas se clasifican en el nivel preestructural. Para percibir la conexión entre el enfoque frecuencial y clásico de la probabilidad, se les guio a los profesores para que simularan, con apoyo de Fathom, el problema binomial ¡Refresco gratis!, $B\left(x, 3, \frac{1}{2}\right)$, y observaran las frecuencias absolutas y relativas de los valores de la variable aleatoria, realizando comparaciones entre las distribuciones de frecuencias y confrontando sus nociones iniciales. Se esperaba que, a partir de lo realizado en la simulación, los profesores ajustaran sus razonamientos subjetivos de probabilidad hasta que emergieran los valores teóricos, esperando que pudiesen ser relacionados con los elementos del espacio muestral y los valores de la variable aleatoria, o bien, debido a que trabajaron con simulación computacional, propusieran valores bajo una aproximación frecuencial a la probabilidad.

Después del uso del software Fathom, se les solicito a los profesores contestar nuevamente las tareas del problema con la intención de que recuperaran los resultados de la etapa anterior. Sin embargo, únicamente cuatro profesores modificaron su razonamiento, alcanzado el nivel relacional en la tarea de encontrar los valores de la distribución de probabilidad binomial; mientras que dos profesores lo alcanzaron en la tarea de encontrar la probabilidad de un evento compuesto. Esto muestra que pocos profesores consideran el enfoque clásico en la solución de las tareas, modificando su razonamiento probabilístico gracias a la simulación computacional. Si bien los resultados son alentadores en relación con el cambio en el nivel de razonamiento, algunos profesores (caso de María y Beatriz) no logran realizarlo; esto posiblemente por su conocimiento arraigado acerca de la probabilidad, o bien, la falta de interés por esta área de la matemática.

Esto, en conjunto con los demás resultados, genera varias inquietudes, supuestos y líneas de investigación. El punto de vista subjetivo predominante de los profesores sugiere debilidades en el proceso formativo del razonamiento probabilístico durante su trayectoria académica, lo que dificulta su capacidad para hacer frente a asuntos probabilísticos del mundo real, presentándose como posibles áreas de investigación la exploración, análisis y desarrollo de este tipo de razonamiento en el proceso de formación del futuro profesor, o en cursos de actualización de profesores en servicio.

Finalmente, resulta pertinente mirar la valoración del uso de la simulación computacional a la luz de los resultados de los participantes, en función al desarrollo del razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial, esto es, respecto a su eficacia y dificultades presentes al momento de trabajar con distintos grupos de personas (por ejemplo, estudiantes de educación media, profesores en formación, profesores en servicio), realizando las modificaciones pertinentes con respecto al nivel de profundización del concepto y con una orientación en el perfeccionamiento del proceso formativo. Esta valoración deja abiertas algunas preguntas por responder: ¿por qué no se genera cambio en el tipo de respuestas dadas por algunos participantes, después de realizar actividades de simulación computacional? ¿de qué manera podemos aumentar la eficacia del uso de la simulación computacional para abordar conceptos estadísticos como la distribución binomial?

Agradecimientos

Este trabajo es parte del *Proyecto de Investigación Universidad de Los Lagos Regular R22/19*, financiado por la Universidad de Los Lagos y su Dirección de Investigación.

Referencias

Abrahamson, D. (2009). Embodied design: constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(1), 27-47. http://doi.org/10.1007/s10649-008-9137-1

Alvarado, H. & Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *67*, 1-7. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/67/ideas_01.pdf

Batanero C., Chernoff E.J., Engel J., Lee H.S., & Sánchez, E. (2016). Research on Teaching and Learning Probability. In *Research on Teaching and Learning Probability. ICME-13 Topical Surveys.* Cham: Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 247-263. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33508302

Biehler, R. & Maxara, C. (2007). Integration von stochastischer Simulation in den Stochastikunterricht mit Hilfe von Werkzeugsoftware. *Der Mathematikunterricht*, *53*(3), 45-61.

Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: The Solo Taxonomy*. New York: Academic Press.

