ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 39-2 (2021), 123-142
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza*

Mathematical work of a teacher based on tasks and examples proposed for teaching

Carolina Henríquez Rivas
Facultad de Ciencias de la Educación,
Universidad de Talca, Talca, Chile
cahenriquez@utalca.cl

José Carrillo Yáñez, Nuria Climent
Departamento de Didácticas Integradas,
Universidad de Huelva, Huelva, España
carrillo@uhu.es, climent@uhu.es

Rodrigo Ponce
Instituto de Matemáticas,
Universidad de Talca, Talca, Chile
rponce@inst-mat.utalca.cl

Gonzalo Espinoza-Vásquez
Instituto de Matemáticas,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile
gonzalo.espinoza.v@gmail.com

RESUMEN • El uso de tareas y ejemplos constituye una práctica fundamental en el trabajo del profesor en el aula para la enseñanza de un contenido. El objetivo de este artículo es caracterizar el trabajo matemático que propone un profesor a partir de las tareas y ejemplos que considera para la enseñanza de un teorema geométrico. Para ello, se analiza el espacio de trabajo matemático idóneo de un profesor de secundaria que participa en un taller formativo. Se presenta un estudio de caso basado en un diseño de caso único, a través de videograbaciones y observaciones. Los resultados revelan el privilegio de tratamientos algebraicos a partir de representaciones figurales y un cambio propuesto que involucra el uso de herramientas tecnológicas. Finalmente, se discute sobre aportes al estudio del trabajo matemático del profesor en el aula centrado en el uso de tareas y ejemplos.

PALABRAS CLAVE: Espacio de trabajo matemático idóneo; Profesor; Teorema de Tales; Tareas; Ejemplos.

ABSTRACT • The use of tasks and examples is a fundamental practice in the teacher's work in the classroom when it comes to teaching a content. The objective of this article is to characterize the mathematical work that a teacher proposes from the tasks and examples that he or she considers for the teaching of a geometric theorem. For this purpose, the suitable mathematical workspace of a secondary school teacher participating in a training workshop is analyzed. A case study is presented based on a unique case design, through video recordings and observations. The results reveal the privilege of algebraic treatments based on figurative representations, and a proposed change that involves the use of technological tools. Finally, contributions to the study of the teacher's mathematical work in the classroom focused on the use of tasks and examples are discussed.

KEYWORDS: Suitable mathematical workspace; Teacher; Theorem of Thales; Tasks; Examples.

* Dedicamos este artículo, con admiración y agradecimiento, a la memoria de nuestro colega y amigo Prof. Dr. José Carrillo, fallecido poco antes de la publicación de este trabajo.

Recepción: diciembre 2019 • Aceptación: diciembre 2020 • Publicación: junio 2021

Henríquez Rivas, C., Ponce, R., Carrillo Yáñez, J., Climent, N. y Espinoza-Vásquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(2), 123-142.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la actividad matemática del profesor en el aula ha cobrado relevancia en los últimos años (Espinoza-Vásquez, Zakaryan y Carrillo Yáñez, 2018; Zakaryan, Estrella, Espinoza-Vásquez, Morales, Olfos, Flores-Medrano y Carrillo, 2018). Al respecto, Badillo, Figueiras, Font y Martínez (2013) destacan la necesidad de una agenda de investigación que vincule el estudio de la práctica de aula con modelos teóricos. Para estudiar el trabajo matemático del profesor en el aula, se han realizado análisis de tareas o ejemplos que el profesor propone con sustento en diversas perspectivas teóricas (Henríquez-Rivas y Montoya Delgadillo, 2015; Zodik y Zaslavsky, 2008).

Watson y Thompson (2015) plantean diversas acciones que pueden ser favorecidas por una tarea (construcción de conceptos, pruebas y aplicaciones, entre otras) y establecen una distinción entre el trabajo matemático previsto y el implementado en relación con el diseño de tareas. En esta investigación reconocemos dicha diferenciación y apoyamos la idea de que el estudio del trabajo matemático que promueven beneficia y clarifica las posibilidades de su uso por parte de los profesores en el aula.

Aunque no existe consenso sobre la definición de tarea (Watson y Mason, 2007), sí existe respecto a su importancia y diseño apropiado (Margolinas, 2013). Así, Becker y Shimada (1997) denominan *tarea* a los materiales o entornos diseñados para promover una actividad matemática compleja. En la perspectiva de la teoría antropológica de lo didáctico, Chevallard (1999) reconoce las tareas como construcciones institucionales, cuya reconstrucción en una praxeología matemática es el propio objeto de la didáctica. Otros autores definen tarea como lo que se les pide a los estudiantes que hagan (Christiansen y Walter, 1986; Mason y Johnston-Wilder, 2006).

Por otro lado, los ejemplos han desempeñado un rol fundamental tanto en la matemática como en su enseñanza y aprendizaje, y su uso constituye una práctica bien establecida en las aulas. En la literatura de investigación en educación matemática el propio concepto de ejemplo no tiene una definición precisa, pero existe acuerdo sobre su rol fundamental en el aprendizaje de conceptos, teoremas y técnicas (entre otros), y sobre la importancia que tiene su elección para la enseñanza de un tema o concepto matemático particular (Watson y Mason, 2005). Si bien dicha elección puede ser planificada o espontánea, diversas investigaciones han mostrado las dificultades que conlleva (Zodik y Zaslavsky, 2008).

A partir de lo anterior y dada la relevancia del uso de tareas y ejemplos que los profesores proponen en el aula, nos hemos trazado como objetivo de investigación caracterizar el trabajo matemático que propone un profesor a partir de las tareas y ejemplos que considera para la enseñanza de un teorema geométrico. Esta caracterización se realiza sobre la base de una experiencia formativa que involucra el estudio del teorema de Tales. Los resultados nos permiten discutir sobre aportes al estudio del trabajo matemático del profesor en el aula centrado en el uso de tareas y ejemplos asociados a un contenido matemático. Para ello, consideramos la perspectiva del *Espacio De Trabajo Matemático* (Kuzniak, 2011), que ha sido empleado para analizar el trabajo del profesor en el aula (Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016; Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016), particularmente, en geometría (Kuzniak, 2018).

MARCO TEÓRICO

Espacios de trabajo matemático

En esta investigación, para analizar el trabajo matemático del profesor se utiliza el marco del *Espacio De Trabajo Matemático* (ETM) (Kuzniak, 2011), concebido como un modelo que contribuye a la comprensión del trabajo de personas (profesor, estudiante o un matemático) que resuelven tareas matemáticas y permite caracterizar los caminos que emergen en su resolución (Kuzniak et al., 2016; Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo, 2015).

