ERRORES EN EL ÁLGEBRA ESCOLAR

Errors in School Algebra

José Antonio Fernández Plaza[a)], María C. Cañadas Santiago[a)], Isidoro Segovia Alex[a)]

[a)] Universidad de Granada

Resumen

La mayoría de los trabajos actuales centrados en el álgebra escolar atienden a lo que los estudiantes son capaces de hacer, que es más de lo que se les atribuía hace unas décadas. Sin embargo, es importante saber cómo abordar los errores y las dificultades que aparecen en el aula de diferentes niveles educativos. En este trabajo realizamos una revisión de la investigación sobre errores y dificultades de estudiantes en el álgebra escolar en el grupo de investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico". Además, mostramos ejemplos de algunas investigaciones del citado grupo en diferentes niveles del sistema educativo español. En las conclusiones, destacamos algunas similitudes y diferencias entre los errores (algebraicos y de otros tipos) en los que incurren estudiantes de diferentes niveles educativo. También introducimos una posible línea de investigación con base en el trabajo presentado.

Palabras clave: Álgebra escolar, Bachillerato, Educación Primaria, Educación Secundaria, errores, Universidad

Abstract

Most current studies focusing on school algebra are focused on to what students are capable of doing, which is more than what was supposed some decades ago. However, it is important to know how to deal with the errors and difficulties that appear in the classroom at different educational levels. In this paper, we conducted a review of the studies on the errors and difficulties of students in school algebra in the research group "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico". In addition, we show examples of some studies of the aforementioned group in different courses of the Spanish educational system. In the conclusion, we highlight some similarities and differences among students' errors (algebraic errors and other types) in different educative levels. We also introduce a research line basing in this study.

Keywords: Bachillerato, errors, Primary Education, School Algebra, Secondary Education, University

Fernández-Plaza, J. A., Cañadas, M. C., y Segovia, I. (2019). Errores en el álgebra escolar. En A. Codina y M. F. Moreno (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico: 2018* (pp. 219-234). Almería, España: Editorial de la Universidad de Almería.

INTRODUCCIÓN

Los errores están presentes en nuestro día a día. Sin embargo, en lo relativo a la enseñanza-aprendizaje, tienen una connotación negativa, particularmente en matemáticas. Diferentes autores reivindican el error como una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento (v.g., Rico, 1995). En este trabajo nos unimos a esta reivindicación.

El álgebra es una de las áreas de matemáticas que más dificultades y errores generan a los estudiantes. Esta ha sido la principal razón para el nacimiento de la corriente conocida como *early algebra,* que promueve la introducción de elementos para fomentar el pensamiento algebraico desde los primeros cursos del sistema educativo. Conocer la naturaleza de los errores y diferentes tipologías puede ayudar a la toma de decisiones que puedan llevar a su superación.

El objetivo de este trabajo es presentar diferentes errores relacionados con el álgebra que emergen del trabajo de estudiantes de distintos niveles educativos, desde la Educación Primaria. Para ello comenzamos con algunas ideas generales sobre errores y dificultades. A continuación, mostramos ejemplos de investigaciones en el contexto de nuestro grupo de investigación “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico”.

ERRORES

Los errores en el aprendizaje son esquemas cognitivos inapropiados para una determinada situación, intentos no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación (Matz, 1980). La procedencia de los errores es diversa. Las dificultades son una posible fuente de errores. De ahí que numerosos estudios traten de forma conjunta errores y dificultades.

Lejos de constituir elementos de carácter punible para los alumnos, los errores deben concebirse como una oportunidad de aprendizaje para el profesor, ya que si es posible evidenciar aquellas causas que lo originaron, se pueden reorientar los procesos de enseñanza hacia la superación de las condiciones que los provocan (Rico, 1997).

Socas (1997), desde una perspectiva general, establece cinco categorías de dificultades asociadas a los errores en matemáticas: la complejidad de los objetos matemáticos, los procesos de pensamiento matemático, los procesos de enseñanza, desarrollo cognitivo de los alumnos y las actitudes afectivas y emocionales. Con base en este trabajo, Ruano, Socas y Palarea (2008) desarrollan una investigación centrada en errores algebraicos. Estos autores sostienen que uno de los orígenes de estos errores es la evolución de las distintas etapas de aprendizaje del sistema de representación que involucra el lenguaje algebraico con respecto al trabajo en aritmética. De esa manera, distinguen errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, errores de procedimiento en los que los estudiantes usan de forma inapropiada las fórmulas o reglas de procedimiento y los errores del álgebra que son debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Para estos investigadores también, algunos errores, tienen otros orígenes en las actitudes afectivas y emocionales, excesos de confianza, bloqueos u olvidos, entre otros.

También Caputo y Macías (2006) destacan la importancia de considerar los errores de los alumnos como valiosos indicadores que permiten conocer los procesos cognitivos que cada escolar realiza al enfrentarse a tareas algebraicas. Estos autores clasifican los errores en cinco categorías:

- Secuencias incoherentes o a primera vista que sean incomprensibles, en las que no es posible su justificación o se justifica incorrectamente en alguno de los pasos de demostración.

- Uso incorrecto de la notación o confusión en el uso del lenguaje algebraico; destacando aquellos que se relacionan en los distintos contextos en los que se usan las letras propias del álgebra, además de los significados que las letras tienen en cada uno de dichos contextos y los problemas de traducción que afronta el estudiante para pasar del lenguaje usual al lenguaje algebraico y viceversa.

- Errores algebraicos elementales, que se dan debido a la carencia de los conocimientos adecuados en los niveles anteriores de educación.

- Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades incluidas entre los contenidos de la asignatura de álgebra.

- Demostraciones incompletas o conclusiones por decreto o con pasos “intermedios” incompletos.

Booth (1984) investiga el papel de las letras como generalización de los números, así como las distintas formas de construir expresiones con letras y números. El estudio establece las interpretaciones de las letras como fuentes de errores:

- Letra evaluada.

- Letra ignorada.

- Letra como objeto.

- Letra como cantidad desconocida con valor único.
- Letra como número generalizador.

Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1989) se hacen eco del trabajo de Küchemann (1980) y Booth (1984), concluyendo que muchos de los errores son atribuibles a aspectos como: la naturaleza y significados de los símbolos las letras, el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra, la comprensión de la aritmética y el uso inapropiado de fórmula o reglas.

INVESTIGACIONES SOBRE ERRORES RELACIONADOS CON EL ÁLGEBRA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

El álgebra no es un contenido curricular de Educación Primaria en la mayoría de los países, incluido España. Sin embargo, desde el *early algebra* se pretende aprovechar el potencial de contenidos matemáticos que sí aparecen recogidos en el currículo de Educación Primaria para promover capacidades en los niños que les sean útiles para el nivel educativo en el que se encuentran como en los sucesivos. En el caso español, la *Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa* (2013) recoge que los estudiantes de Educación Primaria deben terminar esta etapa siendo capaces de "de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones" (Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte [MECD], 2014, p. 193879). Esto deja abierta la puerta de trabajar nociones como los patrones, la generalización, la variación entre cantidades que covarían (contexto funcional) que forman parte del pensamiento algebraico.

En el grupo de investigación "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" hay varios estudios exploratorios que centran su interés en los errores y dificultades que presentan estudiantes de Educación Primaria en el contexto de dos proyectos de investigación relativos al pensamiento algebraico en estas edades. En particular, mostramos aquí ejemplos de dos trabajos centrados en los primeros y los últimos cursos de este nivel educativo (Cañadas, Morales y Bautista, en revisión; Hidalgo, 2018).

Cañadas, Morales y Bautista (en revisión) identifican y describen los errores y dificultades que presentan ocho estudiantes de segundo de Educación Primaria (7 años) ante un problema de generalización contextualizado que involucra la función $f(x)=x+5$ presentado en un ambiente de entrevista semiestructurada. El contexto del problema consistía en una abuela que la daba a su nieto cinco euros y cada domingo le daba un euro más. El problema se les introdujo a través de casos particulares y se les preguntaban por cuántos euros tendría ahorrados el nieto cuando pasaran un determinado número de domingos. Finalmente, se les preguntaba por el caso general involucrado en el problema. En la Figura 1 presentamos algunas preguntas de las que se plantearon a los estudiantes así como el entorno en el que realizamos la entrevista. En el entorno se observa que facilitamos a los estudiantes una hucha y monedas. También se les dio papel por si necesitaban anotar alguna información.

- Si pasan 5 domingos, ¿cuánto dinero habrá en la hucha?

- Si pasan 15 domingos, ¿cuánto dinero habrá en la hucha?

- Si pasan 100 domingos, ¿cuánto dinero habrá en la hucha?

- ¿Cómo averiguas siempre cuánto dinero tiene el nieto en la hucha?

Figura 1. Ejemplos de preguntas en problema de la hucha y entorno de realización de la entrevista

Por un lado, hubo estudiantes que no respondieron a ciertas preguntas. Esto evidenció dificultades de los estudiantes para responderlas. Por otro lado, identificamos los errores que presentamos a continuación, acompañados de respuestas de los estudiantes que ejemplifican varios de ellos.

- Sumar la cantidad de la variable independiente a la última cantidad utilizada de la variable dependiente. En el siguiente fragmento mostramos un ejemplo de este tipo de error.

Entrevistadora (E): Y después de ocho domingos?
S6: 18.
E: ¿Por qué? ¿Cómo lo has averiguado? […]
S6: Bueno […] como después de cinco domingos tengo diez euros, después de diez domingos, bueno, diez más ocho, dieciocho.

- *Responder sin sentido*. Este error se identificó tanto en preguntas sobre casos particulares como en preguntas por el caso general. También estuvo presente en la justificación que dieron algunos estudiantes a sus respuestas.

- Sumar cinco a la última cantidad conocida de la variable dependiente.

- *Errar al considerar la constante de la función*. Un ejemplo es cuando el entrevistador le preguntó a S2 por el dinero que tendría después de 15 domingos y la respuesta fue “15 euros

[…] si tenía 13 (último valor de la variable dependiente conocida) y 2 domingos más, serían 15”. Este estudiante calculó el valor de la variable independiente sumando dos al último valor conocido de la variable dependiente (13 más 2, porque el valor de la variable independiente era 15, usando la función identidad para dar respuesta.

- *Incurrir en un error aritmético*. Un ejemplo se observa cuando la entrevistadora pregunta a un estudiante por el dinero que tendría pasados 77 domingo. La respuesta fue 82. La conversación continuó como mostramos a continuación.

E: Y, si pasaran ciento veinte domingos, ¿cómo calcularías el dinero que tienes?
S6: Ciento once.
E: ¿Cómo lo has averiguado?
S6: La diferencia era 39, así que he añadido 39 a 82, y obtengo 111.

Hidalgo (2018) describe el proceso de generalización de ocho estudiantes de sexto de Educación Primaria (12-13 años) en una tarea que implica una relación funcional con configuraciones puntuales, presentada durante una entrevista. El estudio sigue un enfoque mixto de naturaleza descriptiva y exploratoria. Dentro del proceso de generalización, el foco de atención se centra en las respuestas inadecuadas de los estudiantes, las intervenciones del entrevistador ante este tipo de respuestas, los efectos luego de las intervenciones y el tipo de generalización que logran los estudiantes. La tarea involucra la función del tipo $f(x)=4x+1$ y se introduce como presentamos en la Figura 2.

“Tenemos un punto (se dibuja el punto para cero minutos), cuando ha pasado un minuto al punto le ocurre esto (se dibujan los puntos para un minuto), luego cuando pasan dos minutos ocurre lo siguiente (se dibujan los puntos para dos minutos)…”

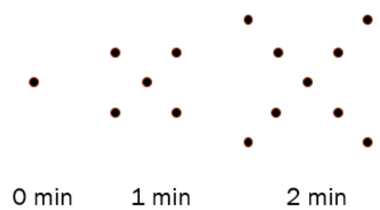


Figura 2. Tarea planteada hasta los dos minutos

En lo referente a las respuestas inadecuadas, esta investigadora identifica los siguientes tipos de errores, de los que también presentamos ejemplos significativos:

- Error de conteo.
- Error de cálculo.
- Respuesta sobre un caso particular distinto al que se pide.
- Resultado numérico erróneo.
- Error de procedimiento.

En el siguiente fragmento de entrevista se observa un error de procedimiento y un error de cálculo.

E: Si yo te dijera aquí (indicando en la tabla la columna de los minutos) 100.
A1: (la alumna realiza cálculos mentales y completa la tabla con 410) creo que es esto.
E: ¿Por qué?
A1: Porque he multiplicado 100 por 41, yo no sé.

En el fragmento se observa un error de procedimiento de A1 al multiplicar por 100 el caso particular encontrado para los 10 minutos (41). Además, se observa un error de cálculo.

En general, Hidalgo (2018) evidencia mayor presencia de errores de procedimiento en el grupo de estudiantes de sexto de Educación Primaria con los que trabaja.

INVESTIGACIONES SOBRE ERRORES RELACIONADOS CON EL ÁLGEBRA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

En los estudios que se han llevado a cabo dentro del grupo en la última década se han abordado los errores algebraicos de estudiantes de Educación Secundaria en el contexto específico de la traducción de enunciados algebraico entre los sistemas de representación verbal y simbólico (Molina, Rodríguez-Domingo, Cañadas y Castro, 2017; Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro, 2015). Cada uno de los dos sentidos de esta traducción se relaciona con dos procesos relacionados con los problemas matemáticos: resolución de problemas e invención de problemas. Este es un tipo de trabajo que se suele proponer a los estudiantes de Educación Secundaria en España.

Rodríguez-Domingo et al. (2015) identifican y clasifican los errores en los que incurren 26 estudiantes al realizar dichas traducciones al finalizar su formación algebraica en la Educación Secundaria Obligatoria. Las autoras diseñaron un dominó algebraico en el que los estudiantes debían ubicar sus fichas haciendo coincidir una expresión algebraica en un sistema de representación con otra expresión algebraica equivalente en otro sistema de representación. Con base en el trabajo de Socas (1997), una de las contribuciones de este trabajo es el sistema de categorías establecido para los tipos de errores, que presentamos a continuación.

- *Completitud del enunciado*. Se da cuando falta o sobra algún símbolo o palabra para que la expresión, simbólica o verbal, pueda ser considerada correcta. Así, cuando falta se denomina incompleto y cuando sobra, desmedido.

- *Derivados de la aritmética*. Los errores derivados de la aritmética son los que provienen del incorrecto uso o interpretación de los signos u operaciones. Se distingue entre paréntesis, división/multiplicación, potenciación/multiplicación, suma/multiplicación, división/potenciación.

Por ejemplo, en la Figura 3 mostramos un ejemplo de error en el uso de paréntesis, al hacer equivalentes los dos enunciados algebraicos que se observan.

El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	$\left(x+(x+1)^2\right)$

Figura 3. Ejemplo de error de paréntesis

Otros ejemplos de errores derivados de la aritmética tienen que ver con la confusión entre las dos operaciones involucradas en el nombre del error. Por ejemplo, en la Figura 4 se observa un error de división/multiplicación al considerar las dos expresiones como equivalentes.

$(x \cdot y)^3$	"Un número entre otro número elevado a tres"

Figura 4. Ejemplo de error división/multiplicación

- *Derivados de las características propias del simbolismo algebraico*. Estos errores son específicos y asociados al uso del sistema de representación simbólico. Se distingue entre: Generalización, Particularización, Letras, y Complicación estructural.

El error de generalización se observa cuando se generaliza un elemento o parte del enunciado que es un caso concreto. Por ejemplo, en vez de especificar que - 4 equivale a “se resta el número cuatro”, expresa “se resta un número par”.

El error de complicación estructural se observa cuando no se interpreta apropiadamente la estructura del enunciado algebraico o parte del mismo. Por ejemplo, al representar simbólicamente el enunciado “un número par menos la cuarta parte de otro número” como $2x-4$.

Entre los resultados obtenidos por Rodríguez-Domingo et al. (2015), destacamos la influencia de las características del simbolismo algebraico en los errores en que incurren los estudiantes en la traducción de expresiones verbales a simbólicas y la mayor facilidad para traducir enunciados del sistema de representación simbólico al verbal. En general, hay una baja presencia de errores de completitud del enunciado. Los errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico son más frecuentes en las traducciones del sistema de representación verbal al simbólico.

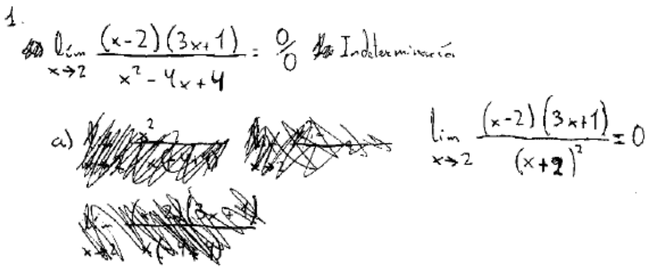
INVESTIGACIONES SOBRE ERRORES RELACIONADOS CON EL ÁLGEBRA EN BACHILLERATO

Una de las dificultades identificadas en las investigaciones acerca del pensamiento matemático avanzado (Azcárate y Camacho-Machín, 2015) es la ruptura con el pensamiento algebraico y sus procedimientos (Artigue, 1995). En un trabajo realizado en el seno del grupo de investigación “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” (Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza, 2013), se analizan los errores que los estudiantes de 1º de Bachillerato manifiestan cuando calculan límites finitos de funciones en un punto, que corresponden a indeterminaciones del tipo $\to 0/\to 0$, que se pueden resolver mediante la simplificación de fracciones algebraicas mediante aplicación conveniente de identidades notables.

Algunos de los errores en los que incurren los estudiantes participantes en este estudio son de base algebraica, es decir, no involucran aspectos relacionadas con propiedades del concepto de límite subyacente. Sin embargo, constatamos en particular, que la técnica algebraica relacionada con el cálculo del límite en infinito es transferida por su aparente sencillez al cálculo sistemático de límites en un punto finito, funcionando como un obstáculo cognitivo, por ello consideramos este error de base algebraica y analítica.

A continuación ejemplificamos algunos errores relacionados con el álgebra y sus evidencias recogidas en el estudio de Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza (2013):

- *Errores debidos al uso de identidades notables en expresiones no relacionadas*. El estudiante factoriza una expresión polinómica empleando una identidad notable que no corresponde con dicha expresión. En la Figura 5, se muestra un ejemplo en el que el estudiante aplica la identidad notable del cuadrado de la suma en vez de la del cuadrado de la diferencia.

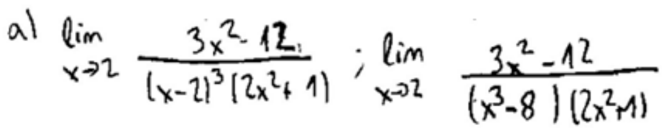


1\. $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x+1)}{x^2-4x+4} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

a) $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x+1)}{(x+2)^2} = 0$

Figura 5. Error asociado al empleo de una identidad notable inadecuada

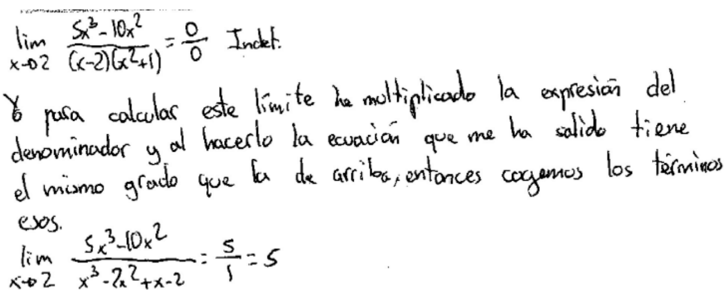
- *Errores debidos la generalización de la propiedad de linealidad*. El estudiante desarrolla el cubo del binomio, $(x\text{-}2)^3$, aplicando erróneamente la linealidad de la operación potencia, llegando a la sentencia $(x\text{-}2)^3=x^3\text{-}8$ (Figura 6).



a) $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)}$; $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-12}{(x^3-8)(2x^2+1)}$

Figura 6. Error asociado a la generalización de la propiedad de linealidad

- *Errores debidos a la aplicación de la técnica algebraica de límite en infinito al caso de límite en un punto finito*. El estudiante tras desarrollar la expresión algebraica de la función, aplica la regla de cálculo de límite en infinito al caso de cálculo del límite en x=2, por su aparente sencillez (Figura 7).



$\lim_{x\to 2} \frac{5x^3-10x^2}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{0}{0}$ Indet.

Y para calcular este límite he multiplicado la expresión del denominador y al hacerlo la ecuación que me ha salido tiene el mismo grado que la de arriba, entonces cogemos los términos esos.

$\lim_{x\to 2} \frac{5x^3-10x^2}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{5}{1} = 5$

Figura 7. Error asociado a la aplicación de técnica algebraica de límite en infinito al caso finito

INVESTIGACIONES SOBRE ERRORES RELACIONADOS CON ÁLGEBRA EN EL NIVEL UNIVERSITARIO

Los errores relacionados con el álgebra persisten incluso en niveles universitarios como así lo demuestra la investigación de García (2010) en diversas carreras del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara (México), algunas de ellas de carácter científico-tecnológico. Los errores detectados están referidos a:

- la eliminación incorrecta de denominadores,
- la realización de operaciones aritmético-algebraicas,
- procedimientos inconclusos,
- procedimientos propios incorrectos o inferencias no válidas,
- aplicación parcial de la regla de factorización por factor común,
- asociación incorrecta de productos notables,
- uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra,
- obtención de la potencia de otra potencia,
- resolución aditiva de la potencia de un binomio,
- aplicación incorrecta de la regla del cubo de un binomio y
- la realización de productos de polinomios.

Un ejemplo de error para el cálculo del cubo de un binomio es $(ab^2 + y^2)^3 = a^3b^6 + y^6$. Otro ejemplo relacionado con el uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra se muestra en la Figura 8:

$$\frac{2y^3 + 5y^2 + 2y + 15}{y + 3}$$

$$\frac{2y^3 + 5y^2}{y+3} + \frac{2y+15}{y+3} = \frac{7y^5}{y+3} + \frac{17y}{y+3} = \frac{24y^6}{3y} = 8y^6$$

Figura 8. Error asociado al uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra

También García, Segovia y Lupiáñez (2014) en un estudio realizado con 194 estudiantes universitarios de primer curso, cuyo objetivo fue analizar los errores más comunes que los alumnos presentan en las producciones al operar con los distintos significados que pueden tener las letras en álgebra según los trabajos de Kücheman (1980) y de Booth (1984), se mostró que más de la mitad de los estudiantes no manifiestan dificultades al evaluar las letras, manejarlas como objetos o considerar su presencia, sin embargo, sí revelan deficiencias en el discernimiento para comprender el uso y significado de las letras como incógnitas de valor especifico, números generalizados y como variables. El 25,6% de los estudiantes manifestaron un aceptable manejo de las letras al evaluarlas y las identificaron como objetos con valores propios. Sin embargo, en ocasiones ignoraron su presencia en las expresiones algebraicas y fueron incapaces de identificarlas con otro significado. Por otro lado, el 53,8% de los estudiantes identifican las letras como incógnitas de valor específico. Pero al igual que los anteriores, tampoco fueron capaces de comprender el uso de las letras como números generalizados o variables. Así, la mayor parte de los estudiantes de nivel universitario que participaron en esta investigación (79,4%), poseen conocimientos algebraicos deficientes.

Ejemplificamos a continuación algunos ejemplos de errores de los estudiantes relacionados con los descriptores anteriormente introducidos:

- *Error al ignorar la letra*. Tal como se muestra en la Figura 9, el estudiante ignora la presencia de n en la expresión $3n$ estableciendo como resultado 12.

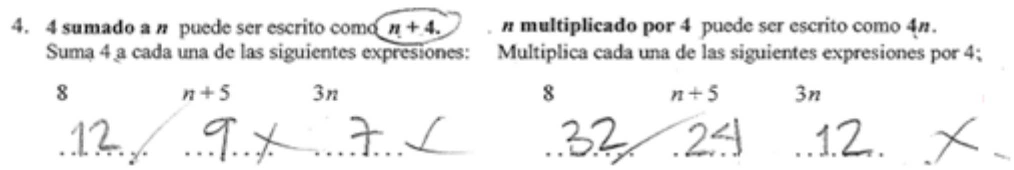


Figura 9. Error de asociar a ignorar la letra

- *Error al considera letra como incógnita de valor específico*. Tal como se muestra en la Figura 10, el estudiante asigna a la letra g un valor arbitrario que es combinado con el valor de una expresión algebraica en f y g dando lugar a un valor concreto erróneo 12.

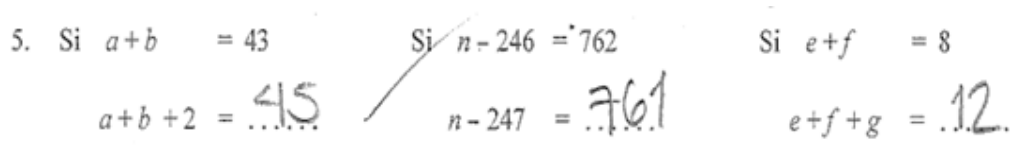


Figura 10. Error asociado a asignar un valor determinado a una letra

- *Error al considerar la letra como un objeto*. En la Figura 11 el estudiante malinterpreta el significado de las variables z y p asociándolas al objeto representado “zanahoria” y “pepino” e interpretando los coeficientes 8 y 6 como cantidades de objetos en vez de operadores multiplicativos.

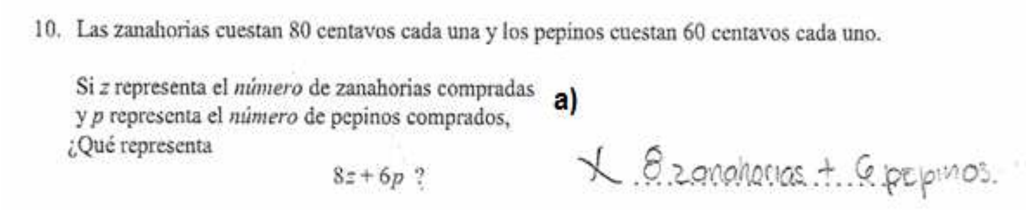


Figura 11. Error asociado a considerar una letra como un objeto en una expresión algebraica

CONCLUSIONES

La investigación sobre errores y dificultades no ha sido una línea prioritaria de investigación en el grupo de investigación “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico”. Sin embargo, como evidencia este trabajo, ha sido una línea transversal en diferentes investigaciones en el contexto de este grupo en una rama tan específica como es el álgebra en diferentes niveles educativos, abarcando desde la Educación Primaria hasta el nivel universitario.

A lo largo del documento hemos evitado hablar de “errores algebraicos” porque, si bien se manifiesta cuando los estudiantes trabajan con tareas relacionadas con el álgebra, no son todos de naturaleza algebraica. En Educación Primaria destacan los errores asociados a las operaciones aritméticas o estrategias de conteo; incluso a una mala comprensión del enunciado. Esto puede estar relacionado con las competencias matemáticas y lectora de los estudiantes en estas edades en los casos en que ellos debían leer los problemas. Los errores derivados de la aritmética parecen persistir hasta la Educación Secundaria y también están presentes en los niveles universitarios. En el nivel de Bachillerato no hemos identificado errores en tareas algebraicas relacionados con la aritmética. Es posible que esto se deba a que son estudiantes de la opción educativa de ciencias y su formación matemática en general y en álgebra en particular es más sólida que en otros niveles, estando también más familiarizados con el tipo de tareas algebraicas que se les presentan.

En lo relativo a errores algebraicos propiamente dichos, llamamos la atención sobre los errores de procedimiento, que se presentan en niveles tan dispares como Educación Primaria y el nivel universitario. Esto pone de manifiesto la dificultad que suponen para los estudiantes ciertos procedimientos relacionados con el álgebra y que debieran tener una especial atención por parte de los docentes en los procesos de enseñanza-aprendizaje. En Educación Secundaria, donde los estudiantes se encuentran con el simbolismo algebraico por primera vez en el sistema educativo español, los errores asociados al simbolismo algebraico son destacados y están presentes en los dos sentidos de la traducción entre el sistema de representación verbal y el simbolismo algebraico. Esto tiene implicaciones docentes que debieran considerarse para las tareas que se les suelen poner en este nivel educativo y para la resolución de problemas, con la que habitualmente se conecta el álgebra en Educación Secundaria. Difícilmente los estudiantes podrán resolver bien un problema si no son capaces de descifrar el lenguaje que se está utilizando en su enunciado.

El hecho de que estudiantes en niveles educativos de Bachillerato y superiores, incurran en errores observados en investigaciones de Educación Secundaria, también ejemplificados, nos lleva a afirmar que el aprendizaje de las habilidades algebraicas presenta obstáculos no superados presentes en niveles educativos inferiores.

Los estudios desarrollados en el seno de nuestro grupo de investigación “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” arrojan luz sobre errores relacionados con el álgebra en diferentes niveles educativos. Sin embargo, estas investigaciones no se han diseñado con el fin de realizar un estudio comparativo. Por tanto, una línea abierta de trabajo sería diseñar una investigación a gran escala donde se puedan analizar y describir los tipos de errores, cómo evolucionan y compararlos. En esta línea, constatamos que sería importante considerar las entrevistas a los estudiantes como método de recogida de información, ya que permite conocer más a fondo el razonamiento que siguen para llegar a respuestas inadecuadas ante las tareas presentadas. Además del planteamiento de un estudio descriptivo y comparativo en diferentes niveles educativos, asumimos como esencial hacer propuestas didácticas para superar los errores encontrados.

AGRADECIMIENTO

Parte del trabajo presentado se ha desarrollado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-140). México D.F., México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Azcárate, C. y Camacho-Machín, M. (2015). El Pensamiento Matemático como marco de referencia. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M. T. González y M. Moreno (Coords.), *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 17-30). La Laguna, España: Universidad de la Laguna.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, Reino Unido: NFER-Nelson.

Cañadas, M. C., Morales, R. y Bautista, A. (en revisión). *Second graders' functional thinking in a generalization task: responses and interventions*.

Caputo, S. G. y Macías, D. A. (2006). *Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura "Algebra I" al elaborar demostraciones*. En Jornadas de Comunicaciones Científicas y Tecnológicas de la UNNE, Argentina. Recuperado de http://200.45.54.140/unnevieja/Web/cyt/cyt2006/09-Educacion/2006-D-012.pdf

García, J, Segovia, A. y Lupiáñez, J. L. (2014). El uso de las letras como fuente de errores de estudiantes universitarios en la resolución de tareas algebraicas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1545-1566.

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura*. Trabajo Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado de: https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Garcia.pdf

Hidalgo, D. (2018). *Proceso de generalización de estudiantes de 6° de Educación Primaria: respuestas inadecuadas, intervenciones y efectos*. Trabajo Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado de http://digibug.ugr.es/handle/10481/54378

Küchemann, D. (1980). *The understanding of generalised arithmetic (algebra) by secondary school children*. Tesis Doctoral no publicada. Londres, Reino Unido: Universidad de Londres.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 3*(1), 93-166.

Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte [MECD] (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52,* 19349-19420. Madrid, España: MECD.

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(6), 1137-1156.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: una empresa docente.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemática para la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 15-38). Barcelona, España: ICE–Horsori.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA*, *9*(4), 273-293.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, *2*(2), 61-74.

Ruiz-Hidalgo, J. F. y Fernández-Plaza, J. A. (2013). Análisis de tareas de cálculo de límites en un punto en las que intervienen identidades notables. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 127-134). Granada, España: Editorial Comares.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: ICE - Horsori.

Socas, M. M., Camacho, M, Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Madrid, España: Síntesis.