Biggs, J. & Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. In H. A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bill, A., Watson, J. & Gayton, P. (2009). Guessing answers to pass a 5-item true false test: solving a binomial problem in three different ways. *Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, *1* (pp. 57-64). Tasmania: MERGA. https://eprints.utas.edu.au/8967/1/AFBILL_Guessing_answers_to_pass_a_5-item_true_false_test.pdf

Díaz-Levicoy, D., Sepúlveda, A., Vásquez, C. & Opazo, M. (2017). Organización de las respuestas sobre tablas estadísticas por futuras maestras de educación infantil desde la taxonomía SOLO. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, *7*(2), 193-211. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6632901

Erickson, T. (2008). *Fifty Fathoms: Statistics demonstrations for deeper understanding*. Key Curriculum Press.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In G. Jones (Ed), *Exploring probability in school: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 39-63). New York: Springer. http://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

García, J. I., Medina, M., & Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *6*, 5-23. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i6.90

García-García, J. I. (2017). *Razonamiento Probabilístico de Estudiantes de Bachillerato sobre la Noción de la Distribución Binomial* (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de Instituto Politécnico Nacional, México.

García-García, J. I., Arredondo, E. H. & Márquez, M. (2018). Desarrollo de la noción de distribución binomial en estudiantes de bachillerato con apoyo de tecnología. *Revista Paradigma, 39*(2), 92-106. http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/702/698

Hofmann T., Maxara C., Meyfarth T. & Prömmel A. (2014). Using the software FATHOM for learning and teaching statistics in Germany – A review on the research activities of Rolf Biehler's working group over the past ten years. In T. Wassong, D. Frischemeier, P. Fischer, R. Hochmuth y P. Bender (Eds), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics*. (pp. 283-304). Wiesbaden, Alemania: Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-658-03104-6_21

Ireland, S. & Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 229-260. https://www.iejme.com/download/building-a-connection-between-experimental-and-theoretical-aspects-of-probability.pdf

Jones, G., Langrall, C. & Mooney, E. (2007). Research in Probability: Responding to Classroom Realities. In F. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-955). USA: NCTM.

Juárez, J.A. & Inzunsa, S. (2014). Comprensión y razonamiento de profesores de Matemáticas de bachillerato sobre conceptos estadísticos básicos. *Perfiles educativos, 36*(146), 14-29. https://doi.org/10.1016/S0185-2698(14)70125-4

Konold, C., Madden, S. Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I.,…Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1-2), 68-86. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538299

Landín, P. R. & Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa, 12*(3), 598-618. http://200.144.145.24/emp/article/view/4842/3703

Maxara, C. & Biehler, R. (2010). Students' understanding and reasoning about sample size and the law of large numbers after a computer-intensive introductory course on stochastics. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics*. Ljubljana: Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. http://icots.info/icots/8/cd/pdfs/invited/ICOTS8_3C2_MAXARA.pdf

Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Pfannkuch, M. (2005). Characterizing year 11 student's evaluation of a statistical process. *Statistics Education Research Journal, 4*(2), 5-25. http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ4(2)_pfannkuch.pdf?1402525006

Reading, C. & Reid, J. (2006). An emerging hierarchy of reasoning about distribution: from a variation perspective. *Statistics Education Research Journal*, *5*(2), 46-68. https://rune.une.edu.au/web/bitstream/1959.11/236/5/open/SOURCE02.pdf

Sánchez, E. (2002, Julio). *Teachers' beliefs about usefulness of simulation with the educational software fathom for developing probability concepts in statistics classroom*. In Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics, Sudáfrica. http://iase-web.org/documents/papers/icots6/6e2_sanc.pdf

Toledo, A., Tobar, Montenegro, D. & Vicencia, I. (2019). Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales. *Brazilian Journal of Development*, *5*(6), 5399-5410. https://doi.org/10.34117/bjdv5n6-079

Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Autores

Jaime I. García-García
Doctor en Ciencias, Especialidad Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.
Académico del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos, Chile.
Línea de investigación: Didáctica de la probabilidad y la estadística. E-mail: jaime.garcia@ulagos.cl

Nicolás A. Fernández Coronado
Estudiante de Pedagogía en Educación Media en Matemática y Computación de la Universidad de Los Lagos, Chile. E-mail: nicolasalonso.fernandez@alumnos.ulagos.cl

Isaac A. Imilpán Rivera
Estudiante de Pedagogía en Educación Media en Matemática y Computación de la Universidad de Los Lagos, Chile. E-mail: isaacalejandro.imilpan@alumnos.ulagos.cl