La investigación en ETM considera los principios epistemológicos de los objetos que se estudian dentro de un dominio matemático (como la geometría, el análisis o la probabilidad) (Kuzniak, 2011; Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016). En este marco se diferencian dos tipos de elementos (representados por los planos epistemológico y cognitivo, en la figura 1), que pretenden captar los contenidos matemáticos del dominio estudiado y la actividad cognitiva del individuo cuando adquiere, desarrolla o utiliza esos contenidos matemáticos (Kuzniak, 2011).

El plano epistemológico lo conforman tres componentes: *representamen*, *artefactos* y *referencial*. El plano cognitivo está constituido por los componentes: *visualización*, *construcción* y *prueba*. La articulación entre estos planos se realiza mediante las *génesis semiótica*, *instrumental* y *discursiva*, que permiten coordinar y explicitar la naturaleza del trabajo matemático en diversos contextos educativos e institucionales (Kuzniak, 2011). La relación entre los planos, componentes y génesis se ilustra en el diagrama (figura 1).

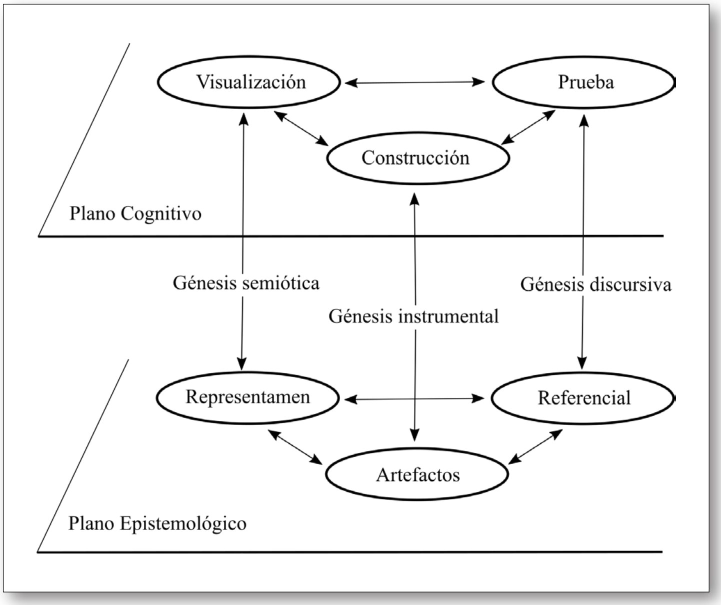

Fig. 1. Diagrama del ETM (Kuzniak, 2011).

La *génesis semiótica* está asociada con los registros de representación semiótica, los que permiten las actividades cognitivas de identificación y tratamientos de representaciones en un registro semiótico determinado, junto a la conversión de representaciones entre distintos registros (Duval, 1995). Esta génesis relaciona los componentes representamen y visualización. El representamen se refiere a los objetos matemáticos concretos y tangibles, en función de las interpretaciones y relaciones construidas por el individuo, según el proceso de visualización (Kuzniak et al., 2016). Así, la génesis semiótica representa la relación entre el objeto matemático y el proceso cognitivo para dotarlo de significado.

En el proceso de visualización en geometría consideramos dos niveles de identificación visual de objetos: visualización icónica y visualización no-icónica (Duval, 2005). La visualización icónica comprende tanto procesos de reconocimiento como de comparación entre la forma tipo de figuras. La visualización no-icónica involucra la descomposición de una figura inicial en unidades figurales, mediante la introducción de trazos suplementarios, para construir una figura o por la elección de trazos reorganizadores para resolver un problema (Duval, 2016).

En la *génesis instrumental* se hacen operativos los artefactos, a través de la construcción realizada por un individuo. En cuanto a los artefactos, nos basamos en la perspectiva de Rabardel (1995), quien distingue artefactos que pueden ser de tipo material o un sistema simbólico, empleado como un instrumento para la acción. Desde nuestro posicionamiento, los artefactos de tipo material corresponden a herramientas para dibujo, construcción o medición. A su vez, los sistemas simbólicos pueden ser de naturaleza semiótica, cuando son empleados sobre la base de la representación semiótica de un objeto (como un trazo suplementario o reorganizador en una construcción), y los algoritmos basados en técnicas de cálculo (como la división euclidiana). De esta manera, la construcción se basa en las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas (Kuzniak et al., 2016).

La *génesis discursiva* relaciona los componentes referencial y prueba. El referencial se refiere a la parte teórica del trabajo matemático, basado en definiciones, propiedades y teoremas. Kuzniak et al. (2016) plantean el proceso de prueba como todo razonamiento discursivo que permite formular argumentaciones organizadas deductivamente, definiciones, hipótesis y conjeturas, y enunciar contraejemplos, con apoyo del referencial. En nuestro trabajo, consideramos la concepción de Balacheff (1987), quien distingue dos tipos de prueba que se diferencian por el estatus de los conocimientos puestos en juego y la naturaleza de la justificación subyacente: las pruebas pragmáticas, aquellas que recurren a la acción o la ostensión; y las pruebas intelectuales, separadas de la acción, que se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones (Balacheff, 2000).

En una tarea determinada, estas tres génesis (y las relaciones entre los componentes de los planos) pueden interactuar para dar significado al trabajo matemático del individuo. De este modo, la investigación en ETM se basa en comprender la dinámica del trabajo matemático mediante el papel de cada una de estas génesis y sus interacciones (Kuzniak, 2018). En los análisis en ETM, la interacción entre las génesis, que especifica los componentes puestos en juego por el individuo que resuelve una tarea, se denomina *circulación* en el espacio de trabajo (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2014). En los análisis de las circulaciones es posible identificar cambios entre dos dominios matemáticos diferentes, lo que se denomina *cambio de dominio* y se basa en el trabajo en un dominio inicial y otro de llegada (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2014).

Las interacciones entre dos génesis y sus componentes implicadas se representan por *planos verticales* (Kuzniak y Richard, 2014). El uso de estos planos verticales ayuda a especificar las circulaciones del trabajo matemático. Los autores identifican tres planos verticales, que generan distintos tipos de interacciones: *plano semiótico-instrumental* (*Sem-Ins*), cuando se usan los artefactos en la construcción de resultados bajo ciertas condiciones o en la exploración de representaciones semióticas; *plano instrumental-discursivo* (*Ins-Dis*), cuando la prueba se basa en una experimentación y emplea un artefacto, o bien se valida una construcción, y *plano semiótico-discursivo* (*Sem-Dis*), cuando se ponen en coordinación el proceso de visualización de objetos representados con un razonamiento para probar (Kuzniak et al., 2016). Estos tres planos verticales se representan en la figura 2.

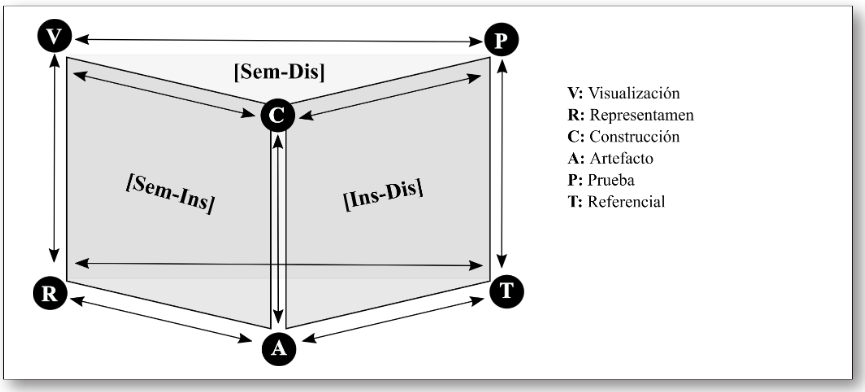

Fig. 2. Diagrama de los planos verticales en el ETM (Kuzniak et al., 2016).

En esta investigación analizamos el *ETM* idóneo de un profesor, entendido como el modo en que un contenido matemático desarrollado por un profesor se diseña, adapta y propone para la enseñanza en un lugar y contexto determinados (Kuzniak et al., 2016; Flores-González y Montoya-Delgadillo, 2016). El ETM idóneo puede ser modificado de acuerdo con las condiciones de la clase (Morales, 2018). El trabajo desarrollado alrededor de la elección de tareas propuestas por el profesor supone que se ha organizado un ETM idóneo, para permitir que los estudiantes se dediquen a su desarrollo (Kuzniak, 2011). En esta investigación, caracterizamos el ETM idóneo del profesor a través del trabajo organizado para el aula y en esta. Es por esto por lo que nuestro objetivo de investigación puede formularse en términos del ETM idóneo del profesor: caracterizar el ETM idóneo propuesto por un profesor a partir de las tareas y ejemplos que considera para la enseñanza de un teorema geométrico.

La noción de *tarea* ya ha sido empleada en investigaciones en ETM, y si bien no se trata de una componente explícita del modelo, la entendemos como la activadora del espacio de trabajo del individuo (Kuzniak, 2011) en una institución específica. Kuzniak et al. (2016) utilizan una forma amplia y abierta para referirse a la tarea, relativa a cualquier tipo de problema matemático, con suposiciones y preguntas claramente formuladas, para resolver en un tiempo predecible. Desde nuestra perspectiva, al referirnos a una tarea aludimos a una experiencia matemática planificada para los estudiantes, que puede ser una acción o una secuencia de acciones. Por lo tanto, el propósito de la tarea es promover la acción matemática, que podría consistir desde acciones básicas (resolver un problema o una prueba) hasta una compleja exploración interdisciplinar (Watson y Thompson, 2015).

Con respecto al *ejemplo*, diversas investigaciones han mostrado que su uso o *ejemplificación* por parte de los profesores no es arbitrario, requiere planificación y los enfrenta a diversas dificultades, pues no existe un método estructurado para su elección (Huntley, 2013; Zodik y Zaslavsky, 2008).

En esta investigación consideramos el ejemplo como aquello que representa cualquier cosa que le permita al estudiante generalizar (Watson y Mason, 2005). Así, se usan para ilustrar conceptos, para motivar el uso de la matemática en situaciones contextualizadas, casos particulares de definiciones o teoremas, preguntas trabajadas en los libros de texto o por los profesores como medio para demostrar el uso de técnicas específicas, preguntas que deben ser trabajadas por los estudiantes para aprender a usar, aplicar y ganar fluidez en ciertas técnicas concretas. En nuestro caso nos interesan los *ejemplos instructivos* (Zaslavsky, 2010), que corresponden a los que utiliza el profesor para el estudio de un tema matemático particular.

METODOLOGÍA

Con el propósito de caracterizar el ETM idóneo que propone un profesor a partir de tareas y ejemplos para la enseñanza del teorema de Tales, se ha realizado un estudio de caso basado en un diseño de caso único (Yin, 2009), que considera como unidad de análisis el trabajo matemático que propone un profesor de secundaria en el contexto de una experiencia formativa. El estudio de caso es apropiado para esta investigación debido a que los eventos se desarrollan en contextos escolares naturales, y pretende aportar una descripción profunda del trabajo matemático de un profesor. Asimismo, la justificación del diseño de caso único se basa en que se trata de un caso *representativo* (Yin, 2009), acerca de la enseñanza de un teorema típicamente estudiado en educación secundaria.

El equipo de investigadores, conformado por cuatro didactas de la matemática y un matemático (todos con formación pedagógica), ha diseñado e implementado un taller formativo dirigido a trece profesores de matemáticas de un liceo público, cuya finalidad es que los participantes planteen mejoras en torno a tareas y ejemplos para el aula, en relación con un contenido geométrico seleccionado. La participación de los docentes en el taller fue voluntaria.

El taller contempla tres momentos e involucra sesiones en la universidad y en el liceo y el trabajo en el aula de los docentes, de los cuales destacamos:

Primer momento: presentación de tareas y ejemplos. Se realizó en dos sesiones (sin estudiantes) una simulación de su práctica de aula. Los profesores, en grupos, seleccionaron un tema geométrico y describieron algunas tareas y ejemplos instructivos que fueron presentados a los profesores e investigadores.

Segundo momento: discusión y planificación para el aula. Se realizó en dos sesiones (sin estudiantes). Los profesores adaptaron las tareas y ejemplos presentados en la simulación, considerando elementos del ETM (uso de artefactos y objetos matemáticos involucrados, entre otros) que fueron discutidos conjuntamente para implementar en el aula.

Tercer momento: implementación en el aula. Los profesores seleccionaron un representante por grupo, que implementó en un aula las tareas y ejemplos adaptados.

En el proceso (iterativo) que propone Yin (2009), el taller desempeñó un papel crucial en relación con el diseño y la preparación, y fue un contexto relevante de recolección de evidencias, además de ser un entorno formativo. Para efectos de los análisis que mostramos en este trabajo consideramos los momentos 1 y 3.

Selección del caso

Para la selección del caso (lo llamaremos P1), nos basamos en que es un caso representativo y revelador con respecto a la enseñanza del contenido matemático seleccionado (Yin, 2009). P1 es el representante de un grupo que seleccionó como tema el teorema de Tales, que se ubica en el eje de geometría de Primero Medio (14 años) según el currículo chileno (Mineduc, 2015).

P1 se manifiesta cercano a la enseñanza expositiva, tradicional y se muestra durante el taller dispuesto a colaborar, manifestar opiniones y escuchar a otros. El grupo de P1 decide incorporar nuevos elementos para el momento 3 y considera el uso de GeoGebra. Estos aspectos, especialmente la representatividad acerca de la enseñanza de un contenido, disponibilidad, compromiso y expresividad, apoyan la elección de P1.

Recolección y análisis de datos

Para la recolección de datos en los momentos 1 y 3, se consideran videograbaciones y transcripciones, observación participante en el momento 1 y no participante en el 3.

En relación con las estrategias de triangulación, habituales en el estudio de caso (Denzin, 1978), se usa la triangulación de datos, en coherencia con las actividades desarrolladas según cada momento, y se consideran criterios de pertinencia y relevancia. Con respecto a la triangulación del investigador, se considera la participación en el análisis de un equipo conformado por un matemático e investigadores en didáctica de la matemática con diversa formación y experiencia.

Para caracterizar el ETM idóneo de P1, analizamos en dos etapas el desarrollo de las tareas y ejemplos en los momentos 1 y 3:

Etapa 1: identificación de episodios de la sesión, tareas y uso de ejemplos para la enseñanza y descripción del trabajo propuesto (momento 1) y ajustado (momento 3), a través de las principales acciones realizadas. Para ello, se elaboró la tabla 1, que ayudó a efectuar los análisis en la etapa siguiente.

Tabla 1.
Identificación de objetivo, episodios, tareas y ejemplificaciones

Objetivo declarado		
Episodio	Tarea (t)	Ejemplificación (e)

Etapa 2: análisis de la circulación en el ETM idóneo de P1 realizado sobre la base de la información de la etapa 1. Para estos análisis se utilizó un protocolo con descriptores relacionados con criterios que se refieren a las génesis y sus componentes respectivas (tabla 2). Luego, la información obtenida permitió reconocer los planos verticales activados en el trabajo de P1.

Tabla 2.
Protocolo para el análisis de la circulación en el ETM

Criterio	*Componentes*	*Descriptor*
Génesis semiótica	Representamen	Relaciona objetos matemáticos y sus elementos significantes.
	Visualización	Interpreta y relaciona los objetos matemáticos según actividades cognitivas ligadas con los registros de representaciones semióticas (identificación, tratamientos, conversiones).
		El proceso de visualización considera dos niveles de identificación visual de objetos (visualización icónica, visualización no-icónica).
Génesis instrumental	Artefacto	Utiliza artefactos de tipo material o un sistema simbólico.
	Construcción	Se basa en las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas.
Génesis discursiva	Referencial	Utiliza definiciones, propiedades o teoremas.
	Prueba	El razonamiento discursivo se basa en una prueba (pragmática, intelectual).

RESULTADOS

Los resultados que presentamos a continuación describen la identificación de episodios, tareas y ejemplos, y la caracterización del ETM idóneo de P1 en los momentos 1 y 3.

Momento 1

Para caracterizar el ETM idóneo de P1 en la sesión de simulación de una clase, se consideran las dos etapas descritas en la sección metodológica. Los datos utilizados provienen de videograbaciones, transcripciones (los fragmentos literales, indicados entre comillas) y observación participante. En la tabla 3 se identifican las tareas y ejemplificación según cada episodio.

Tabla 3.
Tareas y ejemplificación según episodios

Objetivo declarado por P1: Demostrar el teorema de Tales		
Episodio	*Tarea (t)*	*Ejemplificación (e)*
1. Realiza tratamientos algebraicos a partir de la semejanza de triángulos.	t_1: Establecer relaciones proporcionales a partir de la igualdad entre razones de segmentos.	e_1: Representación de una figura para ilustrar la semejanza de dos triángulos.
2. Establece relaciones proporcionales entre triángulos semejantes.	t_2: Probar el teorema de Tales a partir de relaciones proporcionales.	e_2: Representación de una figura para ilustrar el teorema.

Descripción del trabajo propuesto en el episodio 1. Al iniciar la descripción de la simulación de la práctica en el aula, P1 realiza el siguiente comentario: «[...] cuando empiezo una unidad siempre hay que partir por la demostración, entonces, parto por la demostración del teorema de Tales».

P1 inicia t_1 con el ejemplo (a mano alzada) de un triángulo, enuncia una hipótesis sobre paralelismo y, a partir de ello, deduce la semejanza de dos triángulos y establece relaciones entre los segmentos según las medidas de los lados de ambos triángulos expresadas por la igualdad entre dos razones de segmentos (en la figura 3, si $\overline{BE} \;//\; \overline{CD}$, entonces $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$). Luego, realiza operaciones algebraicas con las medidas de los segmentos de la figura y, finalmente, obtiene una relación errónea de proporcionalidad entre los segmentos determinados por las rectas paralelas (en la figura 3, en lugar de escribir $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AE}}$, escribe $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AE}}$). P1 realiza estos tratamientos de las fracciones como números racionales sin volver a la figura inicial (e_1).

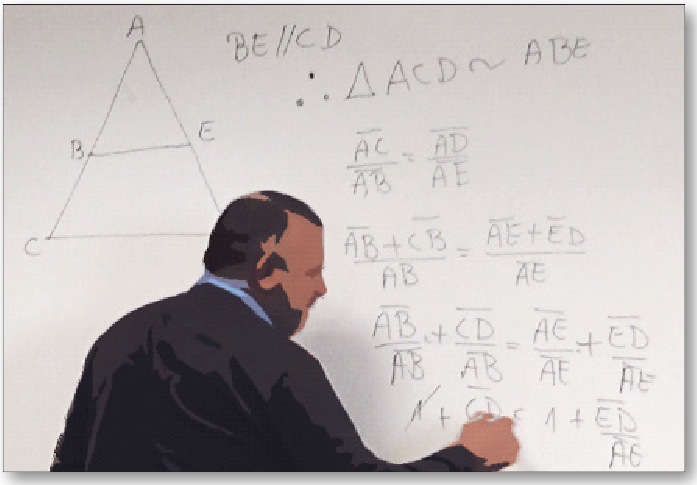

Fig. 3. Trabajo de P1 en el episodio 1.

Descripción del trabajo propuesto en el episodio 2. En t_2, P1 inicia el trabajo con el ejemplo de una figura a mano alzada (figura 4), explicitando la hipótesis (que llama propiedad): «tenemos A, B, C, D, E, F donde L1 tiene que cumplir con la propiedad que L1 sea paralelo a L2 y paralelo a L3». Continúa añadiendo un trazo suplementario en la figura (la recta que pasa por A, P y F): «Si yo tiro una diagonal, de A a F», y utiliza la relación del episodio anterior en el triángulo ACF. Luego, esto se repite en el triángulo FAD, y usa la propiedad transitiva de números reales para concluir la prueba (en la figura 4, de $\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PF}}$ concluye que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$). Al concluir P1 comenta: «Yo quise hacer lo que hago común y corriente, no me quise salir de los cánones y tratar de hacer algo más allá de lo normal».

Finalmente, P1 señala que propone tareas, que no fueron presentadas, para que los estudiantes usen el teorema como una fórmula.

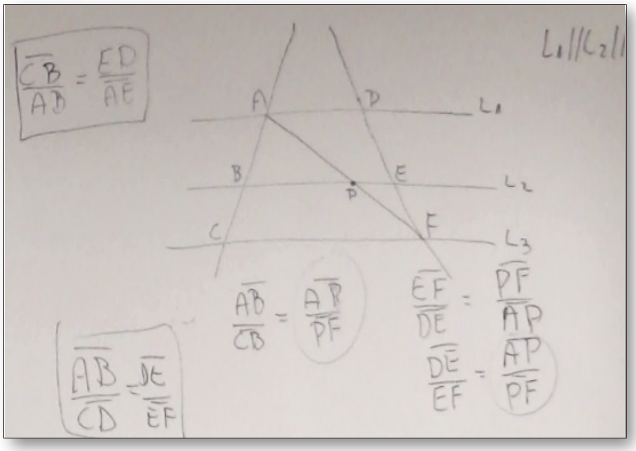

Fig. 4. Trabajo de P1 en el episodio 2.

Circulación en el ETM idóneo de P1 en el episodio 1. El trabajo propuesto por P1 es activado por la génesis semiótica. El representamen está dado por la representación inicial de los triángulos semejantes usados como ejemplo para ilustrar (figura 3). El trabajo semiótico implica una conversión del registro figural al registro algebraico, y el proceso de visualización involucra la descomposición de la figura inicial para establecer las relaciones de proporcionalidad de dichos triángulos (a partir de la figura 3, escribe si $\overline{BE} \;//\; \overline{CD}$, entonces $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$). Se trata del nivel de visualización no-icónica, pues consiste en diferenciar distintos elementos de la figura (esto es, la descomposición de una figura inicial en unidades figurales). Luego, la coordinación de la representación figural con el registro algebraico le permite realizar el tratamiento que sigue (en la figura 3, escribe $\frac{\overline{AB}+\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}+\overline{ED}}{\overline{AE}}$, y las operaciones algebraicas que luego desarrolla).

Asimismo, el trabajo de P1 activa la génesis discursiva, que involucra el referencial (de manera implícita), pues recurre a las definiciones de paralelismo, semejanza de triángulos, segmento y operación de suma de segmentos, y el uso de propiedades de los números reales, para realizar una prueba intelectual con el propósito de establecer una igualdad entre relaciones proporcionales. De esta manera, el plano vertical activado es [Sem-Dis].

Cabe señalar que el error (en una relación de proporcionalidad) cometido al final del trabajo (figura 3) muestra que aborda las operaciones como si se tratara de números racionales sin relacionarlos con la figura inicial, lo que evidencia un cambio de dominio, de geométrico al algebraico.

Circulación en el ETM idóneo de P1 en el episodio 2. P1 activa el trabajo en la génesis semiótica. El representamen está dado por la representación figural inicial para ilustrar el teorema de Tales. El proceso de visualización es del nivel de visualización no-icónica, ya que involucra añadir un trazo suplementario a la figura inicial (la recta que pasa por A, P y F en la figura 4). El trazo suplementario es utilizado como un artefacto simbólico en la construcción de la nueva configuración geométrica (figura 4). Así, en esta fase se activa el plano vertical [Sem-Ins], al entrar en juego de manera relacionada las génesis semiótica (añadir el trazo suplementario) e instrumental (usar el trazo para construir una nueva configuración).

Luego, mediante la visualización no-icónica, se descompone la figura para establecer las relaciones proporcionales entre los triángulos semejantes (figura 4). Esta parte del trabajo implica la conversión entre registro figural y registro algebraico (de modo similar a lo explicado en el episodio 1), y se ponen en coordinación la génesis semiótica con la discursiva en el proceso de prueba. En el referencial se utiliza la definición de semejanza, la relación obtenida del episodio 1 y la propiedad de transitividad de los números reales. La prueba intelectual que exhibe se basa en el referencial y sigue un razonamiento lógico-deductivo. En esta fase del trabajo se activa el plano [Sem-Dis].

Momento 3

Para caracterizar el ETM idóneo de P1 en la implementación en el aula, se consideran las dos etapas descritas en la sección metodológica. Los datos utilizados provienen de videograbaciones, transcripciones (los fragmentos literales, indicados entre comillas) y observación no participante. Esta sesión consta de tres episodios (tabla 4), los análisis que se presentan consideran los episodios 1 y 2.

Tabla 4.
Tareas y ejemplificación según episodios

Objetivo declarado por P1: Comprender y resolver ejercicios del teorema de Tales		
Episodio	*Tarea (t)*	*Ejemplificación (e)*
1. Usa GeoGebra y calculadora.	t_1: Comparar el valor de la razón de medidas de segmentos entre rectas paralelas y no paralelas con calculadora.	e_1: Representación figural de casos particulares con GeoGebra para verificar la validez del teorema.
2. Realiza tratamientos algebraicos a partir de la semejanza de triángulos.	t_2: Establecer relaciones proporcionales a partir de la igualdad entre razones de segmentos.	e_2: Representación de una figura para ilustrar la semejanza de dos triángulos.
3. Realiza ejercitación sobre la aplicación del teorema de Tales.	t_3: Calcular la medida desconocida de un segmento entre rectas paralelas cortadas por dos rectas secantes.	e_3: Representaciones figurales y preguntas para aplicar y ganar fluidez en el uso del teorema.

Descripción del trabajo propuesto en el episodio 1. P1 inicia el trabajo con una figura proyectada en el pizarrón que trae previamente construida en GeoGebra (en la figura 5, tres rectas paralelas cortadas por dos rectas secantes). Cada segmento aparece con su respectiva medida al usar la herramienta de medición aproximada a valores con dos decimales. Luego, P1 señala que estudiarán el teorema de Tales y añade: «Primero lo vamos a ver de forma empírica y después lo vamos a ver a través de una demostración».

P1 recuerda que ya han estudiado la semejanza de triángulos y que harán algo similar en la presente sesión, para lo que recuerda la condición de paralelismo entre lados homólogos de dos triángulos semejantes. Luego, propone a los estudiantes que, con base en las medidas de los segmentos proporcionales de la figura proyectada, obtengan el valor de dos razones (en la figura 5, calculan $\frac{2{,}03}{3{,}09}$ y $\frac{2{,}04}{3{,}11}$). Para calcular, los estudiantes utilizan la calculadora de sus teléfonos móviles. P1 pide comparar los valores de cada razón, lo que acompaña diciendo: «¿Me podrían dar el valor de esta fracción?» (los estudiantes dicen 0,657 y 0,656).

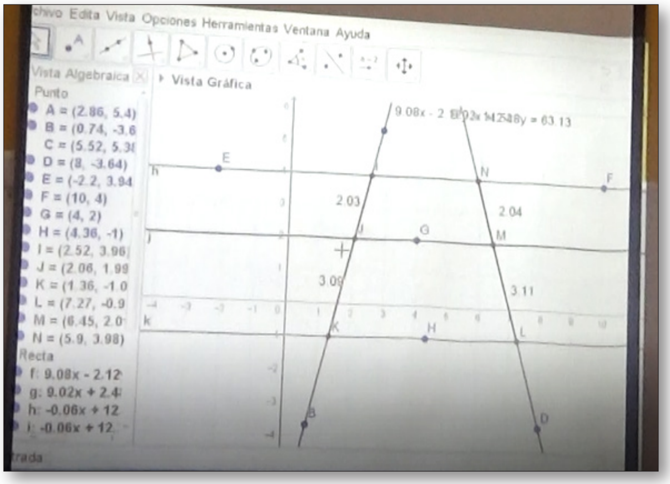

Fig. 5. Trabajo inicial de P1 en el episodio 1.

P1 plantea una nueva situación y pregunta a los estudiantes qué pasaría si desplazara una de las rectas paralelas (manteniendo su dirección), realiza el movimiento de una de las rectas paralelas y propone nuevamente realizar el cálculo con calculadora, y les pregunta: «¿Qué me da la primera fracción?». Los números obtenidos en estos casos son de expresión decimal infinito, lo que no estaba previsto en su trabajo. Aquí los cálculos son dejados inconclusos, pues en una de las razones obtiene $\frac{2.7}{2.41} = 1.12033...$, mientras que en la otra $\frac{2.72}{2.43}$ no escribe su expresión decimal (1.11934...). Un estudiante señala que los valores obtenidos no son iguales y P1 menciona que esto se debe a un error de GeoGebra, pues proporciona las medidas con dos decimales.

En una nueva situación, P1 pregunta qué sucederá si las rectas no son paralelas y utiliza el software para intentar mover una de estas (modificando su dirección), pero no lo consigue, pues la construcción (preestablecida) no se lo permite. P1 dibuja a mano alzada una recta no paralela y asigna medidas de manera arbitraria (como se ve en la figura 6). Posteriormente, hacen los cálculos y comprueban que no se verifica la igualdad de razones entre las medidas de los segmentos que se determinan. Finalmente, P1 concluye junto con los estudiantes que para que se verifique el teorema las rectas deben ser paralelas.

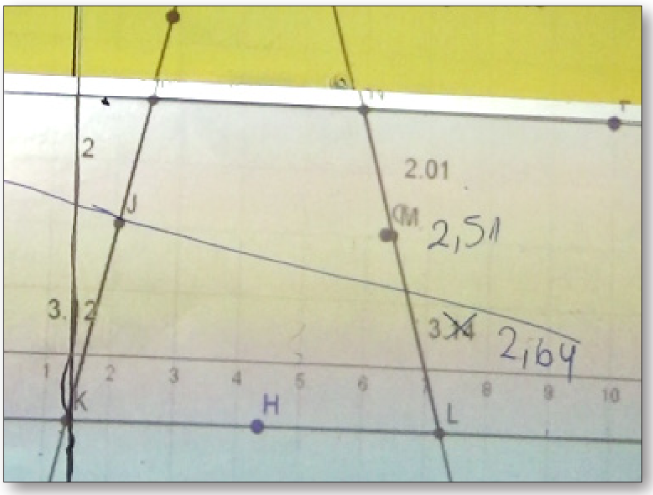

Fig. 6. Imagen de recta dibujada a mano alzada sobre la proyección.

Descripción del trabajo propuesto en el episodio 2. P1 indica que es el momento de hacer la demostración: «Yo tengo claro que a muchos no les gusta la demostración, pero a mí me encanta saber de dónde vienen las cosas». El profesor recurre a una figura similar a la usada en el episodio 1 del momento 1, y su trabajo no tiene variaciones con relación a lo presentado en dicha ocasión (figura 7). Sin embargo, indica, aludiendo a razones de tiempo, que no realizará la demostración, y que esta se puede obtener añadiendo un trazo suplementario (con un gesto) y de las propias relaciones de proporcionalidad.

Finalmente, P1 hace hincapié en que el teorema es válido para rectas paralelas y que de no tener esta hipótesis el resultado falla.

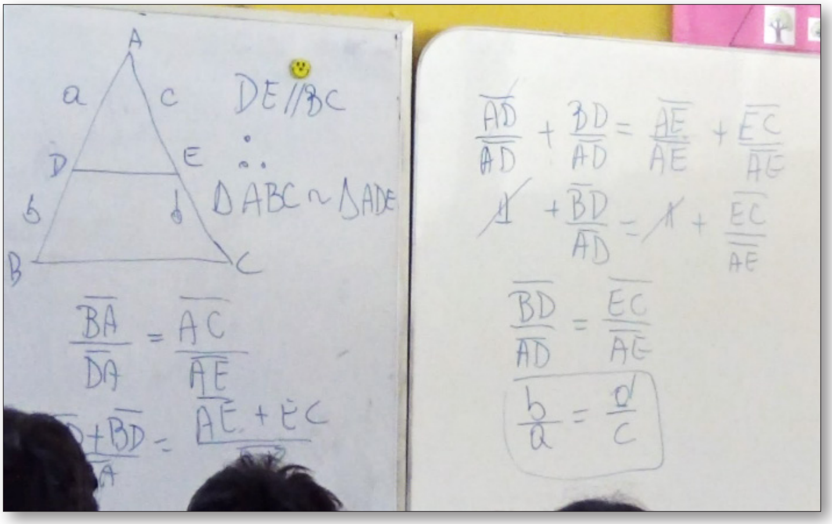

Fig. 7. Trabajo de P1 en el episodio 2.

Circulación en el ETM idóneo de P1 en el episodio 1. P1 activa el trabajo desde la génesis semiótica. En el representamen, una representación figural del teorema de Tales es usada como un ejemplo. El proceso de visualización es del nivel de visualización icónica, pues comprende el reconocimiento de ciertas características de la representación figural (en la figura 5, observar las medidas de los segmentos proporcionales en la construcción preestablecida). Asimismo, el trabajo implica la activación de la génesis instrumental, dada por el uso de un artefacto material (calculadora) para verificar la igualdad de los valores de dos razones, y la construcción demanda las técnicas de uso de dicho artefacto. En esta fase del trabajo se activa el plano vertical [Sem-Ins], al entrar en juego la identificación de valores de la figura y el cálculo de los valores de las razones usando calculadora. P1 repite estas acciones (que activan el plano [Sem-Ins]) para verificar la igualdad de los valores de dos razones a través de los distintos ejemplos que presenta a los estudiantes (figura 6).

Como se observa en la descripción del episodio, este trabajo tiene la intención de verificar la validez del teorema basado en el uso de ejemplos para realizar distintos tipos de cálculos. Esto permite observar un tipo de prueba del teorema basado en acciones sobre las figuras para justificar la validación, lo que corresponde a una prueba pragmática. Así, el plano vertical activado es [Sem-Dis], al entrar en juego de manera relacionada las génesis semiótica (acciones sobre las figuras) y discursiva (en la validación).

Asimismo, al mover una de las rectas paralelas se activa la génesis instrumental. Se observa el uso del software como un artefacto material para la construcción de una nueva configuración en el proceso de la prueba, lo cual implica que activa el plano [Ins-Dis]. Esto permite al profesor cuestionar la hipótesis de paralelismo del teorema (y con ello el referencial): «¿qué pasa si yo desplazo una de las paralelas?». Como fue mencionado en la descripción, P1 intenta mover una de las rectas con el software (cuando cambia de dirección) sin éxito, por lo que la dibuja a mano alzada en el pizarrón. Además, usa la calculadora para verificar que los valores son distintos y, con ello, verificar la condición de paralelismo. Cabe señalar aquí que se observa una dificultad en la génesis instrumental asociada al uso de las herramientas del software y, también, cuando deja los cálculos inconclusos y sin justificar, lo que acompaña con la afirmación: «¡Qué raro!, pero eso tiene que ser un error, básicamente del GeoGebra».

Circulación en el ETM idóneo de P1 en el episodio 2. En este episodio, el análisis es similar al realizado para las relaciones proporcionales del episodio 1 en el momento 1 (figura 7). Es decir, el trabajo de P1 es activado por la génesis semiótica. El representamen está dado por la representación inicial de los triángulos semejantes y el proceso de visualización es del nivel de visualización no-icónica, pues involucra la descomposición de la figura inicial. Luego, el trabajo semiótico implica una conversión del registro figural al registro algebraico, centrado en el tratamiento de operaciones (algebraicas), e involucra el referencial (de manera implícita), por el uso de definiciones y propiedades, para probar una igualdad entre relaciones proporcionales. De esta manera, el plano vertical activado es [Sem-Dis].

Finalmente, P1 solo presenta la tesis del teorema de Tales como una consecuencia de la semejanza de triángulos; con un gesto se refiere al trazo suplementario que utilizó para probar en el episodio 2 del momento 1 y menciona la hipótesis de paralelismo. En consecuencia, en el episodio 2 no se observa un trabajo de prueba del teorema de Tales, y el énfasis para P1, más que favorecer procesos cognitivos diversos (asociados al teorema) y relacionar con otros contenidos matemáticos, es resolver tareas de aplicación del teorema para ganar fluidez en su uso (figura 8), lo cual desarrolla en el episodio 3 (que no se analiza, ya que se trata únicamente de tareas de ejercitación).

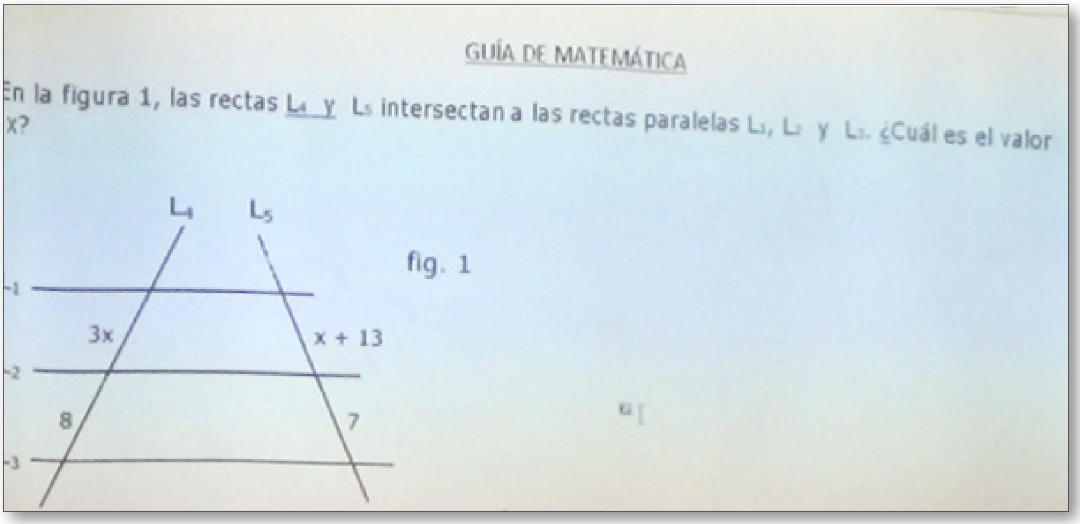

Fig. 8. Tarea presentada por P1 en el episodio 3.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados muestran cómo las génesis, componentes y planos verticales son activados en el ETM idóneo del profesor cuando usa tareas y ejemplos en el aula. La tabla 5 resume los análisis según cada episodio en los momentos 1 y 3.

Tabla 5.
Resumen del ETM idóneo de P1

Momento y episodio		*Tipificación de las génesis, componentes y planos verticales activados*						
		Génesis semiótica		Génesis instrumental		Génesis discursiva		Plano vertical
		Representamen	Visualización	Artefacto	Construcción	Referencial	Prueba	
Momento 1	Episodio 1	X	X (no-icónica)			X (implícito)	X (intelectual)	[Sem-Dis]
	Episodio 2	X	X (no-icónica)	X (simbólico)	X	X	X (intelectual)	[Sem-Ins] [Sem-Dis]
Momento 3	Episodio 1	X	X (icónica)	X (material)	X	X	X (pragmá-tica)	[Sem-Ins] [Sem-Dis] [Ins-Dis]
	Episodio 2	X	X (no-icónica)			X (implícito)	X (intelectual)	[Sem-Dis]

Como se observa en el primer episodio del momento 1 y en el segundo episodio del momento 3, el foco del trabajo está en la génesis semiótica; P1 privilegia los tratamientos y operaciones algebraicas a partir de una representación geométrica, más que en una intención discursiva en la prueba realizada (igualdad entre relaciones proporcionales) o en el uso de algún tipo de artefacto para la construcción geométrica. El referencial aparece sin que sea explícito en su trabajo; también constatamos un cambio de dominio, de la geometría por el álgebra, y un error en el primer episodio que atribuimos al énfasis que otorga a las operaciones algebraicas sin retorno al trabajo geométrico inicial.

Del análisis de los episodios mencionados en el párrafo anterior, constatamos que, aun cuando el profesor se muestra dispuesto a cambiar aspectos de su trabajo durante el desarrollo del taller formativo (como incluir un episodio con uso de software), el trabajo desarrollado y el énfasis en los tratamientos algebraicos parecen no ser alterados ni cuestionados. En este sentido, P1 menciona en ambos momentos (1 y 3) el rol importante que atribuye al uso del teorema de Tales para la ejercitación algebraica.

Del párrafo precedente no se intenta relegar la importancia del álgebra ni de los tratamientos que podrían ser propiciados en dicho dominio matemático, sino que resaltamos la importancia del trabajo geométrico y el desarrollo de propuestas intencionadas para la enseñanza que favorezcan diversas interacciones entre las génesis semiótica, instrumental y discursiva.

En los episodios 2 y 1 de los momentos 1 y 3, respectivamente, observamos diferencias en cuanto a la visualización, uso de los artefactos y la prueba. Mientras que en el episodio 2 del momento 1 el trazo suplementario que añade P1 en la figura corresponde a un artefacto simbólico que usa para realizar la prueba intelectual, sin la intención de justificar su uso, en el episodio 1 del momento 3 el artefacto empleado es de tipo material y se usa para mover la recta paralela que le permite preguntar sobre la validez del teorema, lo cual tiene una intención en la prueba pragmática. Es interesante observar que, en estos casos, se da una relación entre visualización no-icónica, artefacto simbólico y prueba intelectual (episodio 2 del momento 1) y visualización icónica, artefacto material y prueba pragmática (episodio 1 del momento 3). Este tipo de actividades requieren coordinación de los procesos de visualización, construcción y prueba, así como también la relación entre distintos registros de representación semiótica (Duval, 1995, 2016), y una gestión intencionada en el diseño del ETM idóneo del profesor, por lo que explorar en el diseño de tareas y selección de ejemplos adecuados en esta línea podría ser un camino en el que profundizar.

Los resultados en cuanto al proceso de visualización que P1 privilegia en los momentos analizados indican que hay un predominio de la visualización no-icónica asociada a la descomposición de la figura. En este sentido, consideramos relevante realzar el diseño y uso de diversas tareas para el aula que involucran otras operaciones con las figuras asociadas con este nivel de visualización (Duval, 2016), como la construcción de figuras usando artefactos, la descomposición heurística de las figuras y la deconstrucción dimensional desarrollada en coordinación con la prueba.

Con respecto a los resultados vinculados con la génesis discursiva y los componentes que esta articula (referencial y prueba), las evidencias muestran que se trata de un aspecto del trabajo en ocasiones implícito (referencial) y centrado en tratamientos algebraicos (para probar la igualdad entre relaciones proporcionales), o bien asociado a una prueba pragmática con el uso que le otorga al software, que deja poco espacio a la justificación. Estos aspectos no deben ser analizados como componentes que funcionan de manera aislada, pues están vinculados al tipo de trabajo geométrico y las interacciones entre las génesis que P1 ha privilegiado. Asimismo, las tareas y ejemplos que emplea cumplen un rol relevante en este sentido, pues son las que activan esta forma de trabajo matemático.

La demostración parece desempeñar un rol importante para P1, según declara. Sin embargo, no se observa la demostración del teorema de Tales en el sentido de Balacheff (1987) (quien atribuye a la demostración un estadio más desarrollado que la prueba), sino que realiza pruebas intelectuales que le permiten establecer relaciones proporcionales centradas en tratamientos algebraicos (P1 lo denomina *demostración* del teorema de Tales).

De los resultados presentados en el episodio 1 del momento 3, en los que P1 presenta una tarea que implica el uso de tecnología, resaltamos la intención de modificar aspectos de su enseñanza. No obstante, el potencial dinámico que ofrece el software y los procesos implicados a partir de la génesis instrumental son escasamente propiciados por el profesor, lo que incluso lleva a evidenciar dificultades asociadas con su uso. Así, las evidencias empíricas dan cuenta de que el trabajo de P1 se limita a: *ver* los datos numéricos de una figura dada sin la posibilidad de construir o descomponer; realizar algunos cálculos con calculadora sin la posibilidad de usar el arrastre para explorar nuevas configuraciones, y realizar una prueba pragmática sin dar énfasis a la justificación o la conjetura. En este sentido, consideramos que el uso de este tipo de artefacto podría ser mejor gestionado, aun cuando los estudiantes no dispongan de un computador en la clase, pues las tareas podrían ser más desafiantes para los estudiantes en relación con el uso de instrumentos.

De lo anterior, se trata de una oportunidad para favorecer procesos cognitivos diversos asociados al uso del software, pudiendo implicarse distintos tipos de arrastre con diferentes propósitos en la solución de problemas abiertos (Hölzl, 1995; Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002). Para ello, se deben diseñar tareas (problemas) abiertas que favorezcan la exploración, la conjetura, el reconocimiento de invariantes, etc., en coordinación con razonamientos discursivos u otras formas de pruebas, como las pruebas discursivo-gráficas (Richard, 2004). En la perspectiva del ETM, el trabajo se podría propiciar a partir de tareas que activan los planos verticales [Sem-Ins], para explorar figuras sin una intención de validación, o bien [Ins-Dis] para justificar construcciones, validar o refutar conjeturas (esto también implica la activación de otras génesis y componentes).

En cuanto a la selección de ejemplos que usa P1, destacamos que estos privilegian las representaciones figurales para ilustrar un concepto (episodio 1 en los momentos 1 y 3) o un teorema (episodio 2 del momento 1) y para verificar la validez de un teorema (episodio 1 del momento 3).

Considerando los resultados de los momentos 1 y 3 (donde el primero es una simulación en la que P1 muestra en el taller su trabajo habitual relacionado con la enseñanza del teorema, y en el tercero implementa modificaciones en el aula –con estudiantes– como fruto de la reflexión en el taller), destacamos que P1 presenta el teorema como una consecuencia de la semejanza de triángulos, y su énfasis, más que en favorecer procesos cognitivos diversos y relacionar con otros contenidos matemáticos el teorema en juego, está en los tratamientos algebraicos y en resolver tareas para ganar fluidez en su uso (figura 8).

Consideramos que el proceso de análisis seguido, con la identificación de episodios, tareas y ejemplos y los elementos de ETM activados, nos ha permitido lograr el objetivo de la investigación, caracterizando el ETM idóneo propuesto por el profesor para la enseñanza del teorema de Tales. Así, hemos explorado las génesis, componentes y planos verticales activados, lo que nos ha permitido comprender el trabajo del profesor e identificar dificultades vinculadas con la enseñanza del teorema.

Las limitaciones del estudio se relacionan con la recolección de datos provenientes del trabajo matemático de profesores de un único liceo que participaron en un taller formativo, por lo cual en futuras investigaciones se podría explorar con profesores pertenecientes a otros contextos. Asimismo, existen limitaciones asociadas al diseño de caso único, y saber si obtendríamos resultados similares con otros profesores. