

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PERSPECTIVA ISOMÉTRICA

NANCY ROJAS, OMAR SANTANA, FERNANDA PÉREZ Y SARA PARRA

BOGOTÁ, NOVIEMBRE DE 2021

Presentamos la unidad didáctica Perspectiva isométrica. Esta propuesta fue diseñada por el grupo dos de la octava cohorte de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. La unidad didáctica está diseñada para estudiantes de grado sexto de educación básica, con edades entre los 10 y 14 años. El propósito de esta unidad didáctica es contribuir a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las representaciones bidimensionales de formas tridimensionales y a la superación de dificultades relacionadas con el tema. Nuestra unidad didáctica contribuye a que los estudiantes sean capaces de representar elementos de su entorno y de interpretar las características de las representaciones de sólidos en perspectiva al interactuar con ellos.

Con la unidad didáctica Perspectiva isométrica, pretendemos contribuir a tres estándares básicos de competencias en Matemáticas (MEN, 2006, p. 84) para los grados sexto y séptimo: (a) representar objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas; (b) resolver y formular problemas al usar modelos geométricos; y (c) identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica. Estos estándares corresponden al pensamiento espacial y sistemas geométricos.

Esta unidad didáctica contribuye a dos derechos básicos de aprendizaje con sus respectivas evidencias. Para el derecho básico de aprendizaje Representa y construye formas bidimensionales y tridimensionales con el apoyo en instrumentos de medida apropiados (MEN, 2016, p. 48), las evidencias de aprendizaje son (a) diferencia las propiedades geométricas de las figuras y cuerpos geométricos; (b) identifica los elementos que componen las figuras y cuerpos geométricos; y (c) construye cuerpos geométricos con el apoyo de instrumentos de medida adecuados. Para el derecho básico de aprendizaje Observa objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista, los representa según su ubicación y los reconoce cuando se transforman mediante rotaciones, traslaciones y reflexiones (MEN, 2016, p. 55), las evidencias de aprendizaje son (a) establece relaciones entre la posición y las vistas de un objeto; (b) reconoce e interpreta la representación de un objeto; y (c) representa objetos tridimensionales cuando se transforman.

Diseñamos la unidad didáctica para ser implementada en cualquier institución educativa que cuente con un plan de área, en básica secundaria, acorde con los estándares básicos de competencias en Matemáticas y los derechos básicos de aprendizaje antes mencionados. La institución educativa requiere disponer de recursos audiovisuales para optimizar el uso de las ayudas propuestas para el desarrollo de las tareas de aprendizaje. Si bien diseñamos la unidad didáctica para ser implementada en la modalidad virtual, también funciona en la modalidad presencial. Para ese propósito, elaboramos una secuencia de tareas de aprendizaje y de evaluación que indica el orden en que se deben implementar las actividades de la unidad didáctica.

1. ARTICULACIÓN DE LOS CONTENIDOS

Presentamos la estructura del contenido de la unidad didáctica Perspectiva isométrica, diseñada bajo el modelo de análisis didáctico (Gómez, 2018). Abordamos el contenido en tres aspectos:

(a) la estructura conceptual, (b) los sistemas de representación, y (c) los fenómenos que dan sentido al tema.

1.1. Estructura conceptual

En primer lugar, presentamos la estructura conceptual de la estructura matemática a la que pertenece el tema perspectiva isométrica. En segundo lugar, presentamos la estructura conceptual del tema.

Estructura conceptual de la estructura matemática

Durante la primera mitad del siglo XV, la perspectiva fue considerada como el principal elemento de la pintura del renacimiento italiano. En este tipo de arte, se adoptó la descripción geométrica de la percepción del espacio y de su representación tridimensional sobre una superficie bidimensional, con la que se intentó ilustrar la profundidad.

La geometría descriptiva nos permite usar un conjunto de técnicas para representar sólidos sobre una superficie bidimensional. En la geometría descriptiva, encontramos la geometría proyectiva entendida como la proyección, sobre un plano, de un subconjunto del espacio. Las proyecciones paralelas sustentan el desarrollo de las perspectivas axonométricas. Las perspectivas axonométricas son un sistema de representación gráfico que se caracteriza por usar los tres ejes X, Y y Z.

Las perspectivas axonométricas se dividen en dos tipos: las oblicuas, que son representaciones no perpendiculares de las caras de los sólidos; y las ortogonales, que son representaciones perpendiculares de las caras. A su vez, las perspectivas oblicuas se subdividen en dos clases: la caballera y la militar. Las perspectivas ortogonales se subdividen en tres: trimétrica, dimétrica e isométrica. Esta última categoría es una transformación geométrica caracterizada porque el sólido se representa sobre tres ejes que guardan el mismo ángulo.

Las perspectivas ortogonales emplean lo que se conocen como vistas para realizar la representación bidimensional de un sólido. Las vistas son los planos del sólido. Partimos de la premisa de que, con las tres vistas (frontal, superior y lateral), se deduce un sólido y su configuración geométrica. En la figura 1, presentamos la estructura conceptual de la estructura matemática del tema Perspectiva isométrica.

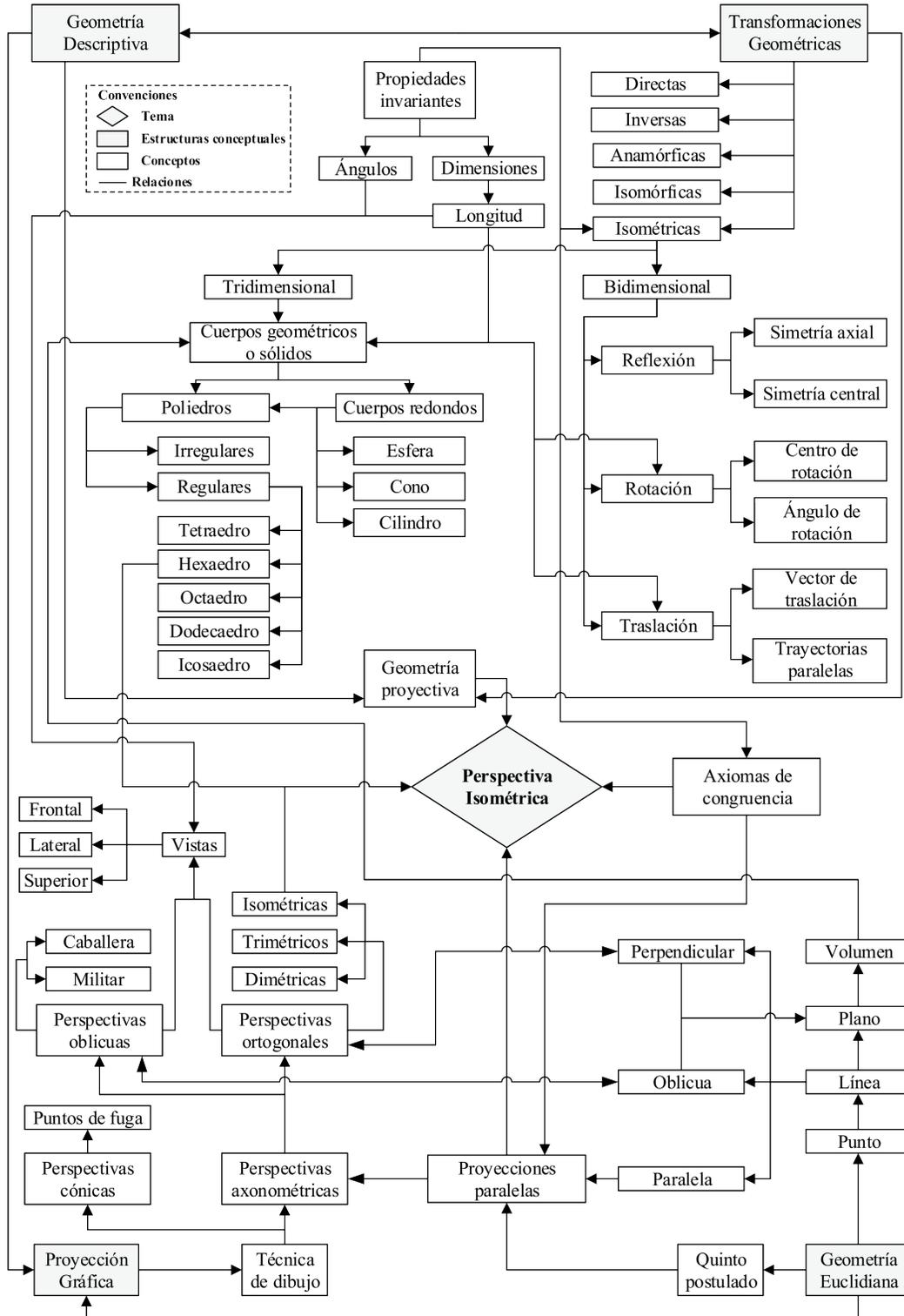


Figura 1. Estructura conceptual de la estructura matemática

Estructura conceptual del tema Perspectiva isométrica

En la figura 2, presentamos la estructura conceptual enfocada en el tema de la unidad didáctica. La perspectiva isométrica facilita la representación bidimensional (en el plano) de objetos tridimensionales. La perspectiva isométrica es una subcategoría conceptual de la perspectiva axonométrica que se caracteriza, en este caso, por tener ángulos de 120° entre ejes.

La Perspectiva isométrica requiere de algunos elementos geométricos para su representación: los puntos, las líneas, los planos, los ángulos y las medidas. Las líneas que se usan para la representación en perspectiva isométrica son las líneas paralelas y las líneas perpendiculares.

Las proyecciones ortogonales permiten extraer las vistas de las caras del sólido. Por normalización, se representan solo tres vistas: la frontal o alzada (que sirve de referencia), la lateral o de perfil y la superior o de planta. Cada vista se obtiene a partir de los elementos geométricos antes mencionados, por medio de procedimientos geométricos que se desarrollan con el uso de instrumentos de dibujo (compás, escuadras, transportador). Llamamos sólido a vistas al procedimiento que realizan los estudiantes al representar las vistas a partir del sólido. De forma inversa, los estudiantes pueden reconstruir el sólido a partir de sus vistas que corresponde al procedimiento vistas a sólido.

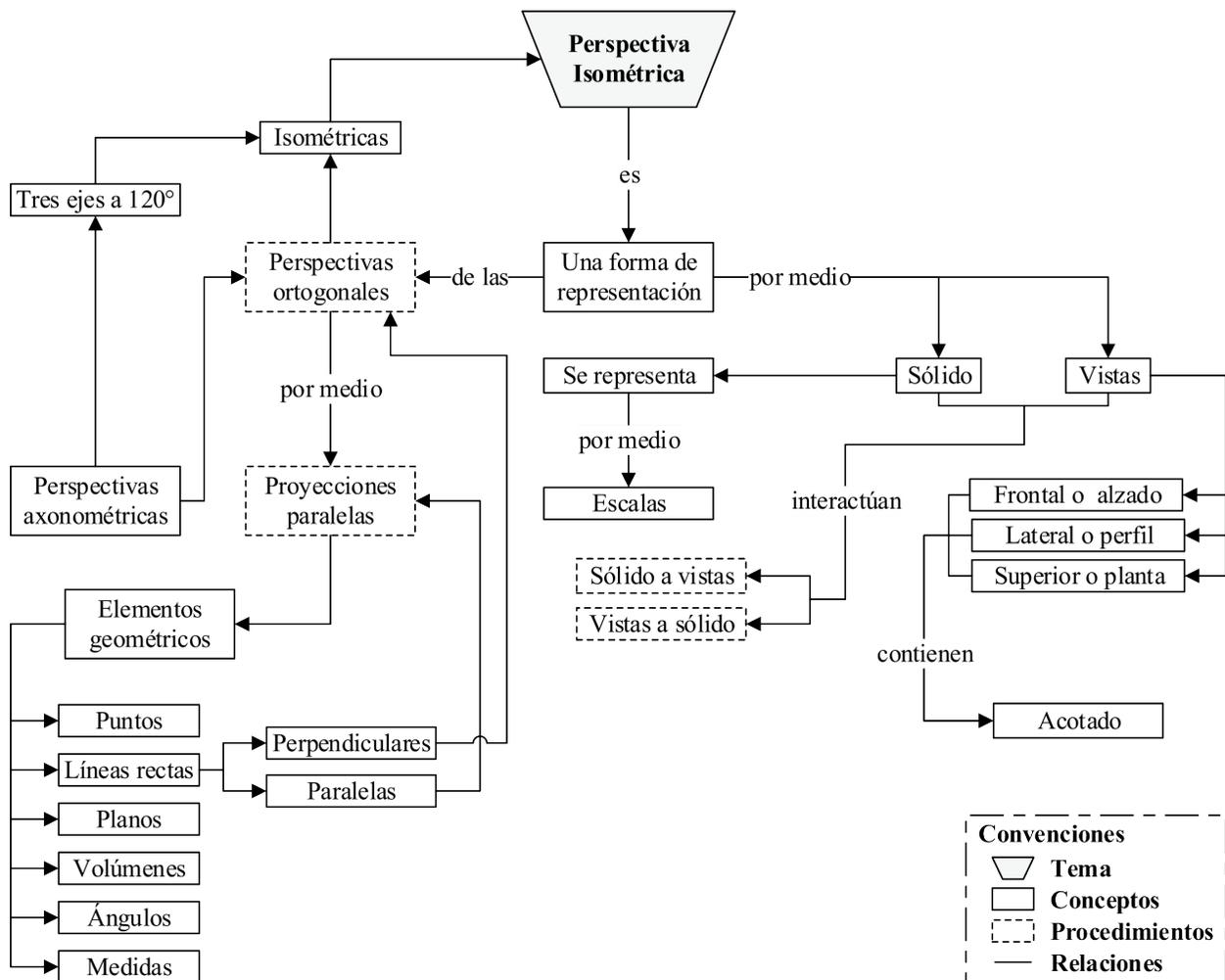


Figura 2. Estructura conceptual del tema perspectiva isométrica

1.2. Sistemas de representación

Un sistema de representación se caracteriza por tener un conjunto de signos que se ciñen a unas reglas. En este sentido, consideramos los siguientes sistemas de representación que caracterizan nuestra unidad didáctica: gráfico, geométrico, verbal, simbólico y ejecutable. A continuación, describimos estos sistemas de representación para nuestro tema.

Sistema de representación gráfico

Las proyecciones axonométricas son un tipo de representación plana de objetos tridimensionales en tres ejes ortogonales, como se observa en la figura 3. Axonométrico significa “medida sobre los ejes”. Las proyecciones axonométricas se fundamentan desde las proyecciones paralelas, pues, a partir de una magnitud proyectada sobre un eje, podemos saber la magnitud original (verdadera magnitud).

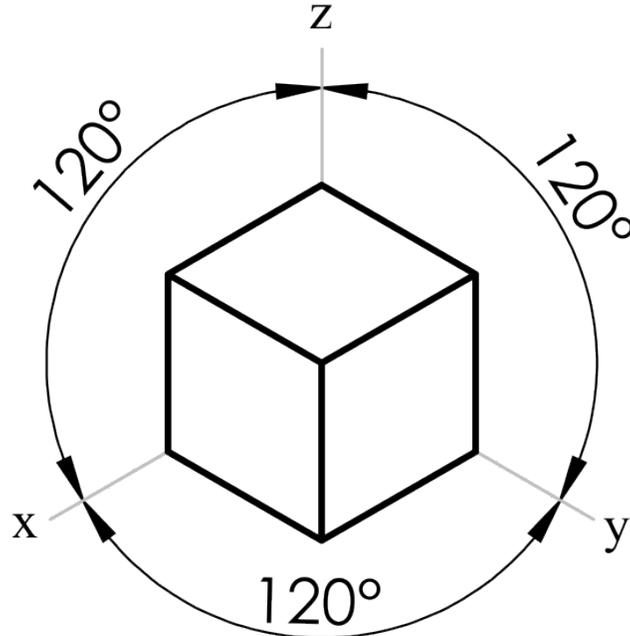


Figura 3. Perspectiva isométrica

El sistema ortogonal isométrico se caracteriza porque la medida de los ángulos formados entre el plano de proyección y los tres ejes es de 120° , como se observa en la figura 3.

Sistema de representación geométrico

El sistema diédrico, denominado también de doble proyección o sistema de Monge, utiliza la proyección ortogonal sobre dos planos de proyección perpendiculares entre sí: un plano horizontal (PH) y un plano vertical (PV). Posteriormente, se introduce un tercer plano de proyección, perpendicular a los dos anteriores, denominado plano de perfil (PP). Los tres planos de proyección generan las vistas frontal, superior y lateral. Estas tres vistas se organizan en forma de L y se relacionan entre sí con líneas punteadas, para indicar que mantienen la misma proporción (ver figura 4). La vista frontal determina la posición y proporción de las otras dos vistas, dado que esta se muestra en verdadera magnitud. De igual manera, el sistema diédrico permite construir el sólido a partir de las vistas.

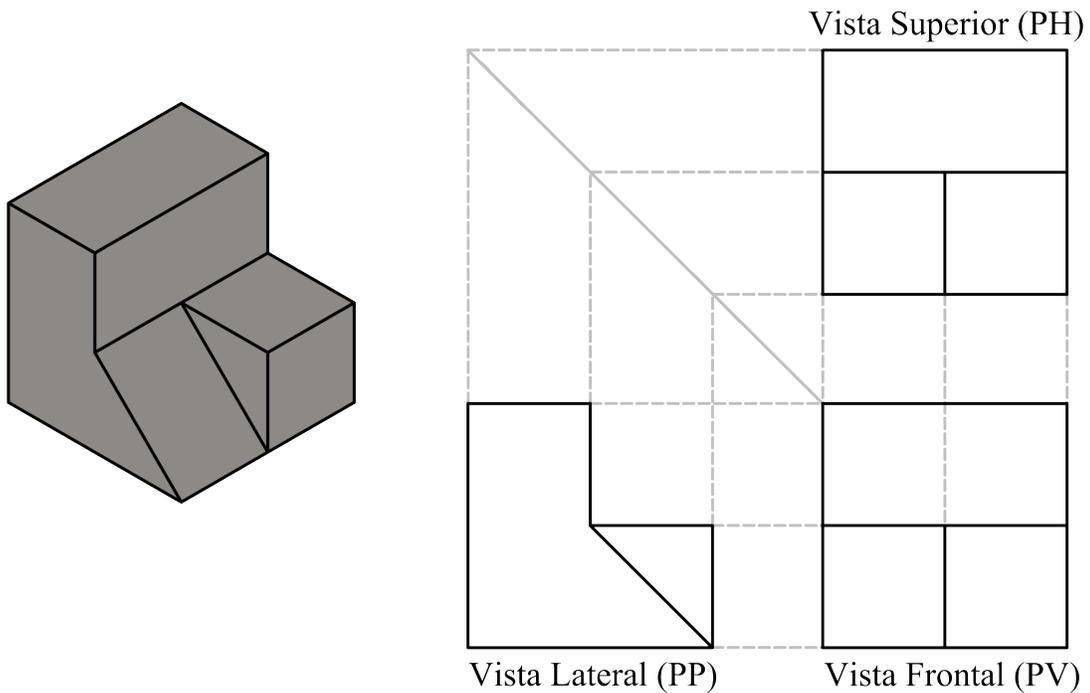


Figura 4. Sistema diédrico

Sistema de representación verbal

En el caso de la perspectiva isométrica, el término vista tiene otro significado lingüístico que cobra relevancia y carácter técnico. La vista indica la cara del sólido que observa un sujeto. En ese sentido, el término vista frontal, lateral o superior adquiere un signo propio que permite inferir y relacionar una representación gráfica con un objeto tridimensional y viceversa (ver figura 4).

Sistema de representación simbólico

En el sistema de representación simbólico, identificamos el sistema de acotación. En el sistema axonométrico, se emplea el sistema métrico decimal para representar sólidos y mantener la congruencia. Las unidades patrón para las medidas se establecen por normalización para señalar las dimensiones del sólido. La cota está representada por líneas auxiliares, líneas con flechas y una cifra, como se ejemplifica en la figura 5.

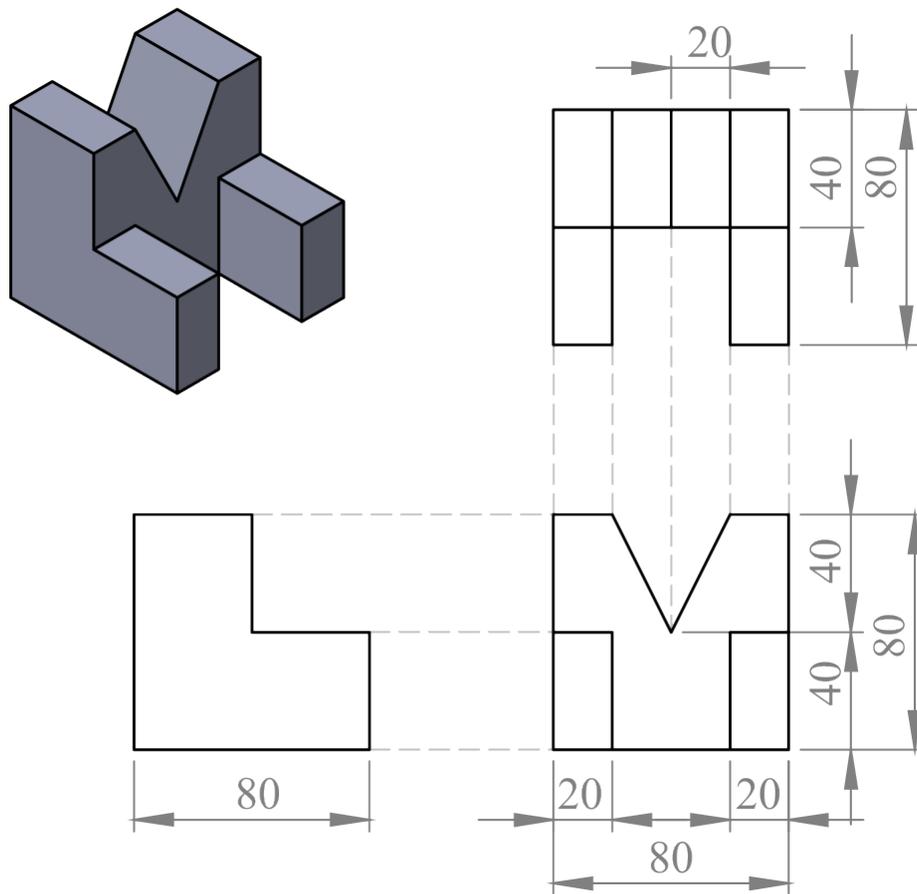


Figura 5. Sistema de acotación

Sistema de representación ejecutable

El conjunto de sistemas ejecutables usados para representar e interactuar con las perspectivas isométricas se llama sistema CAD por sus iniciales en inglés —Computer Aided Design— que, en español, se traduce a Diseño Asistido por Computador. Los sistemas CAD integran software que permite representar bidimensionalmente sólidos.

Los sistemas CAD utilizan el sistema axonométrico como parte fundamental de su estructura. A partir del sistema axonométrico, se construyen los sólidos desde el sistema diédrico. Una característica propia de estos sistemas es que permiten interactuar con el sólido. Por ejemplo, en SolidWorks, se puede rotar el sólido, resaltar sus caras con colores, identificar los planos diédricos y ver el proceso inverso de construcción o despiece (ver figura 6).

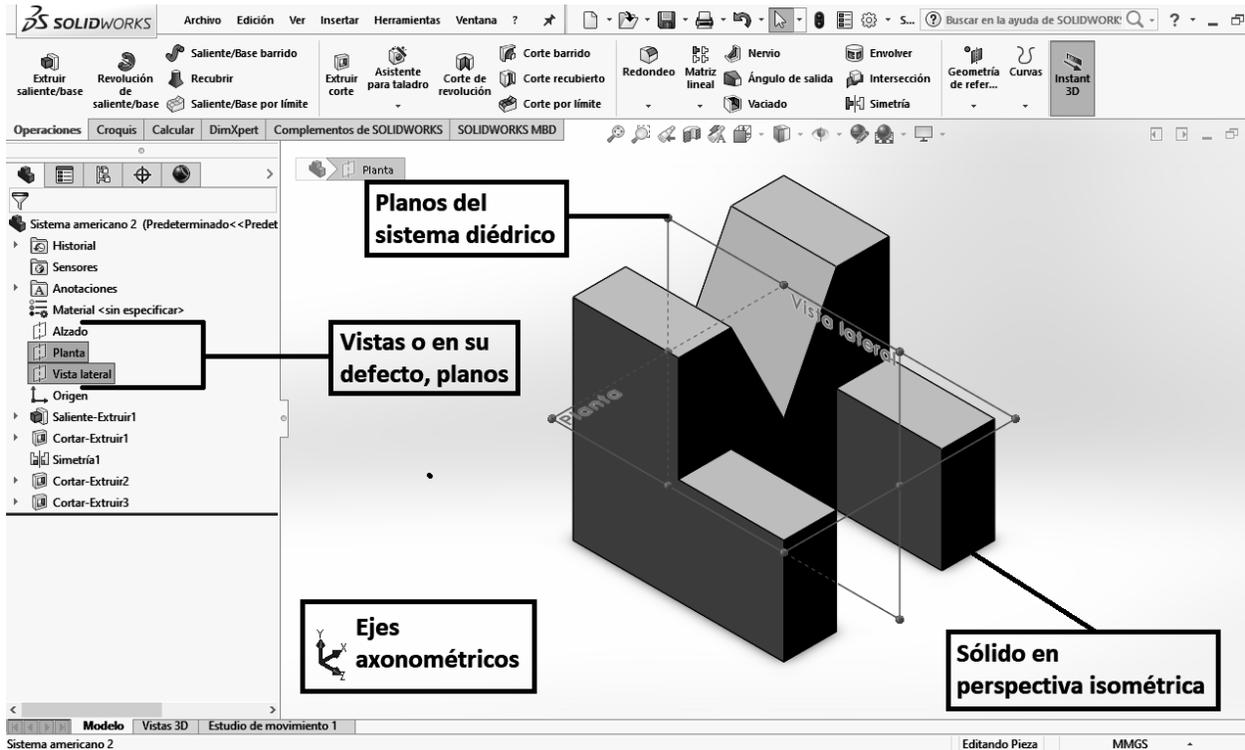


Figura 6. Representación de un sólido en SolidWorks

1.3. Fenomenología

Identificamos los fenómenos que le dan sentido al tema Perspectiva isométrica y desglosamos la estructura conceptual del tema en dos subestructuras: sólido a vistas y vistas a sólido. Luego, organizamos esos fenómenos en grupos, de acuerdo con dos contextos: respecto al diseñador y respecto al usuario. Relacionamos los grupos de fenómenos con cada subestructura y, finalmente, identificamos los contextos en los que los fenómenos asociados al tema tienen sentido. Esos contextos corresponden a los del marco conceptual de PISA 2012 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013)

Sólido a vistas

El sólido se construye a partir del sistema axonométrico. Del sólido, extraemos las vistas para expresar su correlación geométrica y su verdadera magnitud. En la subestructura sólido a vistas, relacionamos el siguiente grupo de fenómenos: diseño de piezas industriales, diseño de construcciones civiles, diseño publicitario, diseño de ambientes virtuales y creación artística. Este grupo de fenómenos se ubica en el contexto del diseñador. El diseñador, a partir del problema y sus ideas de solución, modela y representa las soluciones artefactuales. El diseñador presenta el sólido isométrico junto con algunas o todas sus vistas, como se observa en la figura 7.

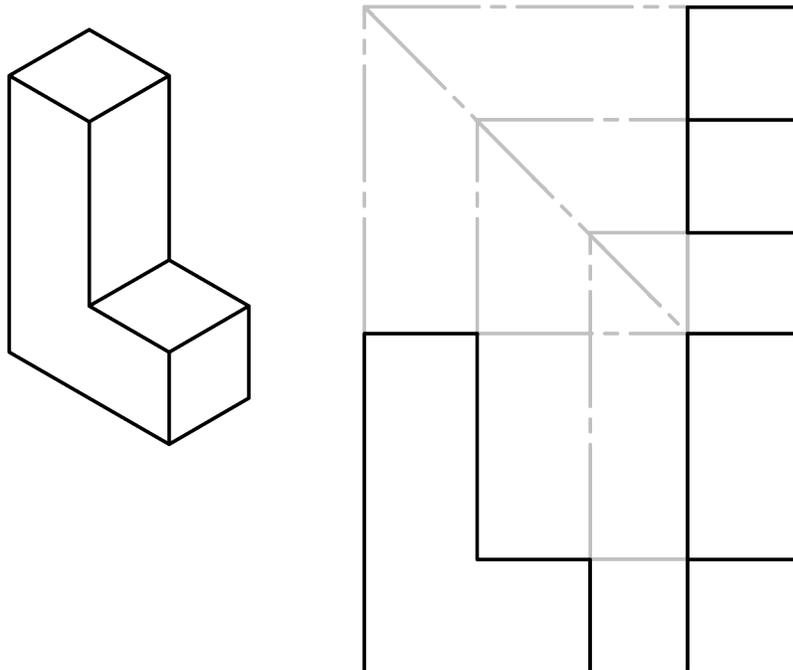


Figura 7. Pieza de cubo soma

A continuación, relacionamos los grupos de fenómenos con los contextos PISA.

- ◆ En el contexto científico: diseño de piezas industriales y diseño de construcciones civiles.
- ◆ En el contexto social: diseño publicitario y diseño de ambientes virtuales.
- ◆ En el contexto profesional: creación artística.

Vistas a sólido

Las vistas se representan en el sistema diédrico. A partir de las vistas, construimos el sólido isométrico, relacionado con la configuración geométrica y las dimensiones establecidas en la representación diédrica, a partir de sus vistas. En la subestructura vistas a sólido, relacionamos el siguiente grupo de fenómenos: interpretación geométrica, bricolaje, fabricación de piezas industriales, construcción de obras civiles, interacción con ambientes virtuales y lectura de planos informativos. Este grupo de fenómenos se ubica en el contexto del usuario. Hay dos tipos de usuarios: (a) los usuarios de orden productivo, quienes fabrican artefactos, sistemas o procesos representados en el sistema diédrico (vistas); y (b) los usuarios de orden consumista, quienes construyen la perspectiva del sólido isométrico a partir del sistema de representación diédrico (ver figura 8). Los dos usuarios develan e interpretan las vistas del isométrico, para transformar o disponer del artefacto.

Ensamble CÓMODA

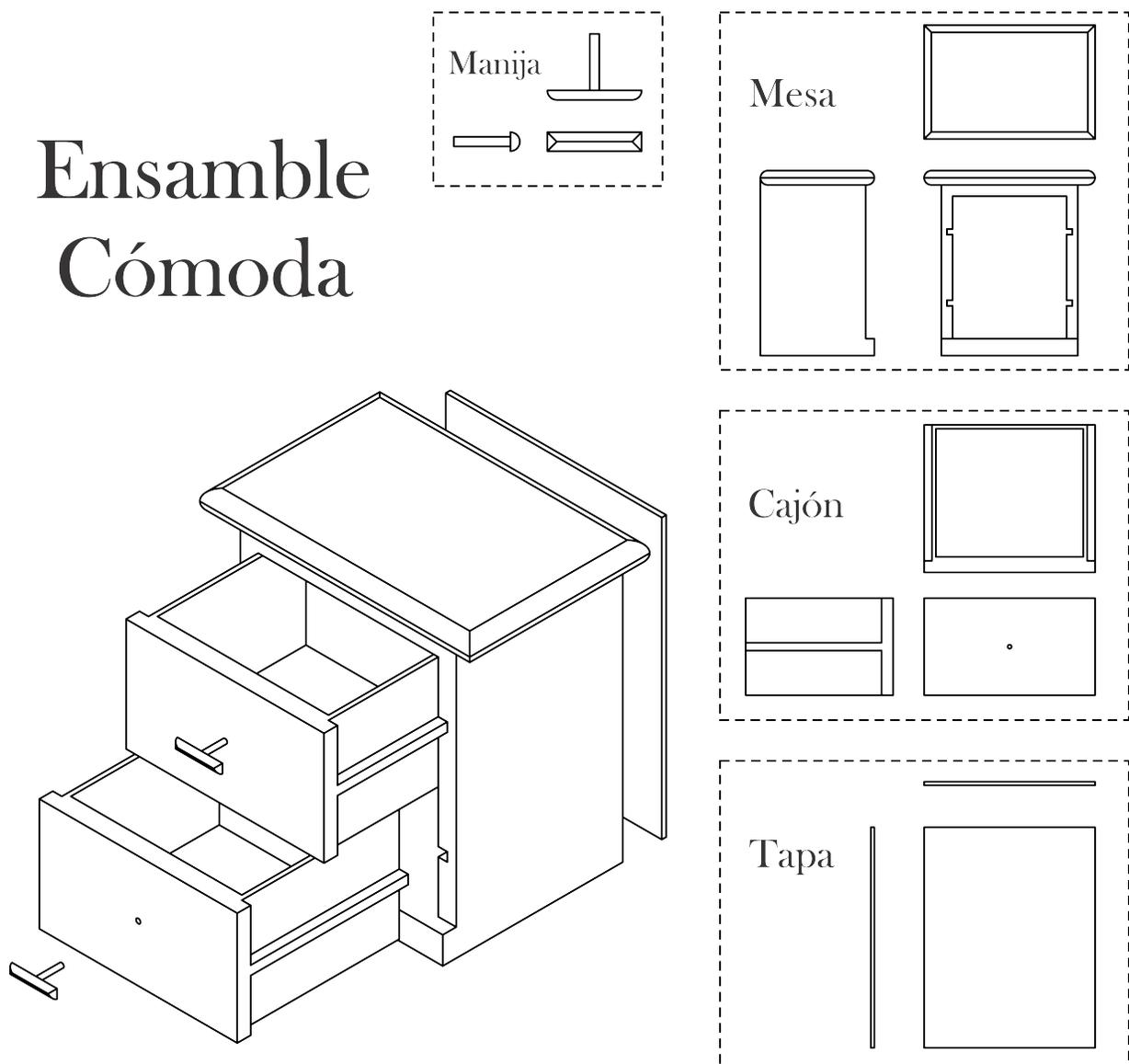


Figura 8. Representación isométrica de ensamble de una cómoda

A continuación, relacionamos los grupos de fenómenos con los contextos PISA.

- ◆ En el contexto personal: interpretación geométrica y bricolaje.
- ◆ En el contexto profesional: fabricación de piezas industriales y construcción de obras civiles.
- ◆ En el contexto social: interacción con ambientes virtuales y lectura de planos informativos.

En el esquema de la figura 9, relacionamos las subestructuras del tema perspectiva isométrica, los contextos fenomenológicos y los contextos PISA en los que enmarcamos esos fenómenos.

Subestructura	Contexto PISA 2012				Fenómeno	
	Personal	Profesional	Social	Científico		
Sólido a Vistas	Contexto fenomenológico	Diseñador			←	Diseño de piezas industriales
					←	Diseño de construcciones civiles
					←	Diseño publicitario
					←	Diseño de ambientes virtuales
Vistas a Sólido	Contexto fenomenológico	Usuario		←		Creación artística
			←			Interpretación geométrica
			←			Bricolaje
				←		Fabricación de piezas industriales
				←		Construcción de obras civiles
					←	Interacción con ambientes virtuales
		←	Lectura de planos informativos			

Figura 9. Tabla de fenomenología de perspectiva isométrica

2. ASPECTOS COGNITIVOS

Describimos los aspectos cognitivos de la unidad didáctica en el siguiente orden: (a) expectativas de tipo cognitivo; (b) expectativas de tipo afectivo; (c) limitaciones de aprendizaje; (d) criterios de logro; y (e) grafos de criterios de logro.

2.1. Expectativas de tipo cognitivo

Con el propósito general de que los estudiantes desarrollen su competencia matemática, planteamos expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo en dos niveles. El nivel superior corresponde a las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos planteados por el marco conceptual de PISA 2012. Las expectativas de nivel medio se relacionan con los objetivos de aprendizaje.

Con el desarrollo de la unidad didáctica, pretendemos contribuir a seis capacidades matemáticas fundamentales: (a) comunicación, cuando los estudiantes interpretan fenómenos de su entorno y sustentan sus transformaciones en relación con su disposición y uso; (b) representación, cuando los estudiantes emplean principios geométricos para representar objetos

en los sistemas de representación gráfico y geométrico; (c) razonamiento y argumentación, cuando los estudiantes relacionan las construcciones gráfica y geométrica para justificar su congruencia; (d) utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico, cuando los estudiantes emplean el lenguaje y las reglas que normalizan los sistemas de representación y, a partir de los conocimientos técnicos y formales, realizan interpretaciones de los sólidos; (e) diseño de estrategias para resolver problemas, cuando los estudiantes, al abordar una situación problema, diseñan una estrategia para construir o interpretar la representación de un sólido; y (f) utilización de herramientas matemáticas, cuando los estudiantes durante la construcción o verificación de las representaciones gráfica y geométrica utilizan instrumentos de dibujo. Con esta unidad didáctica, contribuimos a los procesos matemáticos de formular, emplear e interpretar y evaluar.

Establecimos dos objetivos de aprendizaje para esta unidad didáctica.

1. Construir y argumentar las representaciones gráfica y geométrica de un sólido en perspectiva isométrica.
2. Interpretar la representación de un sólido en perspectiva isométrica en diferentes contextos.

Con el primer objetivo, esperamos que los estudiantes construyan representaciones isométricas de objetos en los sistemas de representación gráfico y geométrico. Con el segundo objetivo, esperamos que los estudiantes interpreten las representaciones gráfica y geométrica en situaciones de su entorno. Con el logro estos objetivos, pretendemos contribuir en mayor medida a las capacidades matemáticas fundamentales de utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico, de representación y de utilización de herramientas matemáticas.

2.2. Expectativas de tipo afectivo

Las expectativas de tipo afectivo establecen de qué manera la unidad didáctica contribuye a los aspectos relacionados con la motivación y las emociones. Proponemos tres expectativas de tipo afectivo para la unidad didáctica que se enfocan en la confianza, la motivación y la importancia de las habilidades geométricas. La unidad didáctica fomenta en los estudiantes seguridad al argumentar los resultados de sus construcciones geométricas, y contribuye a la adquisición de habilidades para socializar y argumentar procedimientos al describirlos paso a paso. Por consiguiente, la unidad didáctica promueve que los estudiantes valoren sus habilidades geométricas para representar sólidos en perspectiva y que argumenten geoméricamente situaciones de su entorno. A continuación, presentamos las tres expectativas afectivas.

1. EA1: Adquirir el hábito por el razonamiento geométrico de elementos de su entorno a partir de la perspectiva isométrica.
2. EA2: Valorar positivamente la adquisición de habilidades para la representación de sólidos en perspectiva isométrica a partir de distintos fenómenos.
3. EA3: Adquirir seguridad para argumentar los resultados de las representaciones de su entorno por medio de la perspectiva isométrica.

2.3. Limitaciones del aprendizaje

Las limitaciones del aprendizaje son los errores en que pueden incurrir los estudiantes al desarrollar una tarea y que se asocian a una dificultad. Entendemos la dificultad como una situación que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje y el error como una manifestación observable de una dificultad (González y Gómez, 2018).

Para establecer las limitaciones de aprendizaje, tomamos como referencia la tesis doctoral sobre la enseñanza de la visualización espacial de Gonzato (2013) y algunos documentos sobre dibujo técnico y comunicación gráfica que fundamentan y exponen la construcción de perspectivas (Giesecke, 2006; Estrada, 2012). Además, tuvimos en cuenta nuestra experiencia en la construcción de representaciones isométricas de sólidos. De esta manera, establecimos para la unidad didáctica 6 dificultades y 92 errores asociados. En la tabla 1, presentamos las dificultades y algunos ejemplos de los errores asociados a ellas. Por ejemplo, en la dificultad relacionada con el predominio de la estructura de representación bidimensional en el sistema axonométrico, los estudiantes incurren en el error de trazar los ejes X, Y, Z con ángulos diferentes a 120° al iniciar la construcción en el sistema de representación gráfico. Los errores se encuentran codificados según el orden en que los establecimos. Presentamos el listado completo de dificultades y errores relacionados con el tema de la unidad didáctica en el anexo 01¹.

Tabla 1

Listado de dificultades y errores para el tema Perspectiva isométrica

E	Descripción
D1. Dificultad para relacionar los sistemas de representación	
57	Resalta segmentos de la construcción que no corresponden a la composición del sólido
47	Termina la representación gráfica de la cara lateral sin hacer la verificación con el sólido
55	Termina la representación geométrica de la vista superior sin hacer la verificación con el sólido
D2. Predominio de la estructura de representación bidimensional en el sistema axonométrico	
4	Traza los ejes X, Y, Z con ángulos diferentes a 120°
5	Traza los ejes Y y Z con ángulo de 90°
6	Traza los ejes X y Y con un ángulo de 90°
D3. Visualiza la información de un sólido de manera parcial	
8	Señala la vista lateral como la vista frontal del sólido
33	Marca vértices que no corresponden a la cara frontal del sólido
94	Reconoce las aristas de la cara frontal del sólido, pero las relaciona con los lados de la vista que no corresponde en el sistema diédrico

¹ Los anexos se pueden descargar en este enlace: <http://funes.uniandes.edu.co/23704>

Tabla 1

Listado de dificultades y errores para el tema Perspectiva isométrica

E	Descripción
	D4. Predomino en el trazo de rectas paralelas y rectas perpendiculares en un contexto bidimensional
12	Traza de manera equivocada las rectas paralelas de la cara frontal del sólido al utilizar la regla y el compás
18	Traza de manera equivocada las rectas paralelas de la cara frontal del sólido al utilizar las escuadras
74	Traza de manera equivocada las rectas paralelas de los lados de la vista superior al utilizar las escuadras
	D5. Interpreta, de manera parcial, las reglas que determinan la construcción de los sistemas de representación de la perspectiva isométrica
21	Modifica la medida de los segmentos de las aristas de la cara frontal del sólido
82	Ubica el centro del transportador distante del vértice seleccionado
91	Cambia la posición de la escuadra de 30° en el proceso de manipulación de las escuadras
	D6. Relaciona de manera imprecisa la orientación y ubicación de los objetos en el espacio
75	Resalta segmentos de la construcción que no corresponden a la composición de las vistas del sólido
80	Las rectas de construcción proyectadas no están superpuestas a las aristas diagonales del sólido
104	Proyecta los polígonos de la cara superior de manera incompleta, por lo que genera una imagen equivocada de la vista superior del sólido en el sistema diédrico

Nota. E: error, D: dificultad.

2.4. Criterios de logro

Consideramos las estrategias que pueden implementar los estudiantes para solucionar las tareas de aprendizaje propuestas para la unidad didáctica. Cada estrategia consiste en una serie de procedimientos para solucionar la tarea. Llamamos criterio de logro a cada uno de los procedimientos que componen esta estrategia.

En la tabla 2, presentamos algunos criterios de logro para el primer objetivo de aprendizaje. Los criterios de logro se refieren al proceso de construcción de un sólido en perspectiva isométrica mediante el uso de las escuadras. Cada criterio de logro corresponde a una fase de construcción que podría emplear el estudiante para completar la representación. El último criterio de logro permite al estudiante dar cuenta, de manera descriptiva, de los procedimientos que empleó para consolidar su construcción. Los criterios de logro se encuentran codificados. El

primer número corresponde al objetivo al que contribuyen y el segundo al orden de las fases de la solución de la tarea. Por ejemplo, para el primer objetivo, están los criterios de logro 1.8 Construyo la cara frontal del sólido mediante el uso de escuadras y 1.10 Construyo la cara superior del sólido mediante el uso de escuadras. Para el segundo objetivo, están los criterios de logro 2.4 Verifico si el sólido está en perspectiva isométrica mediante el uso del transportador y 2.5 Verifico si el sólido está en perspectiva isométrica mediante el uso de las escuadras. En el anexo 02, presentamos el listado completo de los criterios de logro propuestos para los dos objetivos de la unidad didáctica.

Tabla 2

Descripción de algunos criterios de logro del primer objetivo

CdL	Descripción
CdL1.1	Reconozco situaciones que requieren construir sólidos en perspectiva isométrica
CdL1.2	Uso los ejes X, Y, Z para construir el sólido
CdL1.8	Construyo la cara frontal del sólido mediante el uso de escuadras
CdL1.9	Construyo la cara lateral del sólido mediante el uso de escuadras
CdL1.10	Construyo la cara superior del sólido mediante el uso de escuadras
CdL1.11	Verifico la construcción del sólido mediante las escuadras
CdL1.20	Argumento los resultados en términos del contexto de la tarea

Nota: CdL: criterio de logro

2.5. Grafos de criterios de logro

Organizamos los criterios de logro en un diagrama secuencial al que denominamos grafo de criterios de logro. El grafo de criterios de logro reúne las estrategias que podrían implementar los estudiantes para resolver una tarea.

En la figura 10, presentamos el grafo de criterios de logro para el primer objetivo. Los estudiantes inician por reconocer que la tarea se resuelve mediante conceptos y procedimientos propios de la perspectiva isométrica (criterio de logro 1.1). Los estudiantes pueden optar por el sistema de representación gráfico (criterio de logro 1.2), o por el sistema de representación geométrico (criterio de logro 1.3). En el primer caso, al usar el sistema de representación gráfico, los estudiantes pueden optar por realizar la construcción del sólido cara por cara mediante el uso de regla y compás (criterios de logro 1.4, 1.5, 1.6 y 1.7) o mediante el uso de las escuadras (criterios de logro 1.8, 1.9, 1.10 y 1.11). En el segundo caso, al usar el sistema de representación geométrico, los estudiantes pueden optar por realizar la construcción de las vistas del sólido mediante el uso de regla y compás (criterios de logro 1.12, 1.13, 1.14 y 1.15) o mediante el uso de las escuadras (criterios de logro 1.16, 1.17, 1.18 y 1.19). Finalmente, los estudiantes argumentarán los resultados en términos de la descripción del paso a paso de los procedimientos que emplearon para la construcción (criterio de logro 1.20). Presentamos el grafo de criterios de logro con los errores asociados en los que pueden incurrir los estudiantes en el anexo 03.

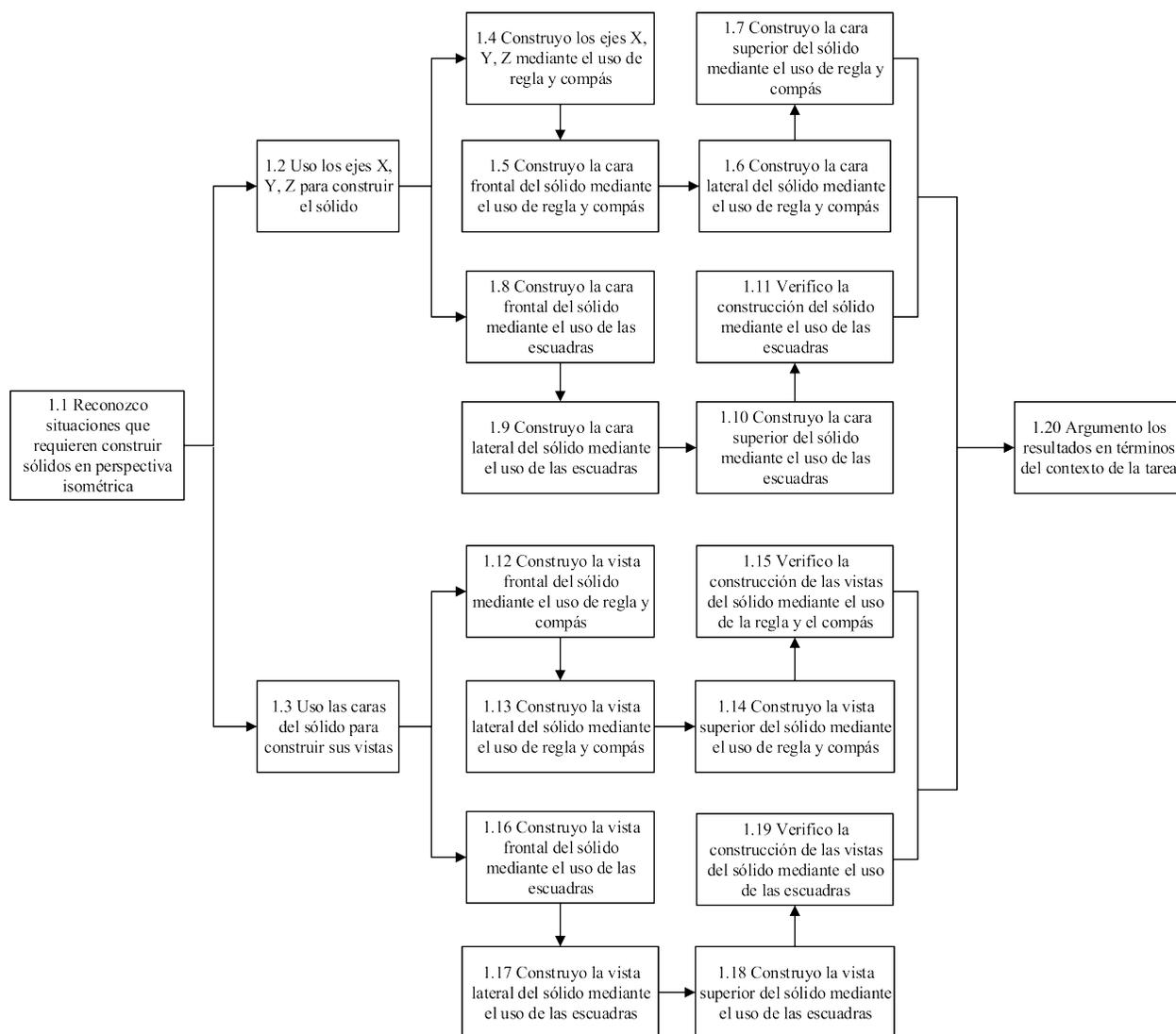


Figura 10. Grafo de criterios de logro del primer objetivo

En la figura 11, presentamos el grafo de criterios de logro para el segundo objetivo. Los estudiantes inician por reconocer la información de la tarea para relacionarla con los conceptos y procedimientos propios de la perspectiva isométrica (criterio de logro 2.1). Los estudiantes pueden identificar que los sólidos están propuestos en el sistema de representación gráfico (criterio de logro 2.2), o en el sistema de representación geométrico (criterio de logro 2.3). En el primer caso, al identificar el sistema de representación gráfico, los estudiantes pueden optar por verificar que el sólido está en perspectiva isométrica mediante el uso del transportador (criterios de logro 2.4) o mediante el uso de las escuadras (criterio de logro 2.5). En el segundo caso, al identificar el sistema de representación geométrico, los estudiantes pueden optar por verificar que la representación de las vistas corresponde a un sólido de dos maneras: mediante la comparación de las medidas de las aristas (criterio de logro 2.6), o mediante la comparación de

los polígonos que conforman el sólido (criterio de logro 2.7). Finalmente, los estudiantes interpretan los resultados en términos de la descripción del paso a paso de los procedimientos que emplearon para identificar las características de los sólidos en perspectiva isométrica (criterio de logro 2.8). En el anexo 03, presentamos el grafo de criterios de logro con los errores asociados en los que pueden incurrir los estudiantes.

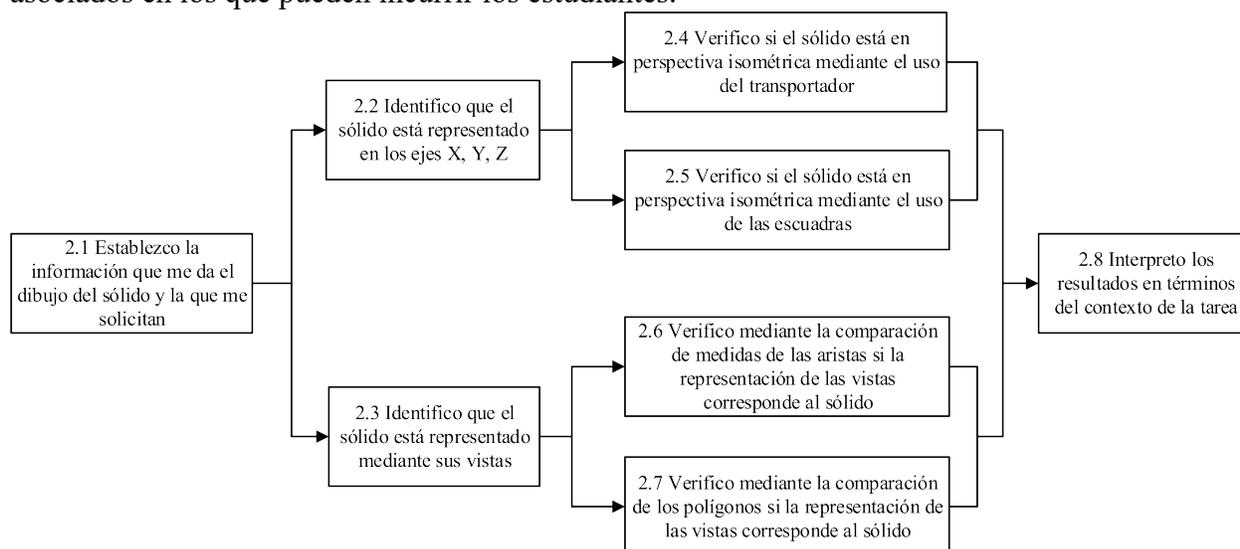


Figura 11. Grafo de los criterios de logro del segundo objetivo

3. ESQUEMA GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Presentamos el esquema general de la unidad didáctica Perspectiva isométrica, prevista para ocho sesiones. En la tabla 3, relacionamos cada sesión con las actividades planteadas y proponemos los tiempos estimados para realizarlas.

En la primera sesión, el profesor implementa la tarea diagnóstica para verificar los conocimientos previos de los estudiantes. En la segunda sesión, el profesor realiza la retroalimentación de la tarea diagnóstica, resuelve dudas y refuerza los conocimientos previos. En la tercera sesión, el profesor presenta el tema perspectiva isométrica y los objetivos de aprendizaje. En la tercera y cuarta sesión, el profesor implementa las tareas del primer objetivo de aprendizaje. En la quinta y sexta sesión, el profesor implementa las tareas del segundo objetivo de aprendizaje. De la cuarta a la sexta sesión, el profesor retroalimenta la tarea implementada en la sesión anterior. En la séptima sesión, los estudiantes desarrollan un examen final a partir de lo aprendido en las tareas de aprendizaje. En la octava sesión, el profesor presenta los resultados obtenidos en el examen y realiza la retroalimentación. Finalmente, el profesor realiza el cierre de la unidad didáctica con un formulario en línea que diligencian los estudiantes para conocer su percepción sobre la implementación.

Tabla 3

Esquema general de la unidad didáctica Perspectiva isométrica

Sesión	Actividad	Descripción	Tiempo
1	Tarea diagnóstica	Presentación de la tarea	110 minutos
		Desarrollo de la tarea	
2	Retroalimentación de la tarea diagnóstica	Solución a dudas	110 minutos
		Refuerzo de conocimientos previos	
3	Presentación del tema y los objetivos de aprendizaje	Socialización de los objetivos	20 minutos
	Tarea 1.1 La silla	Presentación de la tarea 1.1 Desarrollo de la tarea 1.1	90 minutos
4	Retroalimentación de la tarea 1.1	Aclaración de dudas de la tarea 1.1 Establecemos acuerdos sobre las cuestiones relevantes que aborda la tarea 1.1	30 minutos
	Tarea 1.2 El dron	Presentación de la tarea 1.2 Desarrollo de la tarea 1.2	80 minutos
5	Retroalimentación de la tarea 1.2	Aclaración de dudas de la tarea 1.2 Establecemos acuerdos sobre las cuestiones relevantes que aborda la tarea 1.2	30 minutos
	Tarea 2.1 Fichas del cubo soma	Presentación de la tarea 2.1 Desarrollo de la tarea 2.1	80 minutos
6	Retroalimentación de la tarea 2.1	Aclaración de dudas de la tarea 2.1 Establecemos acuerdos sobre las cuestiones relevantes que aborda la tarea 2.1	30 minutos
	Tarea 2.2 Rompecabezas	Presentación de la tarea 2.2 Desarrollo de la tarea 2.2	60 minutos
	Retroalimentación de la tarea 2.2	Aclaración de dudas de la tarea 2.2 Establecemos acuerdos sobre las cuestiones relevantes que aborda la tarea 2.2	20 minutos

Tabla 3

Esquema general de la unidad didáctica Perspectiva isométrica

Sesión	Actividad	Descripción	Tiempo
7	Realización del examen	Presentación de la tarea de evaluación	110 minutos
		Desarrollo de la tarea de evaluación	
8	Cierre del tema	Presentación de los resultados obtenidos en el examen y cierre del tema	55 minutos
		Diligenciamiento del formato en línea (https://forms.office.com/r/0NfMiWiuzt)	

4. TAREA DIAGNÓSTICA

La tarea diagnóstica tiene como función averiguar si los estudiantes manifiestan tener los conocimientos previos necesarios para comenzar la unidad didáctica (Romero y Gómez, 2018, p. 286). Elaboramos un listado de 16 capacidades correspondientes a conocimientos previos para el tema Perspectiva isométrica. Presentamos ese listado de conocimientos previos en el anexo 04.

4.1. Descripción de la tarea diagnóstica

La tarea diagnóstica de nuestra unidad didáctica consta de dos partes. Para la primera parte, proponemos la imagen de una alcoba como contexto. Para la segunda parte, presentamos la imagen de un robot.

Con la primera parte de la tarea, buscamos verificar si los estudiantes (a) diferencian las dimensiones largo, ancho y alto en sólidos de su entorno; (b) reconocen la magnitud de longitud y realizan conversiones entre unidades de medida de longitud; (c) identifican las características de rectas paralelas y de rectas perpendiculares; (d) reconocen los elementos de un sólido (caras, aristas, vértices); (e) ubican objetos arriba, abajo, a la derecha y a la izquierda del plano, respecto a un punto; e (f) identifican los ejes en el plano cartesiano.

Con la segunda parte de la tarea, buscamos validar si los estudiantes (a) usan los instrumentos de dibujo como regla, compás, escuadras y transportador; (b) reconocen los elementos geométricos punto, recta, segmento, plano y espacio; (c) identifican y trazan figuras que corresponden a polígonos regulares e irregulares; (d) clasifican y trazan ángulos de diferentes medidas; y (e) trazan rectas paralelas y perpendiculares mediante el uso de instrumentos de dibujo.

A continuación, presentamos la formulación de la tarea.

Parte I. La alcoba

Observa la imagen de la alcoba que se muestra en la figura. Luego, responde las preguntas.



Figura. La alcoba

1. En la figura, resalta y nombra las dimensiones de la alcoba con tres colores diferentes.
2. Si el piso está cubierto por baldosas cuadradas de 30 cm. de lado, ¿cuáles son las dimensiones del piso de esta alcoba?
 - a. 24cm x 30cm
 - b. 3m x 2,4m
 - c. 30m x 240m
 - d. 400cm x 240cm
3. De los siguientes enunciados, ¿cuál describe la estructura de la alcoba?

Tiene todas sus caras congruentes y paralelas. Por lo tanto, es un cubo.

Tiene dos caras circulares paralelas y una superficie lateral curva. Por lo tanto, es un cilindro.

Tiene dos caras triangulares congruentes y paralelas y tres caras laterales. Por lo tanto, es un prisma triangular.

Tiene tres pares de caras congruentes y paralelas. Por lo tanto, es un prisma rectangular.
4. ¿En cuántos planos está construida la figura de la alcoba? Descríbelos.
5. En la tabla, marca la ubicación de cada objeto con respecto a la posición de la niña.

Tabla
Ubicación de los objetos

Objeto	Ubicación con respecto a la niña				
	En Frente	Atrás	Derecha	Izquierda	Debajo
Almohadas					
Ventana					
Florero					
Reloj					
Libros					
Cama					
Mesa de noche					
Matera					

6. ¿Identificas algún plano cartesiano en la alcoba? Explica tu respuesta.

Parte II El robot

Replica en una hoja blanca el dibujo del robot que se muestra en la figura. Utiliza los instrumentos de dibujo que consideres pertinentes para realizar la construcción.

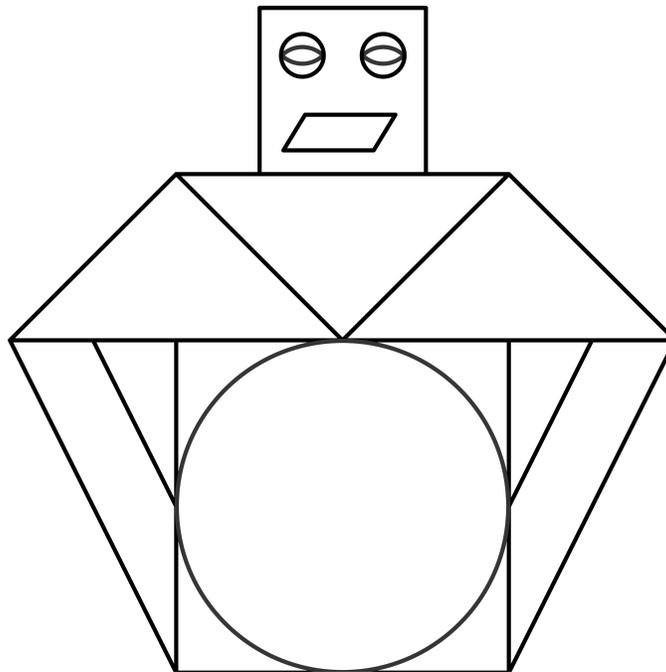


Figura. El robot

1. Describe el paso a paso que seguiste para la construcción de la cabeza y los brazos del robot. Indica los procedimientos e instrumentos que usaste.

2. ¿Cuáles elementos geométricos reconoces en el dibujo del robot? Puedes marcar más de una opción.

Punto

Recta

Plano

Segmento

Rayo

Ángulos

Diagonal

Semirrecta

3. Resalta de color verde algunos vértices en el dibujo del robot.

4. Resalta de color naranja algunos segmentos en el dibujo del robot.

5. Clasifica los polígonos que identificaste en el dibujo según sean regulares o irregulares. Justifica tu respuesta.

6. Mide los ángulos internos de los polígonos que conforman las extremidades del robot y escribe la medida sobre el dibujo que realizaste.

7. En el dibujo del robot, resalta con color rojo dos líneas paralelas y con color azul dos líneas perpendiculares.

4.2. Sugerencias metodológicas

Recomendamos al profesor implementar la tarea diagnóstica en dos sesiones de 110 minutos cada una. Los estudiantes desarrollan la tarea de forma individual en la primera sesión. El profesor hace la retroalimentación de la tarea en la segunda sesión. Él realiza la retroalimentación a partir de los errores en que incurrieron los estudiantes al desarrollar la tarea. El objetivo de esa retroalimentación es asegurar los conocimientos previos necesarios para que los estudiantes puedan abordar la unidad didáctica.

5. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL PRIMER OBJETIVO

Presentamos las dos tareas de aprendizaje que contribuyen al logro del primer objetivo. En la primera tarea, abordamos la representación gráfica de un sólido en perspectiva isométrica. En la segunda tarea, abordamos la representación geométrica de un sólido a partir de su representación gráfica. Las tareas pretenden contribuir a la construcción y argumentación de las representaciones gráfica y geométrica de los sólidos en perspectiva isométrica. Con ese fin, diseñamos la primera tarea T1.1 La silla para abordar la representación gráfica y la tarea T1.2 El dron para abordar la representación geométrica.

5.1. Tarea T1.1 La silla

Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes construyan la representación isométrica en el sistema de representación gráfico. Presentamos la imagen de una silla que no corresponde a una representación en perspectiva isométrica. Los estudiantes deben construir la representación de la silla en perspectiva isométrica para incluirla en un folleto de muebles. Consideramos que la tarea se puede solucionar mediante dos estrategias. La primera estrategia consiste en la construcción de la representación gráfica de la silla con regla y compás. La segunda estrategia consiste en la construcción de la representación gráfica de la silla con escuadras.

Requisitos

Para el desarrollo de esta tarea, los estudiantes necesitan reconocer la representación gráfica de un sólido como una construcción tridimensional en un plano bidimensional. Además, los estudiantes requieren saber trazar rectas paralelas, medir ángulos y segmentos, y usar instrumentos de dibujo como regla, compás, escuadras y transportador.

Meta de la tarea

Pretendemos con esta tarea contribuir a que los estudiantes representen un sólido en perspectiva isométrica mediante el uso de instrumentos de dibujo. Esta representación implica identificar las caras del sólido y su relación con los ejes X, Y y Z. La tarea contribuye a superar las dificultades para relacionar de manera imprecisa la orientación y la ubicación de objetos en el espacio; las relacionadas con el predominio de la estructura de representación bidimensional en el sistema axonométrico; y las referentes al predominio en el trazo de rectas paralelas en un contexto bidimensional.

Formulación de la tarea

La tarea inicia con la presentación del enunciado por parte del profesor y finaliza con la entrega de la tarea resuelta por parte de los estudiantes. A continuación, presentamos la formulación de la tarea.

Tarea T1.1 La silla

La figura A corresponde a un folleto con los muebles diseñados por la empresa Artemad. Esta empresa requiere agregar al folleto el dibujo de la silla que se muestra en la figura B. El dibujo de la silla debe corresponder a la misma perspectiva en la que están dispuestos los otros muebles en el folleto. Realiza la representación que podría ir en el folleto mediante el uso de instrumentos de dibujo en una hoja blanca. Argumenta tu propuesta mediante la descripción del paso a paso que seguiste para realizar la construcción.



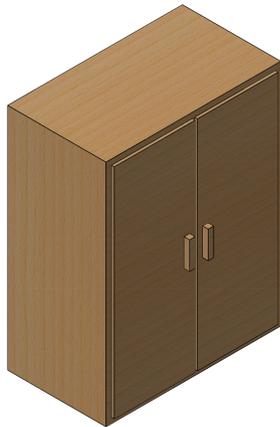
Conoce algunos de nuestros productos en madera destinados a la comodidad de tu hogar. Si quieres conocer más diseños, contactanos a través de artemad@gmail.com



cama bauhaus en cedro
1m x 1,80m x 80cm



Sofa ULM en pino
1,20m x 60cm x 60cm



armario art deco en caoba
3,20m x 80cm x 4,20m



Silla ULM en roble
90cm x 60cm x 60cm

Figura A. Folleto de los muebles diseñados por la empresa Artemad

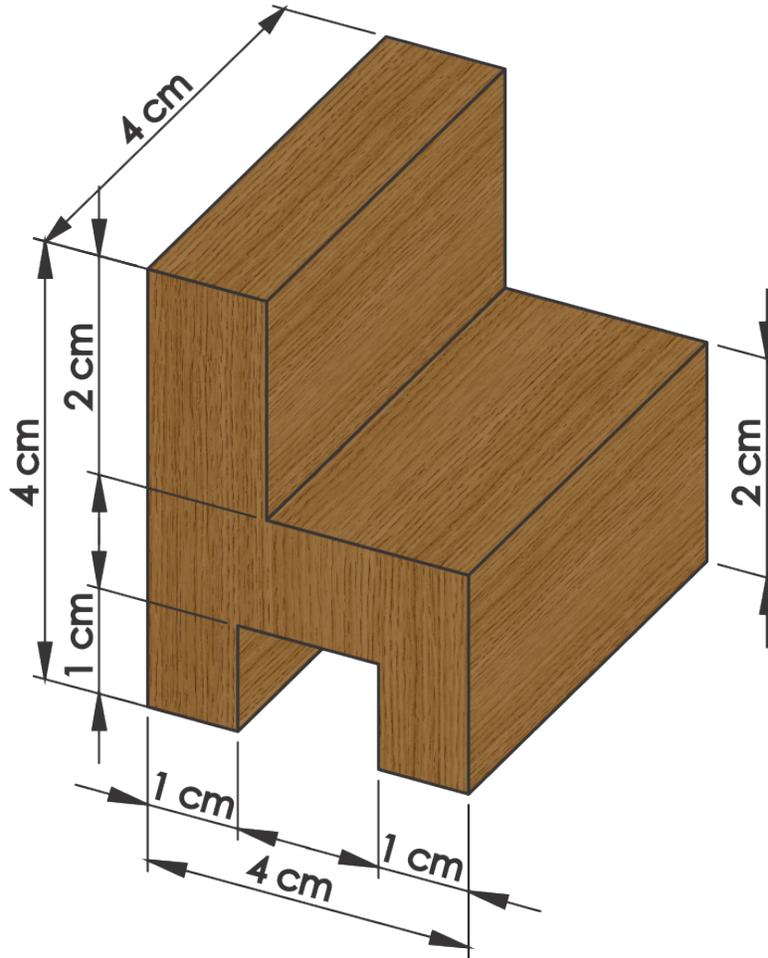


Figura B. Representación de una silla ULM en roble

Conceptos y procedimientos

Los conceptos que involucra la tarea son (a) el reconocimiento de los elementos básicos de la geometría (punto, línea, plano, volumen); (b) la diferenciación de ángulos; (c) el reconocimiento de las unidades de longitud; y (d) el reconocimiento de líneas paralelas. Los procedimientos que involucra la tarea son (a) el trazo de puntos y rectas; (b) la medición de ángulos; (c) la medición de segmentos; y (d) el trazo de líneas paralelas.

Sistemas de representación

Usamos el sistema de representación gráfico para mostrar un sólido en una perspectiva distinta a la isométrica y el sistema de representación simbólico, para mostrar las dimensiones del sólido. En el desarrollo de la tarea, los estudiantes usan el sistema de representación gráfico para construir el sólido en relación con los ejes axonométricos.

Contextos

Situamos la tarea en el contexto social (PISA, 2012) en relación con el diseño publicitario. Los estudiantes, al desarrollar la tarea, deben ponerse en el lugar de un diseñador que requiere presentar un mueble en perspectiva isométrica en un folleto de muebles para clientes.

Materiales y recursos

Los recursos necesarios para el desarrollo de la tarea son hojas de papel, escuadras de 30 y 45 grados, regla, compás, transportador, lápiz y borrador. Los estudiantes son libres de seleccionar el instrumento que consideren apropiado para construir la representación gráfica de la silla. En todo caso, las escuadras, el compás, la regla y el transportador permitirán a los estudiantes realizar procedimientos de construcción de rectas paralelas, medición de ángulos y de segmentos.

Agrupamiento e interacción

Los estudiantes pueden trabajar en grupos de tres integrantes, de manera colaborativa, durante el desarrollo de la tarea. Sin embargo, se requiere que cada estudiante elabore y entregue, de manera individual, la construcción de la silla. Al terminar la tarea, el profesor agrupa a toda la clase para socializar los resultados y concretar acuerdos. El profesor actuará como un mediador y moderador en el momento en que se agrupe toda la clase para exponer los resultados de la tarea. Durante el desarrollo de la tarea, el profesor proporcionará las ayudas para reflexionar sobre las preguntas que manifiesten los estudiantes o los errores en los que incurran. Presentamos esas ayudas en el anexo 05.

Temporalidad

En la tabla 4, presentamos la temporalidad de la tarea. Los tiempos corresponden a una sesión de clase de 110 minutos. En la introducción, el profesor presenta el objetivo de aprendizaje al que pretende contribuir la tarea. En la presentación, el profesor socializa la formulación de la tarea e indica su meta. Durante el desarrollo, los estudiantes resuelven la tarea y el profesor proporciona las ayudas correspondientes. En la socialización, los estudiantes comparten sus construcciones con el grupo y, junto con el profesor, establecen acuerdos sobre el tema.

Tabla 4

Temporalidad para la tarea T1.1 La silla

Etapas	Descripción	Recurso	Tiempo
Introducción	Presentación del primer objetivo de la unidad didáctica.	Video (https://www.youtube.com/watch?v=uSJwWjFXTpw&ab_channel=OmarSantanaRodriguez), preguntas y plataforma virtual	10 minutos

Tabla 4
Temporalidad para la tarea T1.1 La silla

Etapas	Descripción	Recurso	Tiempo
Presentación	El profesor lee la tarea para todo el grupo y comparte la meta de esta.	Tarea T1.1 La silla	10 minutos
Desarrollo	Los estudiantes abordan la tarea individualmente y pueden realizar preguntas. Aquellas preguntas que evidencien errores en los que incurren los estudiantes, serán contestadas mediante el uso de las ayudas.	Ayudas propuestas para la Tarea T1.1 La silla	60 minutos
Socialización	Los estudiantes socializan la solución de la tarea y participan en la concertación de acuerdos sobre el tema.	Aula de clases o plataforma virtual	30 minutos

Errores y ayudas

Durante el desarrollo de la tarea, los estudiantes podrían incurrir en errores o manifestar dificultades para abordarla. Dentro de los errores más representativos están los siguientes: (a) los ejes axonométricos no tienen punto en común; (b) traza los ejes X, Y y Z con ángulos diferentes a 120° ; (c) modifica la medida de los segmentos de las aristas de la cara; y (d) traza de manera equivocada las rectas paralelas de las caras del sólido. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 01. Para estos errores, el profesor puede proporcionar las siguientes ayudas: (a) en la figura 12, ¿qué características tienen las rectas que conforman la malla y cómo se relaciona con la construcción de la silla?; (b) en la proyección de los ejes axonométricos de la figura 12, ¿cuál es la medida de los ángulos entre ejes?; (c) ¿los polígonos de las caras de la imagen de la silla se parecen a los de la construcción que realizaste?; y (d) ¿cómo puedes verificar si las medidas de las aristas del dibujo de la silla corresponden con la representación que construiste? Presentamos el listado completo de ayudas para las tareas en el anexo 05.

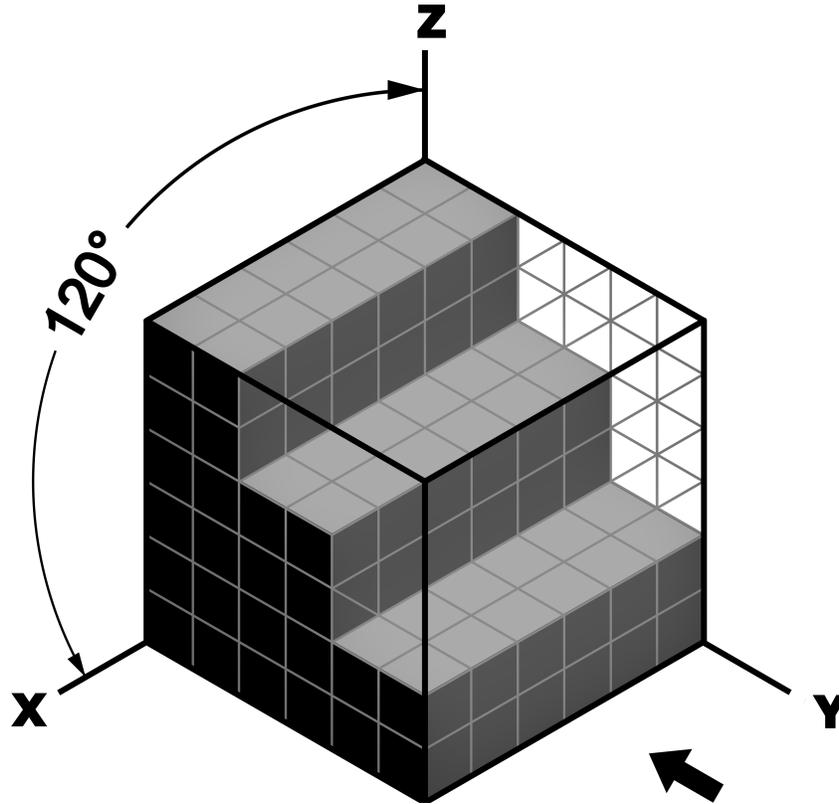


Figura 12. Representación en malla de una escalera.

Grafo de criterios de logro

En la figura 13, presentamos el grafo de criterios de logro del primer objetivo y, en él, resaltamos los procedimientos o estrategias de solución que corresponden a la tarea T1.1. Describimos en cada caja del grafo los procesos que los estudiantes podrían realizar para desarrollar la tarea. Los estudiantes inician por reconocer que se requiere construir un sólido en perspectiva isométrica. Para la construcción de la perspectiva isométrica, los estudiantes usan el sistema de representación gráfica. En este punto, los estudiantes pueden optar por dos estrategias para resolver la tarea. La primera estrategia requiere trazar los ejes axonométricos y construir las caras de la silla mediante el uso de la regla y el compás. La segunda estrategia involucra construir las caras de la silla mediante el uso de las escuadras y verificar sus ángulos. Por último, los estudiantes argumentan los resultados mediante la descripción, paso a paso, de los procedimientos para la construcción de la perspectiva isométrica. Presentamos los criterios de logro de la tarea con los errores asociados, en los que pueden incurrir los estudiantes, en el anexo 03.

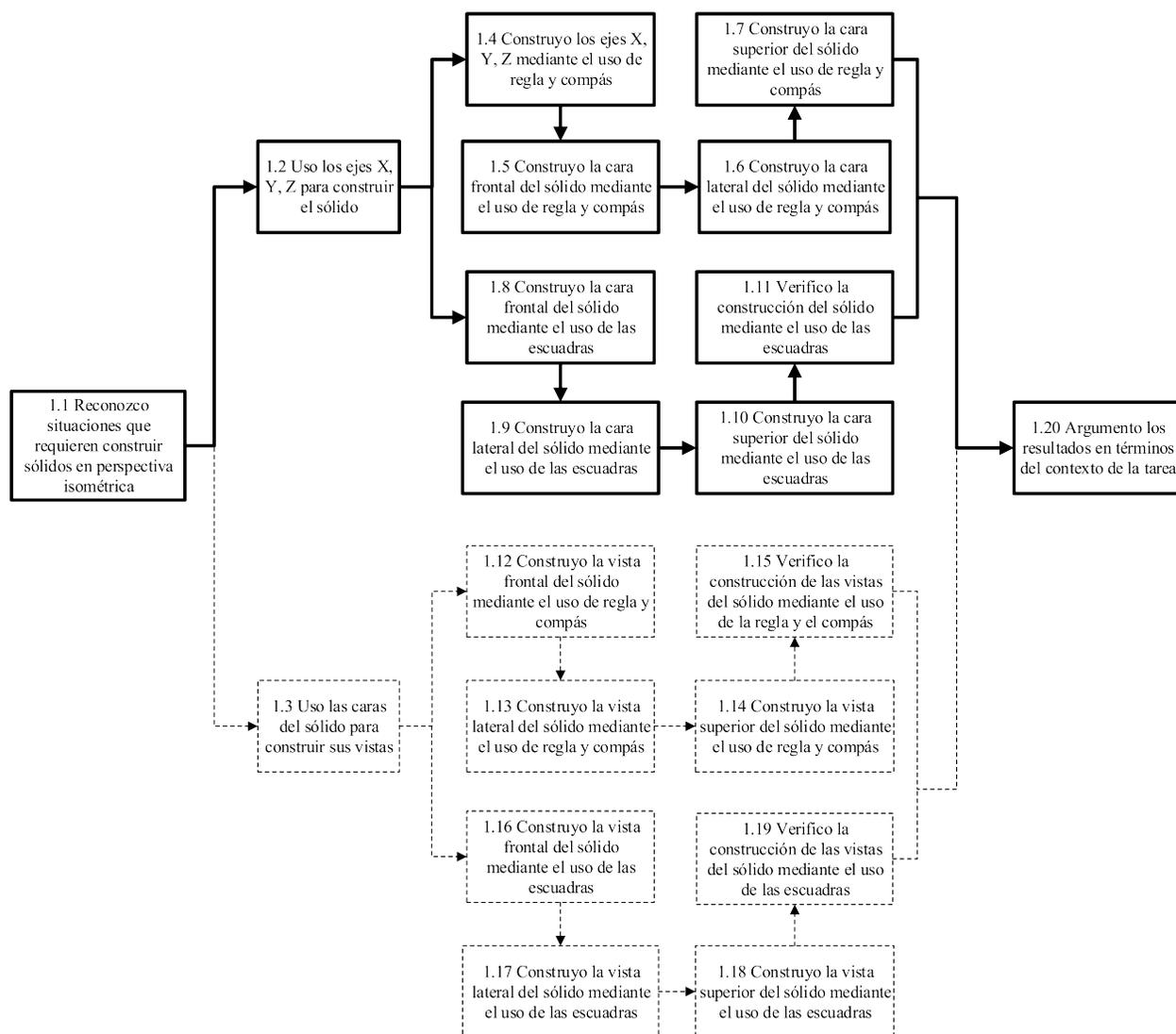


Figura 13. Grafo de criterios de logro para la tarea T1.1 La silla

Actuación del profesor

Consideramos que el profesor puede hacer aclaraciones, respecto al tema, para concretar con los estudiantes los requerimientos de la tarea. Estas aclaraciones se harán si los estudiantes, aún después de socializar la tarea, no comprenden su formulación. El profesor debe solicitar a los estudiantes que muestren la construcción parcial de la silla para identificar si incurren en algún error y, de esta manera, proporcionar las ayudas que se proponen en el anexo 05. Sin embargo, el profesor está en libertad de considerar otras ayudas que permitan superar los errores que surjan en situaciones particulares. El profesor actuará como mediador y moderador en la socialización de los trabajos por parte de los estudiantes.

dron para extraer las vistas que utilizará una compañía inmobiliaria para venderla. Los estudiantes deben colocarse en la posición del dron y construir una representación de las vistas de la casa. Consideramos que la tarea se puede solucionar mediante dos estrategias. La primera estrategia consiste en la construcción de la representación geométrica de la casa mediante el uso de regla y compás. La segunda estrategia consiste en la construcción de la representación geométrica de la casa mediante el uso de escuadras.

Requisitos

Para el desarrollo de la tarea, los estudiantes necesitan reconocer la representación geométrica de un sólido como una construcción bidimensional a partir de una representación tridimensional. Además, los estudiantes requieren saber trazar rectas paralelas y perpendiculares, diferenciar polígonos, medir ángulos y segmentos, y usar instrumentos de dibujo como regla, compás, escuadras y transportador.

Meta de la tarea

Con esta tarea, pretendemos contribuir a que los estudiantes construyan la representación geométrica de un sólido, a partir de su representación gráfica, mediante el uso de instrumentos de dibujo. Para esto, la tarea permite a los estudiantes reconocer y representar el sólido en el sistema diédrico a partir de la representación axonométrica. Además, la tarea contribuye a superar la dificultad para relacionar los sistemas de representación.

Formulación de la tarea

La tarea inicia con la presentación del contexto por parte del profesor y finaliza con la entrega de las producciones de los estudiantes. A continuación, presentamos la formulación de la tarea.

Tarea T1.2 El dron

Una compañía inmobiliaria ofrece una casa para la venta. La compañía usa un dron para tomar las fotografías de los inmuebles. El dron toma fotografías desde las partes frontal, superior y lateral de la casa. ¿Cómo puede la compañía presentar las fotografías de la casa con más detalle?

Representa las fotografías de la casa en los cuadros de la parte derecha de la figura, según corresponda. Ten presente la posición desde la que el dron toma la fotografía. Argumenta tu respuesta mediante la descripción del paso a paso que seguiste para realizar la construcción.

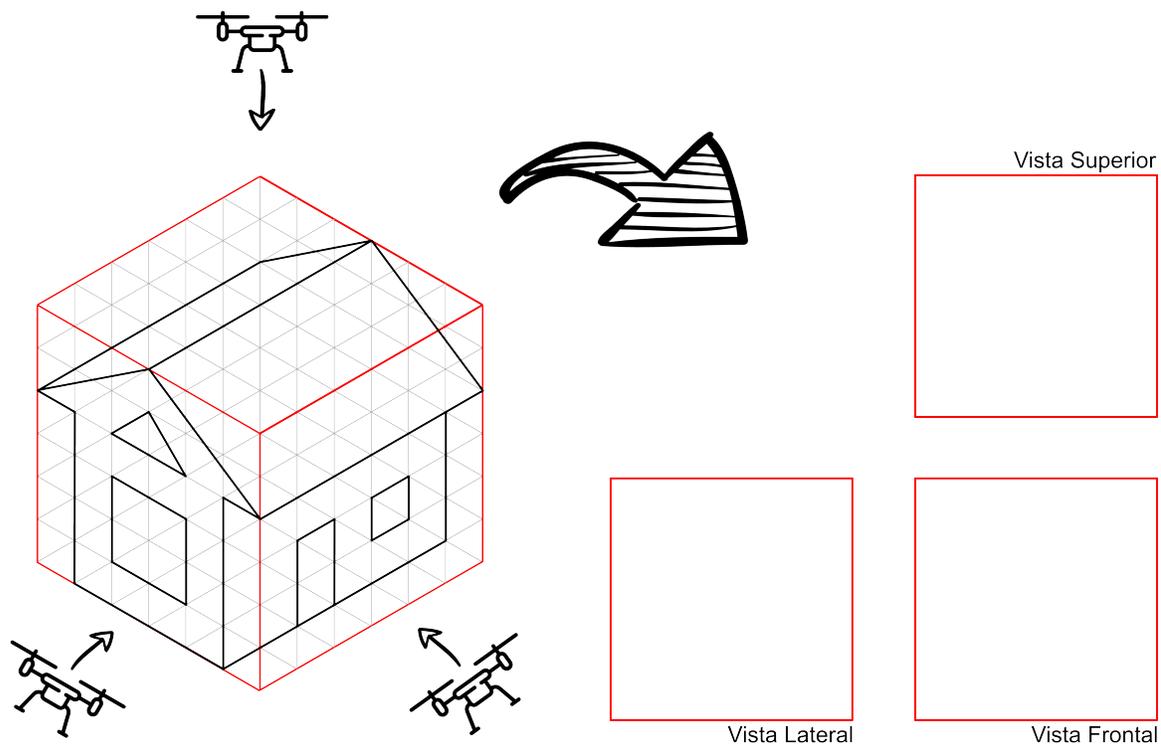


Figura. Representación de la casa

Conceptos y procedimientos

Los conceptos que involucra la tarea son los siguientes: (a) reconocimiento de líneas paralelas y perpendiculares; (b) diferenciación de ángulos; (c) reconocimiento de unidades de longitud; y (d) reconocimiento de polígonos. Los procedimientos que involucra la tarea son los siguientes: (a) trazo de líneas paralelas y perpendiculares; (b) medición de ángulos; (c) medición de segmentos; y (d) construcción de polígonos mediante el uso de instrumentos.

Sistemas de representación

En la formulación de la tarea, usamos el sistema de representación gráfico para mostrar la casa en perspectiva isométrica, y el sistema de representación verbal para diferenciar el cuadrante de las vistas. En el desarrollo de la tarea, los estudiantes usan el sistema de representación geométrico para construir las vistas del sólido, y el sistema de representación verbal para nombrar cada una de las vistas. El profesor puede usar el sistema de representación ejecutable para proporcionar algunas ayudas mediante el software Tinkercad. Este software es intuitivo y de libre acceso. Sin embargo, el profesor está en libertad de usar otro software.

Contextos

Situamos la tarea dentro del contexto científico (PISA, 2012) en relación con el diseño de construcciones civiles. Para desarrollar la tarea, los estudiantes deben ponerse en el lugar de un diseñador que, mediante las fotografías de un dron, requiere construir la representación geométrica de un inmueble para ponerlo en venta.

Materiales y recursos

Los recursos necesarios para el desarrollo de la tarea son hojas de papel, escuadras de 30 y 45 grados, regla, compás, transportador, lápiz y borrador. Los estudiantes son libres de seleccionar el instrumento que consideren apropiado para construir la representación geométrica de la casa. Los instrumentos permitirán a los estudiantes realizar procedimientos de construcción de rectas paralelas y perpendiculares, de medición de ángulos y segmentos, y de construcción de polígonos.

Agrupamiento e interacción

Esta tarea requiere que cada estudiante presente la construcción de las vistas de la casa de manera individual. Sin embargo, los estudiantes pueden trabajar de manera colaborativa en grupos de tres integrantes para apoyarse durante el desarrollo de la tarea. Al terminar la tarea, el profesor agrupa toda la clase para socializar los resultados y concretar acuerdos. El profesor actuará como un mediador y moderador en el momento en que se agrupe toda la clase para exponer los resultados de la tarea. Durante el desarrollo de la tarea, el profesor proporcionará las ayudas para reflexionar sobre las preguntas que manifiesten los estudiantes o los errores en los que incurran. En el anexo 05, presentamos esas ayudas.

Temporalidad

En la tabla 5, presentamos la temporalidad de la tarea. Los tiempos corresponden a una sesión de clase de 110 minutos. Durante la etapa de retroalimentación, el profesor retoma la tarea T1.1 La silla y presenta las observaciones que considere pertinentes, respecto a los resultados, con el fin de apoyar el buen desarrollo de la tarea T1.2. En la presentación, el profesor socializa la tarea e indica la meta. En el desarrollo, los estudiantes resuelven la tarea, en tanto el profesor identifica errores y proporciona las ayudas correspondientes. En la socialización, los estudiantes comparten sus construcciones al grupo y, junto con el profesor, establecen acuerdos sobre el tema.

Tabla 5

Temporalidad para la tarea T1.2 El dron

Etapas	Descripción	Recurso	Tiempo
Retroalimentación	A partir de la revisión de los trabajos de la tarea T1.1 La silla, el profesor aclara las dudas que persistieron durante el desarrollo de la tarea con relación a los criterios no logrados. La clase establece nuevos acuerdos de las cuestiones relevantes que aborda la tarea.	Los trabajos de la tarea T1.1 La silla retroalimentados	20 minutos
Presentación	El profesor lee la tarea T1.2 para todo el grupo y comparte la meta propuesta para la tarea.	Tarea T1.2 El dron	10 minutos
Desarrollo	Los estudiantes abordan la tarea individualmente y pueden realizar preguntas. Aquellas preguntas que evidencian errores en los que incurren los estudiantes, serán contestadas mediante el uso de las ayudas.	Ayudas propuestas para la tarea T1.2 El dron	50 minutos
Socialización	Los estudiantes socializan la solución de la tarea T1.2 y participan en la concertación de acuerdos sobre el tema.	Aula de clases o plataforma virtual	30 minutos

Errores y ayudas

Durante el desarrollo de la tarea T1.2, los estudiantes podrían incurrir en errores. Los errores más representativos para esta tarea son los siguientes: (a) señala la vista lateral como la vista frontal del sólido; (b) marca los vértices de polígonos que no corresponden a las vistas del sólido; (c) traza de manera equivocada las rectas perpendiculares de los lados de las vistas; y (d) resalta segmentos de la construcción que no corresponden a la composición de las vistas del sólido. El listado completo de dificultades y errores se encuentra en el anexo 01. Para estos errores, el profesor puede proporcionar las siguientes ayudas: (a) en la figura 15, ¿cómo se relacionan las vistas con la ubicación del cubo?; (b) ¿los polígonos de las caras de la casa se parecen a la construcción de las vistas que realizaste?; (c) ¿qué relación encuentras entre las medidas de las aristas de las caras y las vistas de la casa?; y (d) ¿cómo puedes verificar si las aristas del dibujo

de la casa corresponden con la representación de las vistas que construiste? Presentamos el listado completo de ayudas para esta tarea en el anexo 05.

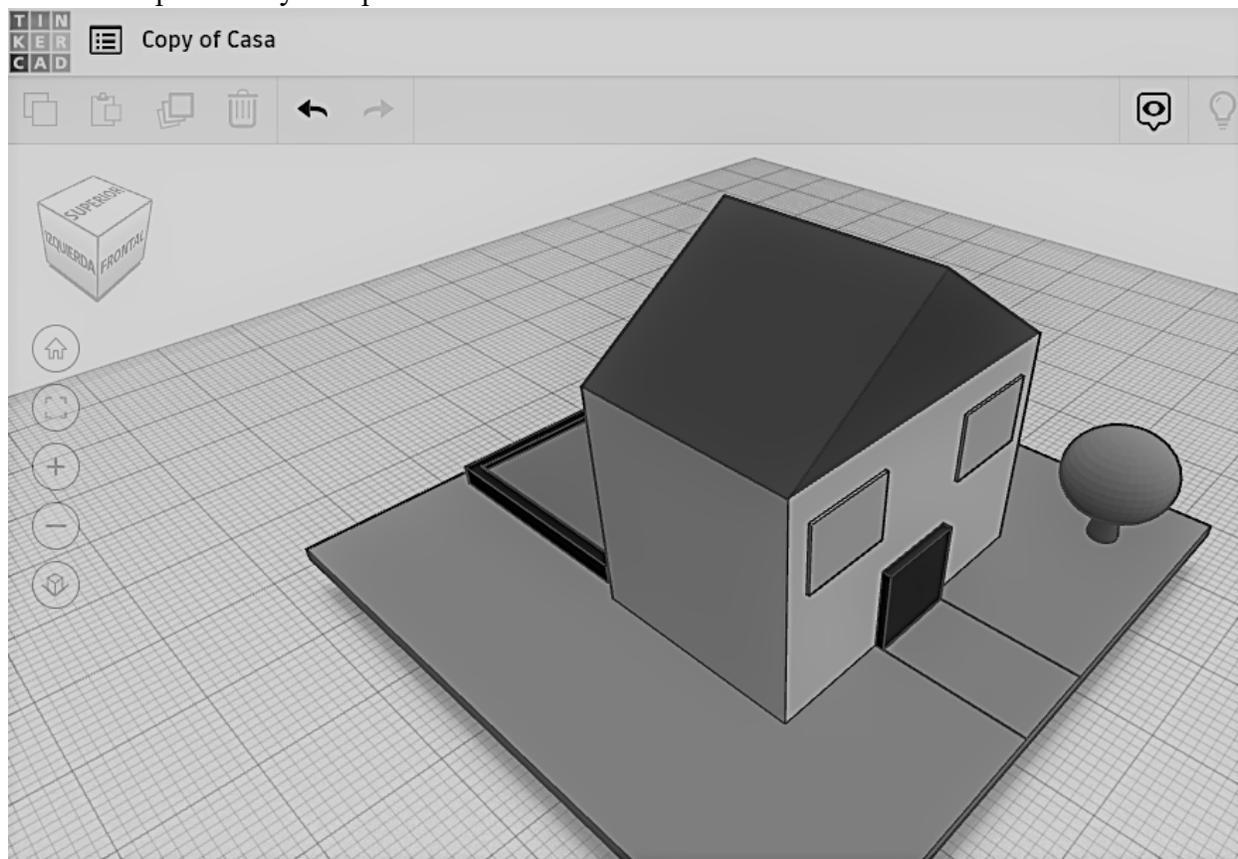


Figura 15. Interfaz gráfica de Tinkercad.

Grafo de criterios de logro

En la figura 16, presentamos el grafo del primer objetivo y, en él, resaltamos los procedimientos o estrategias de solución que corresponden a la tarea T1.2. Los estudiantes inician por reconocer que se requiere construir las vistas frontal, lateral y superior de un sólido que está en perspectiva isométrica. Los estudiantes usan el sistema de representación geométrico para la construcción de las vistas. Ellos pueden optar por dos estrategias para resolver la tarea. La primera estrategia involucra construir las vistas de la casa y verificarlas mediante el uso de la regla y el compás. La segunda estrategia corresponde a construir las vistas de la casa y verificarlas mediante el uso de las escuadras. Por último, los estudiantes argumentan los resultados mediante la descripción, paso a paso, de los procedimientos para la construcción de las vistas. El grafo completo con los errores asociados, para las tareas del objetivo, se presenta en el anexo 03.

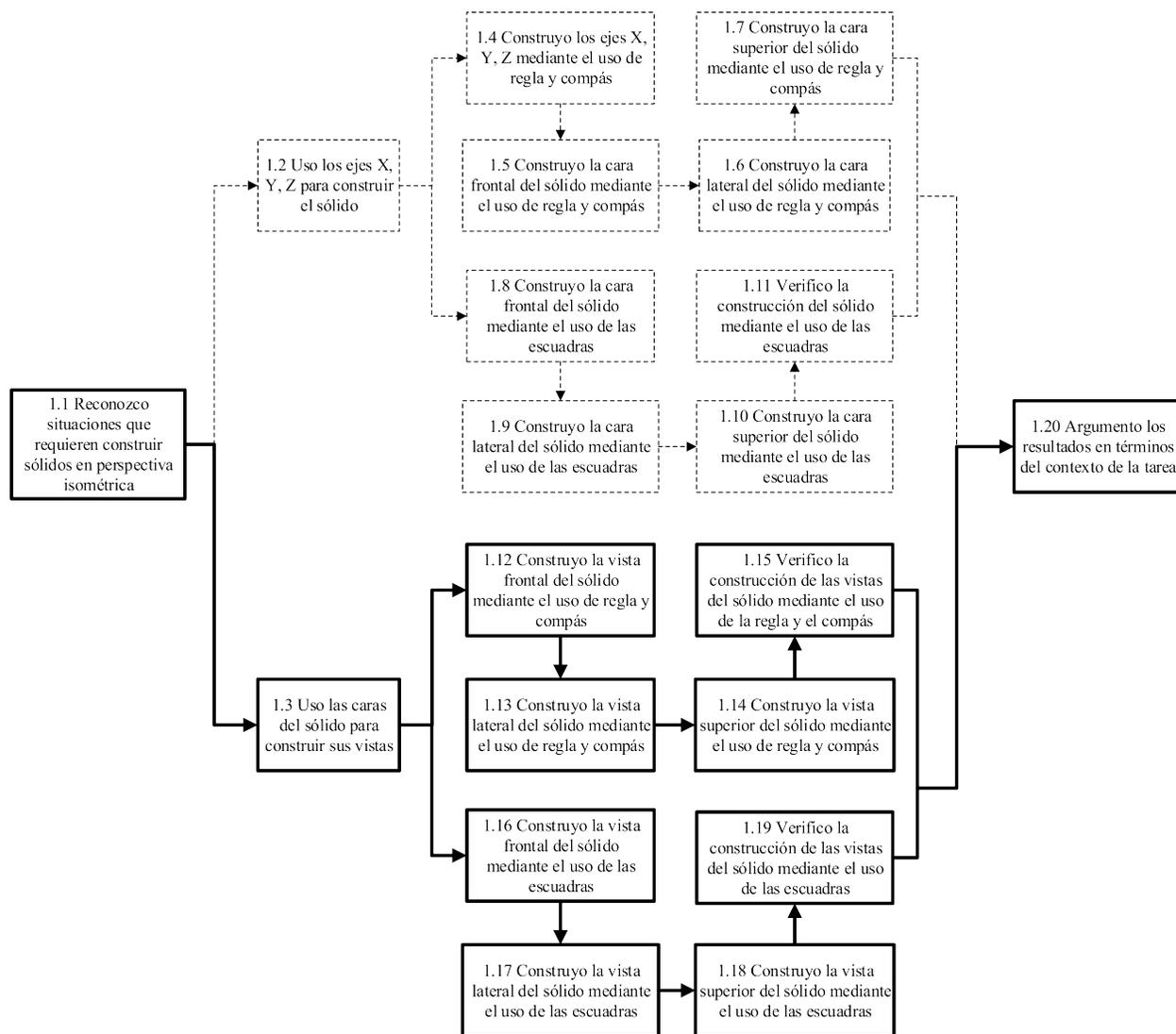


Figura 16. Grafo de criterios de logro de la tarea T1.2 El dron

Actuación del profesor

Sugerimos que el profesor inicie la clase con algunas preguntas para inducir a los estudiantes al desarrollo de la tarea. Por ejemplo, él puede preguntar: ¿cuál es el frente de la casa? El profesor realizará las aclaraciones que soliciten los estudiantes, sobre el sistema de representación geométrica, para tener claridad en los requerimientos de la tarea. El profesor debe solicitar a los estudiantes que muestren la construcción parcial de las vistas de la casa para identificar si incurren en algún error y, de esta manera, proporcionar las ayudas que se proponen en el anexo 05. Sin embargo, el profesor está en libertad de considerar otras ayudas que surjan en situaciones particulares. Sugerimos al profesor que pregunte a los estudiantes ¿cuál es la correspondencia entre la cara del sólido y la vista que está en construcción?, para identificar si la relación es

correcta. Por último, el profesor actuará como mediador y moderador en la socialización de los trabajos por parte de los estudiantes.

Sugerencias metodológicas

El profesor debe comprobar que los estudiantes tienen claridad sobre el objetivo al que contribuye el desarrollo de la tarea T1.2. Además, sugerimos que el profesor verifique si los estudiantes tienen claridad sobre el uso del sistema de representación gráfico, para poder establecer la relación con el sistema de representación geométrico. El profesor puede verificar que los estudiantes estuvieron atentos al video que expone el objetivo mediante preguntas, y recordar los acuerdos establecidos al finalizar el desarrollo de la tarea T1.1 La silla. De igual manera, el profesor puede comprobar que los estudiantes comprenden la instrucción de la tarea T1.2 El dron y reconocen los términos técnicos del tema. Es importante que, el profesor tenga dominio de algún software para presentar ayudas interactivas en relación con la extracción de las vistas. Sugerimos utilizar el programa Tinkercad en línea, puesto que es un software intuitivo y de libre acceso.

Evaluación

El profesor realizará una evaluación formativa durante el desarrollo de la clase. Para esto, el profesor proporcionará las ayudas necesarias para que los estudiantes superen los errores en los que incurrir en el proceso de construcción de las vistas de la casa. De igual manera, el profesor verificará que los estudiantes atienden a los requerimientos de la tarea y construye las vistas frontal, lateral y superior de las caras de la casa sin dificultades.

Sugerimos usar una hoja de Excel similar a la de la figura 14. En este caso, la hoja de Excel relaciona los errores asociados con la tarea T1.2. La relación de esos errores con los niveles de desempeño se presenta de manera detallada en la tabla 8. Presentamos el formato correspondiente a la tarea en el anexo 06.

6. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL SEGUNDO OBJETIVO

Presentamos las dos tareas de aprendizaje que contribuyen al logro del segundo objetivo. En la primera tarea, abordamos la verificación de la representación gráfica de un sólido en perspectiva isométrica. En la segunda tarea, abordamos la verificación de la representación geométrica de un sólido a partir del desarrollo de planos. Las tareas pretenden contribuir a la interpretación de la representación de un sólido en perspectiva isométrica en diferentes contextos. Con ese fin, diseñamos la primera tarea T2.1 Las fichas del cubo soma para abordar la verificación de la representación gráfica y la tarea T2.2 Rompecabezas para abordar la verificación de la representación geométrica.

6.1. Tarea T2.1 Las fichas del cubo soma

Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes verifiquen la representación isométrica en el sistema de representación gráfico. En la tarea, presentamos las representaciones de las siete fichas de un cubo soma en perspectiva ortogonal. Los estudiantes deben establecer cuáles fichas corresponden a una representación en perspectiva isométrica. Consideramos que la tarea se

puede solucionar mediante dos estrategias. La primera estrategia consiste en la verificación de la representación gráfica de las fichas del cubo soma con transportador. La segunda estrategia consiste en la verificación de la representación gráfica de las fichas del cubo soma con escuadras.

Requisitos

Para el desarrollo de la tarea, los estudiantes necesitan identificar rectas paralelas y perpendiculares, reconocer los elementos básicos de la geometría como punto, segmento y plano, medir ángulos entre aristas, y usar instrumentos de dibujo como regla, transportador y escuadras. Además, los estudiantes requieren dominar los conceptos y procedimientos de la perspectiva isométrica abordados previamente en el desarrollo de la tarea T1.1 La silla.

Meta de la tarea

Con esta tarea, pretendemos contribuir a que los estudiantes identifiquen y relacionen los sólidos que guardan el mismo ángulo de construcción entre sus ejes axonométricos. Además, la tarea contribuye a que los estudiantes justifiquen la relación entre los grupos de sólidos a partir de las características de su representación en el sistema gráfico. La tarea contribuye a superar la dificultad de interpretar de manera parcial las reglas que determinan la construcción de los sistemas de representación de la perspectiva isométrica.

Formulación de la tarea

La tarea inicia con la presentación del enunciado por parte del profesor y finaliza con la entrega de la tarea resuelta por parte de los estudiantes. A continuación, presentamos la formulación de la tarea.

Tarea T2.1 Las fichas del cubo soma

En la figura, encontramos las fichas de un cubo soma dibujadas en perspectiva. En cada ficha, proyecta los ejes axonométricos en uno de los vértices y establece la medida del ángulo entre ejes. Luego, colorea las fichas que corresponden a una representación en perspectiva isométrica. Argumenta el resultado mediante la descripción del paso a paso que seguiste para realizar tu elección.

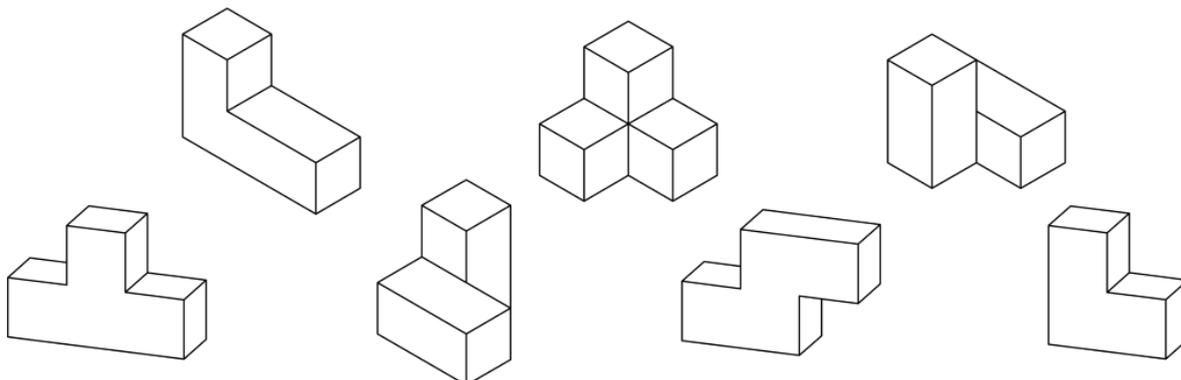


Figura. Representaciones axonométricas de las fichas del cubo soma

Conceptos y procedimientos

Los conceptos que involucra la tarea son (a) la identificación de líneas paralelas y perpendiculares; (b) el reconocimiento de elementos básicos de la geometría como punto, línea, plano y volumen; (c) la diferenciación de ángulos; (d) la identificación de las propiedades geométricas de los instrumentos de dibujo; y (e) el reconocimiento de las propiedades para la construcción de la perspectiva isométrica. Los procedimientos que involucra la tarea son (a) el trazo de líneas paralelas y perpendiculares; (b) la proyección de rectas; (c) la medición de ángulos; (d) el uso de instrumentos de dibujo; y (e) poner de manifiesto los ejes axonométricos.

Sistemas de representación

Usamos el sistema de representación gráfico para mostrar las representaciones de las fichas del cubo soma. En el desarrollo de la tarea, los estudiantes usan el sistema de representación gráfico al poner de manifiesto los ejes axonométricos, para verificar que los ángulos corresponden a los de una perspectiva isométrica.

Contextos

Situamos la tarea en el contexto personal (PISA, 2012) en relación con la interpretación geométrica de objetos del entorno. Al desarrollar la tarea, los estudiantes deben ponerse en el lugar de un usuario que requiere distinguir qué figuras de las fichas del cubo soma están representadas en perspectiva isométrica.

Materiales y recursos

Los recursos necesarios para el desarrollo de la tarea son una copia impresa de la tarea, escuadras de 30 y 45 grados, regla, transportador, lápiz y borrador. Los estudiantes son libres de seleccionar los instrumentos que consideren apropiados para verificar la representación gráfica de las fichas del cubo soma. Estos instrumentos ayudan a realizar la proyección de las aristas y a medir los ángulos de las representaciones de las fichas.

Agrupamiento e interacción

La tarea requiere que cada estudiante presente, de manera individual, la verificación de la perspectiva en la que están las fichas del cubo soma. Al terminar la tarea, el profesor agrupa a toda la clase para socializar los resultados y concretar acuerdos. El profesor actuará como mediador y moderador en el momento en que se agrupe toda la clase para exponer los resultados de la tarea. Durante el desarrollo de la tarea, el profesor proporcionará las ayudas para superar los errores en los que incurran los estudiantes. En el anexo 05, presentamos esas ayudas.

Temporalidad

En la tabla 6, presentamos la temporalidad de la tarea. Los tiempos corresponden a una sesión de clase de 110 minutos. En la retroalimentación, el profesor retoma la tarea T1.2 El dron y presenta las observaciones que considere pertinentes respecto a los resultados. En la introducción, el profesor presenta el objetivo de aprendizaje al que pretende contribuir la tarea T2.1. En la presentación, el profesor socializa la formulación de la tarea T2.1 e indica su meta. Durante el desarrollo, los estudiantes resuelven la tarea y el profesor proporciona las ayudas

correspondientes. En la socialización, los estudiantes comparten sus resultados al grupo y, junto con el profesor, establecen acuerdos sobre el tema.

Tabla 6
Temporalidad para la tarea T2.1 Las fichas del cubo soma

Etapas	Descripción	Recurso	Tiempo
Retroalimentación	A partir de la revisión de los trabajos de la tarea T1.2 El dron, el profesor aclara las dudas que persistieron durante el desarrollo de la tarea en relación con los criterios no logrados. La clase establece nuevos acuerdos de las cuestiones relevantes que aborda la tarea.	Los trabajos de la tarea T1.2 El dron retroalimentados	10 minutos
Introducción	El profesor presenta el segundo objetivo de la unidad didáctica y retoma los conceptos y procedimientos trabajados en la tarea T1.1 La silla.	Video (https://www.youtube.com/watch?v=uSJwWjFjTPw&ab_channel=OmarSantanaRodriguez), preguntas y plataforma virtual	10 minutos
Presentación	El profesor lee la tarea para todo el grupo y comparte la meta propuesta para la tarea.	Tarea T2.1 Las fichas del cubo soma	10 minutos
Desarrollo	Los estudiantes abordan la tarea individualmente y pueden realizar preguntas. Aquellas preguntas que evidencian errores en los que incurren los estudiantes, serán contestadas mediante el uso de las ayudas.	Ayudas propuestas para la tarea T2.1 Las fichas del cubo soma	50 minutos
Socialización	Los estudiantes socializan la solución de la tarea y participan en la concertación de acuerdos sobre el tema.	Aula de clases o plataforma virtual	30 minutos

Errores y ayudas

Durante el desarrollo de la tarea, los estudiantes podrían incurrir en errores o manifestar dificultades para abordarla. Dentro de los errores más representativos están los siguientes: (a) los ejes axonométricos no tienen punto en común; (b) las rectas de construcción proyectadas no

están superpuestas a las aristas del sólido; y (c) el estudiante mide los ángulos entre los ejes, sin tener en cuenta el eje Z como punto de partida. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 01. Para estos errores, el profesor puede proporcionar las siguientes ayudas en relación con la figura 17: (a) ¿encuentras alguna relación entre las aristas del sólido y los ejes de construcción?; y (b) ¿cuál es la medida de los ángulos entre ejes? Presentamos el listado completo de ayudas para las tareas en el anexo 05.

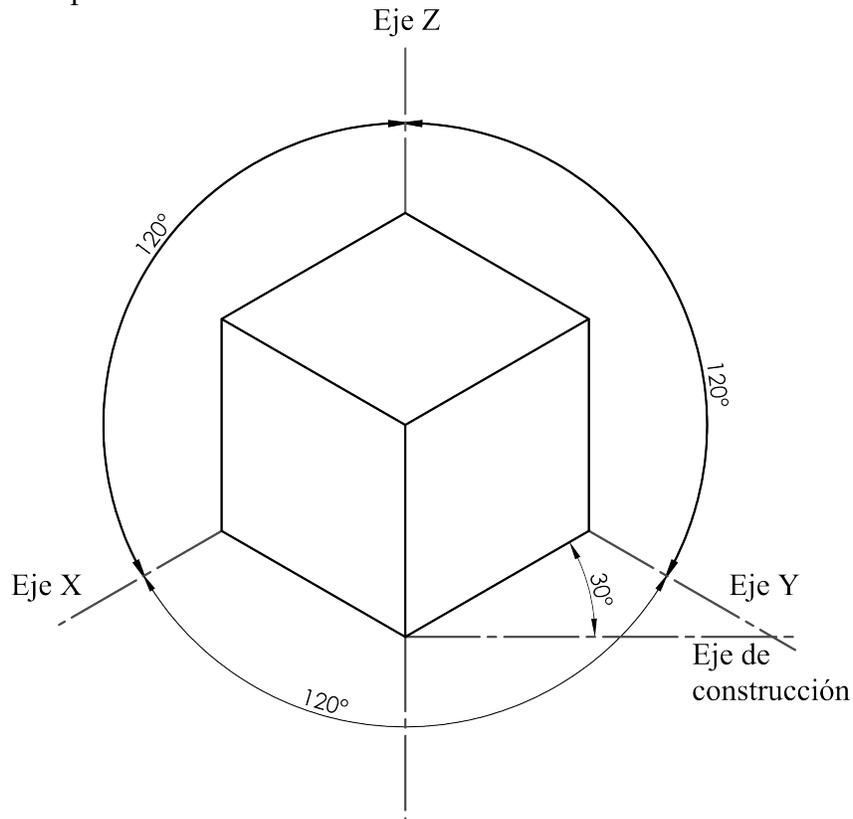


Figura 17. Esquema del sistema de representación gráfico

Grafo de criterios de logro

En la figura 18, presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo y, en él, resaltamos los procedimientos o estrategias de solución que corresponden a la tarea T2.1. Describimos en cada caja del grafo los procedimientos que un estudiante podría realizar para desarrollar la tarea. Los estudiantes inician por establecer la información que proporciona la formulación de la tarea. Luego, los estudiantes establecen los ejes X, Y y Z (sistema de representación gráfico) como medio para verificar la representación isométrica de las fichas. En este punto, los estudiantes pueden optar por dos estrategias para resolver la tarea. La primera estrategia consiste en verificar la perspectiva isométrica mediante el uso del transportador. La segunda estrategia involucra el uso de las escuadras. Por último, los estudiantes interpretan los resultados mediante la descripción, paso a paso, de los procedimientos para la verificación de la

perspectiva isométrica. Presentamos los criterios de logro de la tarea con los errores asociados en los que puede incurrir los estudiantes en el anexo 03.

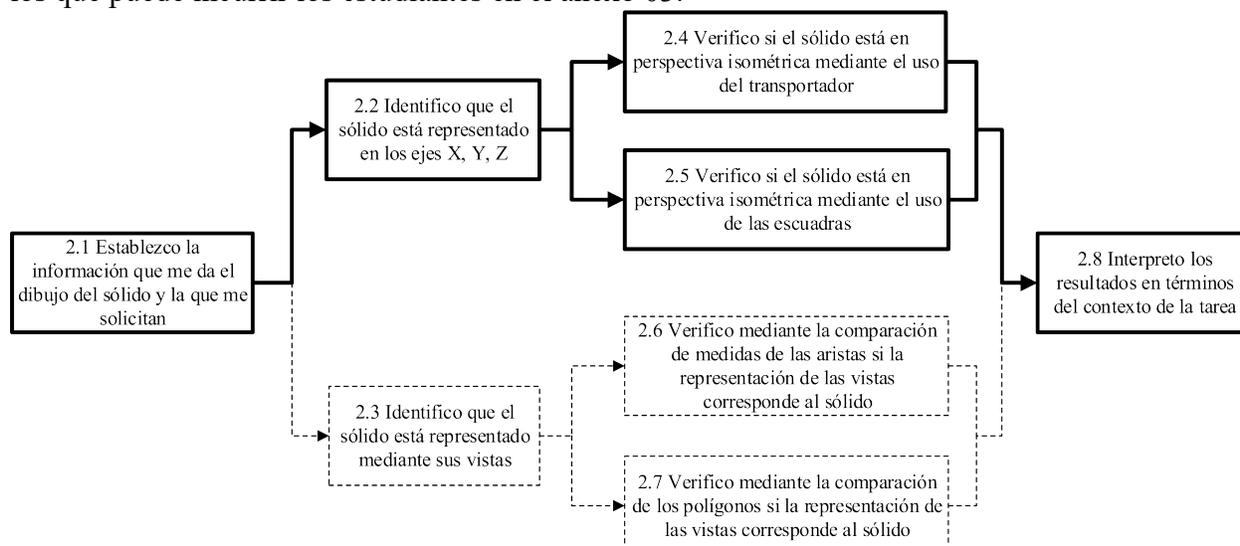


Figura 18. Grafo de criterios de logro para la tarea T2.1 Las fichas del cubo soma

Actuación del profesor

Consideramos que el profesor puede hacer aclaraciones, respecto al tema, para concretar con los estudiantes los requerimientos de la tarea. Estas aclaraciones se harán si los estudiantes, aún después de socializar la tarea, no comprenden sus instrucciones. El profesor debe solicitar a los estudiantes que muestren la verificación parcial de las fichas del cubo soma para identificar si incurren en algún error. El profesor puede proporcionar las ayudas que proponemos en el anexo 05 para que los estudiantes superen los errores. Sin embargo, el profesor está en libertad de considerar otras ayudas que permitan superar los errores que surjan en situaciones particulares. Sugerimos al profesor que pregunte a los estudiantes ¿cuáles ángulos determinan que una representación está en perspectiva isométrica? El profesor actuará como mediador y moderador en la socialización de los trabajos por parte de los estudiantes.

Sugerencias metodológicas

Sugerimos al profesor comprobar que los estudiantes tienen claridad del objetivo al que contribuye el desarrollo de la tarea T2.1. Para eso, recomendamos hacer preguntas a los estudiantes en relación con el video en el que se expone el segundo objetivo. De igual manera, es importante verificar que los estudiantes recuerden los términos técnicos del tema que se abordaron en la tarea T1.1 La Silla. El profesor puede realizar esa verificación mediante la observación e indagación del desarrollo de la tarea que han realizado los estudiantes.

Evaluación

El profesor realizará una evaluación formativa durante el desarrollo de la clase. Para este fin, el profesor proporcionará las ayudas necesarias para que los estudiantes superen los errores en los que incurren en el proceso de verificación de las fichas del cubo soma. De igual manera, el

profesor comprueba que los estudiantes atienden a los requerimientos de la tarea y realizan la verificación sin dificultades.

Sugerimos diligenciar la hoja de Excel para generar la evaluación sumativa, de orden cuantitativo, de la tarea T2.1 (ver figura 19), de igual manera a como se realizó para las tareas del primer objetivo. La relación de los errores con los niveles de desempeño se presenta de manera detallada en la tabla 9. En el anexo 06, presentamos la planilla para la evaluación de la tarea T2.1.

Estudiante	Desempeño																		PONDERADO
	Superior		Alto			Básico						Bajo							
	Organización	Asistencia	E81	E85	E89	E77	E80	E87	E90	E91	E92	E78	E79	E82	E83	E84	E86	E88	
Estudiante 1				1															44
Estudiante 2										1					1				29
Estudiante 3	1	1																	46
Estudiante 4																			50
Estudiante 5				1	1														42
Estudiante 6						1			1	1	1								34
Estudiante 7		1			1		1		1										38
Estudiante 8																			50
Estudiante 9	1	1																	46
Estudiante 10	1				1					1									39

Figura 19. Planilla de evaluación cuantitativa de la tarea T2.1 Las fichas del cubo soma

6.2. Tarea T2.2 Rompecabezas

Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes verifiquen la representación diédrica de dos piezas de un juego de ajedrez en el sistema de representación geométrico. Presentamos los desarrollos planos de las dos piezas para que los estudiantes las recorten y armen. Luego, los estudiantes deben relacionar y justificar la elección de las vistas correspondientes a las piezas entre diferentes arreglos mostrados. Consideramos que la tarea se puede solucionar mediante dos estrategias. La primera estrategia consiste en la comparación de las medidas de las aristas de las piezas de ajedrez con las vistas. La segunda estrategia consiste en la comparación de los polígonos de las piezas del ajedrez con las vistas.

Requisitos

Para el desarrollo de la tarea, los estudiantes necesitan reconocer los elementos de un sólido, medir longitudes, diferenciar polígonos y distinguir sus dimensiones. Además, los estudiantes requieren los conceptos y procedimientos de la perspectiva isométrica abordados en el desarrollo de la tarea T1.2 El dron.

Meta de la tarea

Con esta tarea, pretendemos contribuir a que los estudiantes verifiquen la representación geométrica de un sólido mediante el desarrollo de planos. Para eso, la tarea permite a los estudiantes armar e interactuar con las piezas del ajedrez para establecer sus vistas gráficamente. Además, la tarea contribuye a superar la dificultad de visualizar la información de un sólido de manera parcial.

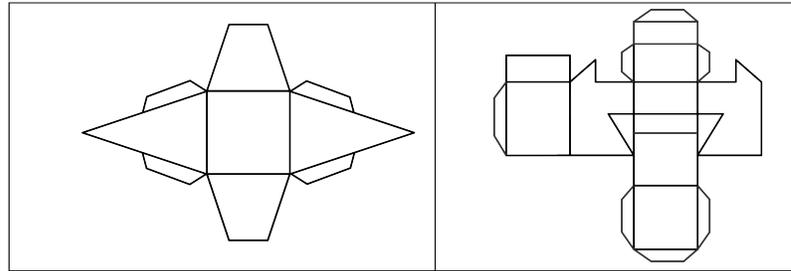
Formulación de la tarea

La tarea inicia con la presentación del contexto por parte del profesor y finaliza con la entrega de las producciones de los estudiantes. A continuación, presentamos la formulación de la tarea.

Tarea T2.2 Rompecabezas

Recorta y arma los planos de las dos piezas del ajedrez (ver figura). Luego, escribe en la tabla, debajo de cada pieza, el número correspondiente a las vistas frontal, superior y lateral. Argumenta el resultado mediante la descripción del paso a paso que seguiste para realizar tu elección.

Rompecabezas



	Alfil			Caballo		
Frontal						
Superior						
Lateral						

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18

Figura. Rompecabezas de la representación diédrica de las piezas del ajedrez

Conceptos y procedimientos

Los conceptos que involucra la tarea son (a) el reconocimiento de los elementos de un sólido; (b) el reconocimiento de unidades de longitud; (c) la diferenciación de polígonos; (d) la identificación de las dimensiones; y (e) el reconocimiento de las propiedades para la construcción de las vistas de un sólido en el sistema de representación geométrico. Los procedimientos que involucra la tarea son (a) el armado de sólidos a partir del desarrollo de planos; (b) la medición de las longitudes de las aristas; (c) la comparación de polígonos; (d) la

relación de las dimensiones con las caras de un sólido; y (e) el contraste de las vistas con las caras de un sólido.

Sistemas de representación

En la formulación de la tarea, usamos el sistema de representación geométrico para mostrar las vistas y los planos de las dos piezas del ajedrez. Usamos el sistema de representación verbal para indicar el nombre de las vistas. En el desarrollo de la tarea, los estudiantes usan el sistema de representación geométrico para realizar la interpretación de las vistas.

Contextos

Situamos la tarea dentro del contexto personal (PISA, 2012) en relación con la interpretación geométrica de objetos del entorno. Al desarrollar la tarea, los estudiantes deben ponerse en el lugar de un usuario que requiere distinguir las vistas de dos piezas de ajedrez, luego de armarlas.

Materiales y recursos

Los recursos necesarios para el desarrollo de la tarea son una copia impresa de la tarea, regla, lápiz y borrador. Los estudiantes son libres de seleccionar el instrumento que consideren apropiado para verificar la representación geométrica de las piezas del ajedrez mediante la comparación de las medidas de las aristas. Sin embargo, la regla es el instrumento idóneo para realizar esas mediciones. Si los estudiantes relacionan las vistas mediante la comparación de los polígonos no requieren de instrumentos de dibujo.

Agrupamiento e interacción

Esta tarea requiere que cada estudiante presente la verificación de las vistas de las piezas del ajedrez de manera individual. Al terminar la tarea, el profesor agrupa toda la clase para socializar los resultados y concretar acuerdos. El profesor actuará como mediador y moderador en el momento en que se agrupe toda la clase para exponer los resultados de la tarea. Durante el desarrollo de la tarea, el profesor proporcionará las ayudas necesarias para que los estudiantes identifiquen y superen los errores en los que incurrir. Además, el profesor resolverá las dudas que manifiesten los estudiantes respecto a la tarea. En el anexo 05, presentamos esas ayudas.

Temporalidad

En la tabla 7, presentamos la temporalidad de la tarea. Los tiempos corresponden a una sesión de clase de 110 minutos. En la retroalimentación, el profesor retoma la tarea T2.1 las fichas del cubo soma y presenta las observaciones que considere pertinentes respecto a los resultados. En la presentación, el profesor socializa la formulación de la tarea T2.2 e indica la meta. En el desarrollo, los estudiantes resuelven la tarea, en tanto el profesor proporciona las ayudas a los estudiantes que incurran en errores. En la socialización, los estudiantes comparten sus verificaciones al grupo y, junto con el profesor, establecen acuerdos sobre el tema.

Tabla 7
Temporalidad para la tarea T2.2 Rompecabezas

Etapas	Descripción	Recurso	Tiempo
Retroalimentación	A partir de la revisión de los trabajos de la tarea T2.1, el profesor aclara las dudas que persistieron durante el desarrollo de la tarea en relación con los criterios no logrados. La clase establece nuevos acuerdos de las cuestiones relevantes que aborda la tarea.	Los trabajos retroalimentados de los estudiantes de la tarea T2.1 Las fichas del cubo soma	20 minutos
Presentación	El profesor lee la tarea T2.2 para todo el grupo, comparte la meta propuesta para la tarea y retoma los conceptos y procedimientos trabajados en la tarea T1.2 El dron.	Tarea T2.2 Rompecabezas Tarea T1.2 El dron	20 minutos
Desarrollo	Los estudiantes abordan la tarea de forma individual y pueden realizar preguntas. Aquellas preguntas que evidencian errores en los que incurren los estudiantes, serán contestadas mediante el uso de las ayudas.	Ayudas propuestas para la tarea T2.2 Rompecabezas	45 minutos
Socialización	Los estudiantes socializan la solución de la tarea T2.2 y participan en la concertación de acuerdos sobre el tema.	Aula de clases o plataforma virtual	25 minutos

Errores y ayudas

Durante el desarrollo de la tarea, los estudiantes podrían incurrir en errores. Dentro de los errores más representativos, están los siguientes: (a) relaciona de manera parcial las aristas de los polígonos que conforman las vistas del sólido; (b) relaciona las vistas en el sistema diédrico sin guardar proporción; y (c) reconoce las aristas de las caras del sólido, pero las relaciona con los lados de la vista que no corresponde en el sistema diédrico. El listado completo de dificultades y errores del tema se encuentra en el anexo 01. Para estos errores, el profesor puede proporcionar las siguientes ayudas en relación con la figura 20: (a) ¿cómo se puede relacionar las aristas de las caras del sólido con los lados de las vistas?; (b) ¿qué indican las líneas punteadas?; y (c) ¿cómo

se puede establecer que los polígonos de las vistas corresponden a los polígonos de las caras del sólido? Presentamos el listado completo de ayudas para esta tarea en el anexo 05.

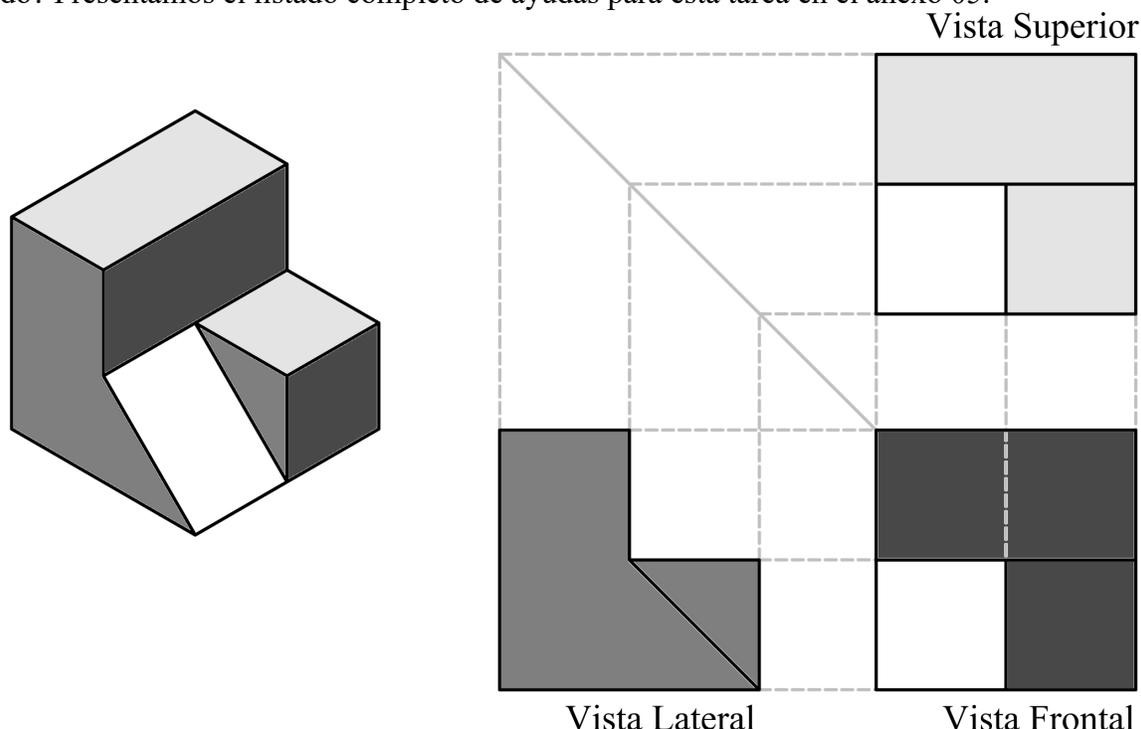


Figura 20. Representación diédrica de un sólido

Grafo de criterios de logro

En la figura 21, presentamos el grafo del segundo objetivo y, en él, resaltamos los procedimientos o estrategias de solución que corresponden a la tarea T2.2. Los estudiantes inician por establecer la información que proporciona la tarea. Luego, los estudiantes establecen las vistas de los sólidos (sistema de representación geométrico) como medio para verificar la representación diédrica de las dos piezas de ajedrez. Los estudiantes pueden optar por dos estrategias para resolver la tarea. La primera estrategia involucra verificar las vistas de las piezas del ajedrez mediante la comparación de medidas de las aristas. La segunda estrategia involucra la comparación de los polígonos. Por último, los estudiantes interpretan los resultados mediante la descripción, paso a paso, de los procedimientos con los que verificó las vistas. Presentamos estos criterios de logro de la tarea, con los errores asociados en los que pueden incurrir los estudiantes, en el anexo 03.

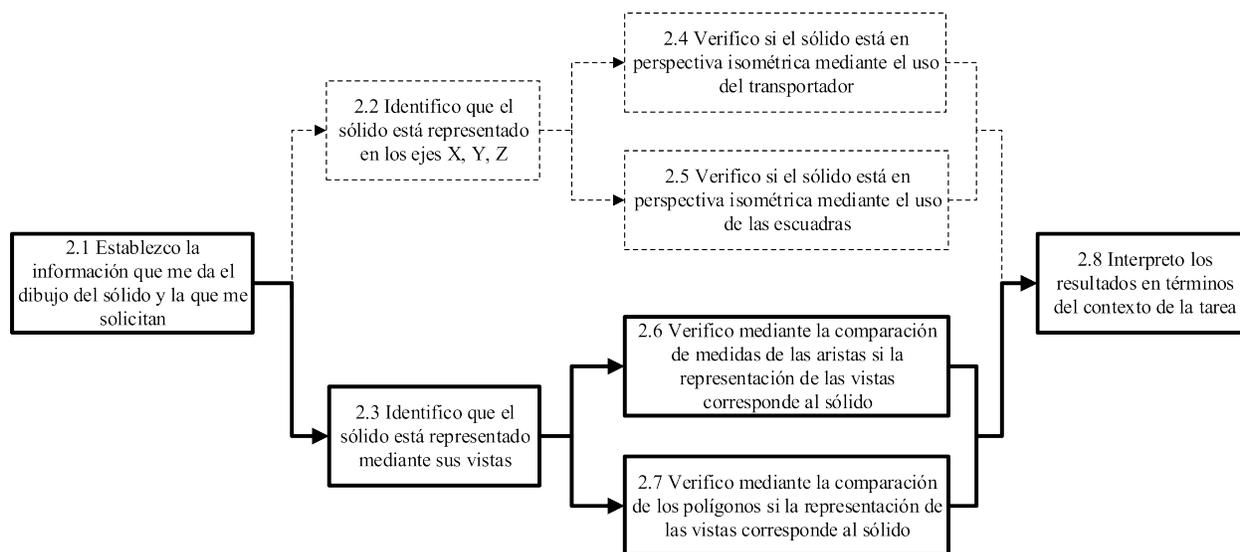


Figura 21. Grafo de criterios de logro de la tarea T2.2 Rompecabezas

Actuación del profesor

Sugerimos que el profesor inicie la clase con algunas preguntas para inducir a los estudiantes al desarrollo de la tarea. Por ejemplo, ¿cuáles fueron los acuerdos concertados sobre el desarrollo de la tarea T1.2 El dron? El profesor realizará las aclaraciones que soliciten los estudiantes sobre el sistema de representación geométrico, para tener claridad en los requerimientos de la tarea. El profesor debe solicitar a los estudiantes que muestren la verificación parcial de las vistas de las piezas del ajedrez para identificar si incurren en algún error. De esta manera, el profesor puede proporcionar las ayudas que se proponen en el anexo 05. El profesor está en libertad de considerar otras ayudas que surjan en situaciones particulares. Por último, el profesor actuará como mediador y moderador en la socialización de los trabajos por parte de los estudiantes.

Sugerencias metodológicas

El profesor debe comprobar que los estudiantes tienen claridad sobre el objetivo al que contribuye el desarrollo de la tarea. Sugerimos que el profesor verifique si los estudiantes tienen claridad sobre el desarrollo de planos para evitar que alteren el material manipulable antes de armarlo. De igual manera, el profesor puede comprobar que los estudiantes comprenden la instrucción de la tarea y reconocen los términos técnicos del tema mediante la observación de la clase y la solución de preguntas. Sugerimos no modificar el tamaño de la imagen de la formulación de la tarea para evitar incongruencias entre las caras de las piezas del ajedrez y las vistas correspondientes.

Evaluación

El profesor realizará una evaluación formativa durante el desarrollo de la clase. Para eso, él proporcionará las ayudas necesarias para que los estudiantes superen los errores en los que incurren en el proceso de verificación de las vistas de las piezas del ajedrez.

Se usa una hoja de Excel similar a la de la figura 14. En este caso, la hoja de Excel relacionará los errores asociados con la tarea T2.2. La relación de los errores con los niveles de desempeño se presenta de manera detallada en la tabla 9. Presentamos este formato que corresponde a la tarea en el anexo 06.

7. EXAMEN FINAL

El examen final tiene como propósito evaluar los aspectos clave de los dos objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica (Romero y Gómez, 2018, p. 296). Para ese propósito, proponemos una rúbrica para calificar ese examen.

7.1. Descripción del examen final

El examen final de nuestra unidad didáctica consta de cuatro tareas. Las dos primeras tareas están diseñadas para evaluar el primer objetivo y, las dos últimas, para evaluar el segundo objetivo. Con las tareas T1 El sofá y T2 La mesa auxiliar, pretendemos establecer en qué medida los estudiantes lograron adquirir las habilidades geométricas para construir las representaciones gráfica y geométrica de sólidos en perspectiva isométrica. Con las tareas T3 Los muebles del hogar y T4 Los camiones, pretendemos establecer en qué medida los estudiantes reconocen las características propias de la perspectiva isométrica para interpretar las representaciones gráfica y geométrica de un sólido. A continuación, presentamos la formulación del examen final.

Tarea T1 El sofá

Observa el dibujo del sofá y completa su representación a partir de las líneas punteadas (ver figura). Para esto, puedes hacer uso de instrumentos de dibujo.

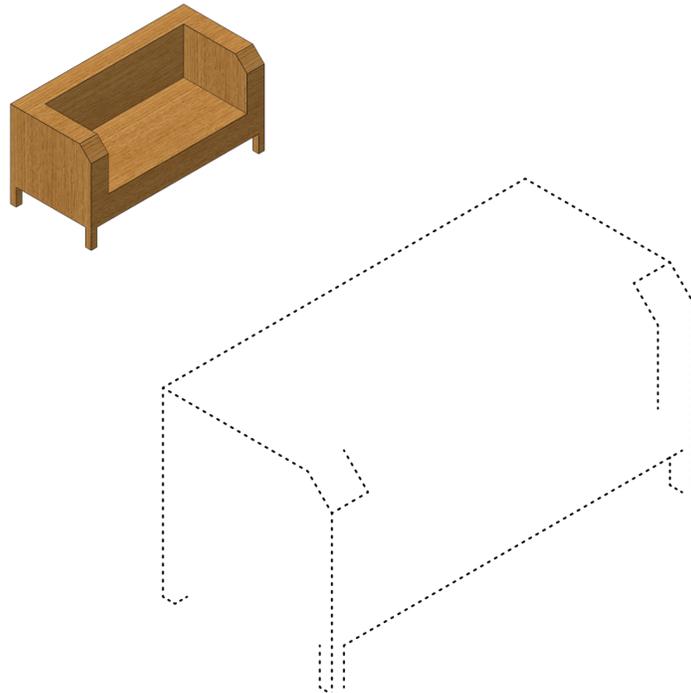


Figura. Tarea de evaluación T1 El sofá

Tarea T2 La mesa auxiliar

Observa la foto de la mesa auxiliar que se muestra en la parte superior izquierda. Luego, realiza la construcción de sus vistas mediante el uso de instrumentos de dibujo. Ten presente las dimensiones que se muestran en la foto (ver figura).

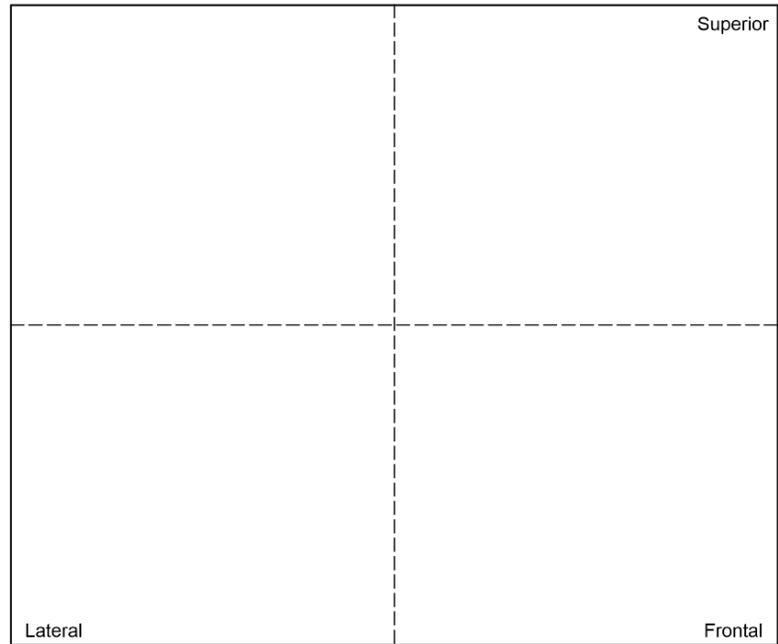
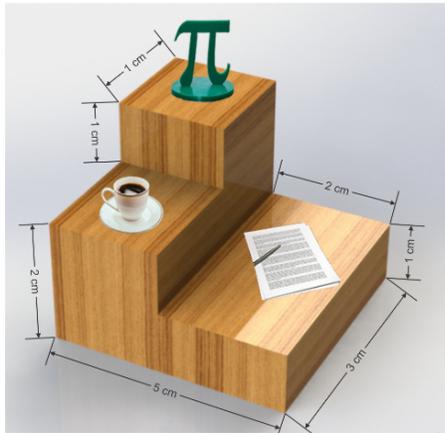


Figura. Tarea de evaluación T2 La mesa auxiliar

Tarea T3 Los muebles del hogar

Establece, mediante el uso de los instrumentos de dibujo, cuáles muebles del hogar están representados en perspectiva isométrica. Luego, recórtalos y pégalos en la tabla según corresponda (ver figura).

Muebles Isométricos	Muebles No Isométricos

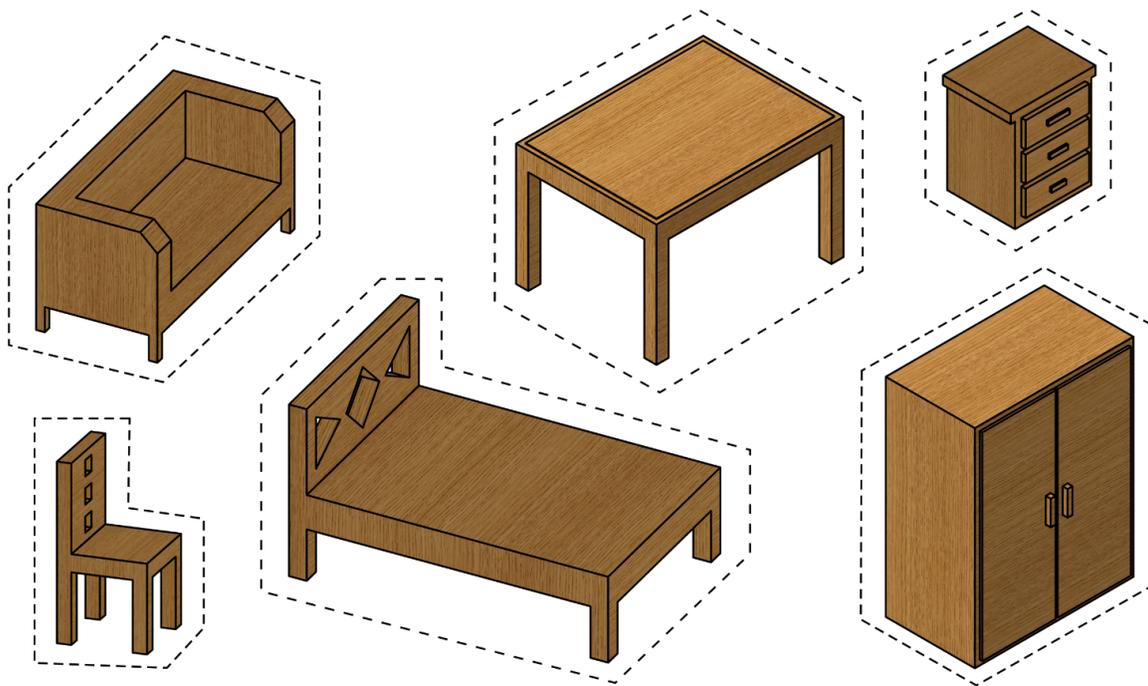
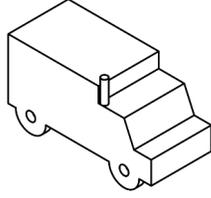
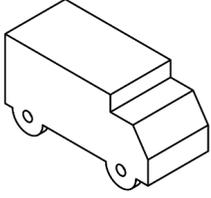
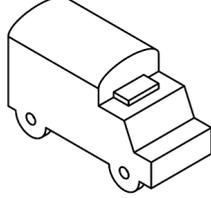


Figura. Tarea de evaluación T3 Los muebles del hogar

Tarea T4 Los camiones

Observa los tres camiones representados en perspectiva isométrica y las vistas que se encuentran en la parte inferior. Luego, relaciona debajo de cada camión la letra de la vista frontal, lateral y superior según corresponda (ver figura).

Camión #1			Camión #2			Camión #3		
								
Frontal	Lateral	Superior	Frontal	Lateral	Superior	Frontal	Lateral	Superior

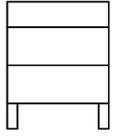
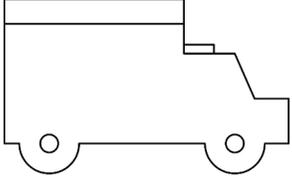
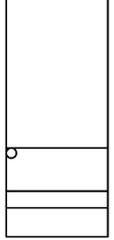
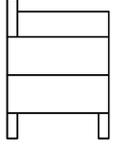
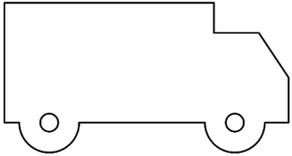
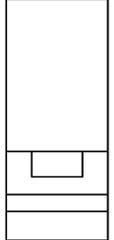
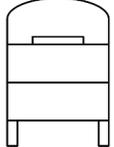
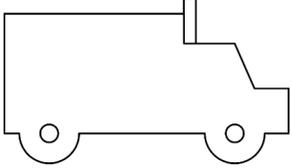
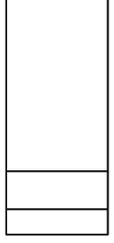
a 	b 	c 
d 	e 	f 
g 	h 	i 

Figura. Tarea de evaluación T4 Los camiones

En el anexo 07, presentamos un archivo con las tareas listas para implementar, bien sea de manera virtual o física.

7.2. Sugerencias metodológicas

Recomendamos al profesor implementar el examen final en una sesión de 110 minutos. Los estudiantes desarrollan de forma individual el examen. Una vez realizado y corregido el examen, recomendamos hacer una sesión de cierre de 50 minutos. Esta sesión tiene como fin la retroalimentación de los resultados obtenidos a partir de los errores en que incurrieron los estudiantes al desarrollar las tareas del examen. Para revisar esos resultados, proponemos una rúbrica de calificación del examen final. En las tablas 8 y 9, presentamos los indicadores relacionados con los niveles de logro, que permitirán al profesor valorar el grado en que los estudiantes han alcanzado los objetivos de la unidad didáctica. Adaptamos la rúbrica a la escala de valoración por niveles de desempeño (bajo, básico, alto y superior) que establece el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2009). A continuación, presentamos la rúbrica para valorar el grado en que un estudiante alcanza el primer objetivo (tabla 8).

Tabla 8

Niveles de logro e indicadores para el primer objetivo

Nivel de logro	Indicadores
Superior	El estudiante realiza una representación gráfica del sólido sin errores mediante la activación de los criterios de logro del primer objetivo.
	El estudiante realiza una representación geométrica del sólido sin errores mediante la activación de los criterios de logro del primer objetivo.
Alto	El estudiante realiza una representación gráfica del sólido. Sin embargo, el estudiante incurre en errores menores como la falta de verificación al terminar la representación gráfica del sólido (E44, E46, E48, E45, E47, E49) que no le impiden terminar la construcción.
	El estudiante realiza una representación geométrica del sólido. Sin embargo, el estudiante incurre en errores menores como la falta de verificación al terminar la representación geométrica del sólido (E50, E63, E52, E54, E56, E51, E53, E63, E55) que no le impiden terminar la construcción.

Tabla 8

Niveles de logro e indicadores para el primer objetivo

Nivel de logro	Indicadores
Básico	Si bien, el estudiante reconoce que la situación planteada en la tarea T1.1 se resuelve mediante la construcción de un sólido en perspectiva isométrica, incurre en errores como (a) trazar los ejes con características diferentes (E4); (b) trazar equivocadamente segmentos paralelos (E12, E18, E66, E67, E68, E69); o (c) modificar la medida de los segmentos de las aristas (E20, E21, E22, E23, E24, E25).
	Si bien, el estudiante reconoce que la situación planteada en la tarea T1.2 se resuelve mediante la construcción de las vistas del sólido, incurre en errores como (a) trazar equivocadamente segmentos perpendiculares (E19); (b) trazar equivocadamente segmentos paralelos (E65, E70, E71, E72, E73, E74); o (c) modificar la medida de los lados de las vistas (E26, E27, E28, E29, E30, E31).
Bajo	El estudiante confunde las caras del sólido y no logra construirlo porque (a) traza los ejes con ángulos de 90° entre ellos (E5, E6); (b) confunde las caras del sólido (E8, E9, E10); (c) marca vértices que no corresponden a las caras del sólido (E32, E33, E34, E35, E36 E37); o (d) resalta segmentos de la construcción que no corresponden al sólido (E57).
	El estudiante no logra construir la representación del sólido en el sistema diédrico porque (a) confunde las vistas del sólido (E8, E10); (b) marca vértices que no corresponden a los polígonos que componen las vistas (E38, E39 E40, E41 E42, E43); o (c) resalta segmentos de la construcción que no corresponden a la composición de las vistas del sólido (E75).

A continuación, presentamos la rúbrica para valorar el grado en que un estudiante alcanza el segundo objetivo (tabla 9).

Tabla 9

Niveles de logro e indicadores para el segundo objetivo

Nivel de logro	Indicadores
Superior	El estudiante interpreta la representación gráfica del sólido sin errores mediante la activación de los criterios de logro del segundo objetivo.
	El estudiante interpreta la representación geométrica del sólido sin errores mediante la activación de los criterios de logro del segundo objetivo.

Tabla 9

Niveles de logro e indicadores para el segundo objetivo

Nivel de logro	Indicadores
Alto	El estudiante interpreta la representación gráfica del sólido. Sin embargo, él incurre en errores menores como (a) confundir los vértices con las aristas del sólido al interpretar la representación gráfica del sólido (E77, E85,); o (b) nombrar de manera incorrecta los ejes (E81). No obstante, estos errores no le impiden terminar la tarea.
	El estudiante interpreta la representación geométrica del sólido. Sin embargo, él incurre en errores menores, como ubicar de manera equivocada las escuadras (E89), que no le impiden terminar con la tarea.
Básico	Si bien, el estudiante reconoce que la situación planteada en la tarea T2.1 se resuelve mediante la interpretación de un sólido en perspectiva isométrica, incurre en errores como (a) proyectar aristas que no corresponden (E80); o (b) proyectar las rectas de construcción sin superponerlas sobre las aristas del sólido (E87).
	Si bien el estudiante reconoce que la situación planteada en la tarea T2.2 se resuelve mediante la interpretación de las vistas del sólido, incurre en errores como (a) medir de manera parcial las aristas de las caras del sólido (E99); o (b) relacionar de manera parcial las aristas de los polígonos (E101, E103, E105).
Bajo	El estudiante no logra interpretar la representación gráfica del sólido porque incurre en errores como (a) usar incorrectamente el transportador (E82, E84); (b) tomar aristas diagonales como referencia (E86, E88); o (c) usar incorrectamente las escuadras (E90, E91, E92).
	El estudiante no logra interpretar la representación geométrica del sólido porque incurre en errores como (a) confundir las vistas del sólido (E8, E10, E9); o (b) proyectar los polígonos de las caras del sólido de manera incompleta (E100, E102, E104).

8. CONCLUSIONES

Esta unidad didáctica es el producto del análisis didáctico sobre el tema Perspectiva isométrica. Iniciamos con el análisis de contenido, relacionado con el proceso de enseñanza, por medio de tres aspectos: (a) la estructura conceptual, que nos ayudó a determinar los conceptos y procedimientos relacionados con el tema; (b) los sistemas de representación, que nos permitieron reconocer las diferentes representaciones del tema; y (c) la fenomenología, que nos ayudó a identificar los fenómenos que le dan sentido al tema.

Una vez realizado el análisis de contenido, nos enfocamos en el proceso de aprendizaje por medio del análisis cognitivo. Realizamos este análisis a partir de los siguientes aspectos: (a) los objetivos de aprendizaje; (b) las expectativas de tipo afectivo que abordan los aspectos relacionados con la motivación y las emociones; y (c) las limitaciones del aprendizaje relacionadas con las dificultades y los errores asociados al tema.

Con la información antes descrita, diseñamos una tarea diagnóstica, cuatro tareas de aprendizaje y el examen final. Diseñamos dos tareas de aprendizaje para contribuir al logro del primer objetivo. Esas tareas pretenden aportar a la construcción y argumentación de las representaciones gráfica y geométrica de los sólidos en perspectiva isométrica. Con ese fin, diseñamos la tarea T1.1 La silla para abordar la representación gráfica, y la tarea T1.2 El dron para abordar la representación geométrica. Luego, diseñamos dos tareas de aprendizaje para contribuir al logro del segundo objetivo. Esas tareas pretenden aportar a la interpretación de la representación de un sólido en perspectiva isométrica en diferentes contextos. Con ese fin, diseñamos la tarea T2.1 Las fichas del cubo soma para verificar la representación gráfica, y la tarea T2.2 Rompecabezas para verificar la representación geométrica.

Una vez diseñadas las tareas, implementamos la primera versión de nuestra unidad didáctica con estudiantes de grado sexto del colegio Friedrich Naumann, ubicado en la ciudad de Bogotá. Analizamos los resultados obtenidos y establecimos la pertinencia de las tareas propuestas para el alcance de los objetivos de la unidad didáctica. A partir de este análisis, ajustamos las tareas y, entre otros aspectos, las previsiones de temporalidad para producir un diseño final. Ese diseño final es el que ponemos a disposición de nuestros colegas docentes de Matemáticas en esta cartilla.

Consideramos que la unidad didáctica contribuye a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las representaciones bidimensionales de formas tridimensionales y a la superación de dificultades relacionadas con el tema Perspectiva isométrica. La enseñanza de este tema permite que los estudiantes sean capaces de construir e interpretar las representaciones de los sólidos de su entorno.

La unidad didáctica se puede potenciar mediante el trabajo interdisciplinar entre las áreas de Matemáticas y Tecnología. Consideramos que la unidad didáctica concreta las bases conceptuales y procedimentales de la perspectiva isométrica. Estas bases pueden ser aprovechadas por el área de Tecnología para abordar el diseño de sólidos mediante los sistemas de representación ejecutables.

Finalmente, es importante aclarar que se pensó la unidad didáctica para ser implementada en la virtualidad dadas las condiciones de restricción sanitaria, producto de la emergencia de la pandemia por Covid 19. Sin embargo, se puede implementar y evaluar en la presencialidad o en contextos de alternancia.

9. LISTADO DE ANEXOS

Presentamos el listado de documentos anexos² de la unidad didáctica Perspectiva isométrica.

² Los anexos se pueden descargar en este enlace: <http://funes.uniandes.edu.co/23704>

- ◆ Anexo 01. Dificultades y errores
- ◆ Anexo 02. Criterios de logro
- ◆ Anexo 03. Grafos de criterios de logro con errores asociados
- ◆ Anexo 04. Conocimientos previos
- ◆ Anexo 05. Ayudas
- ◆ Anexo 06. Planilla de evaluación
- ◆ Anexo 07. Tareas

10. REFERENCIAS

- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2009). *Decreto 1290. Por el cual se reglamenta la evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes de los niveles de educación básica y media*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Madrid: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Autor.
- Gómez, P. (Ed.). (2018). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- González, M. J. y Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gonzato, M. (2013). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de la visualización espacial*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada. España.
- Giesecke, F.; Mitchell, A.; Spencer, H.; Hill, I.; Dygdon, J.; Novak, J & Lockhart, S. (2006). *Dibujo y comunicación gráfica* 3a. ed. México: Pearson educación.
- Estrada, J., Llamas, A., Santana, H. & Santana, L. (2012). *Dibujo técnico I*. Culiacán, Sinaloa: Ediciones universidad Autónoma de Sinaloa.
- Romero, I., & Gómez, P. (2018). Análisis de actuación. En P. Gómez, M. María, & C. Velasco, *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 269-301). Ediciones Uniandes. Bogotá, Colombia.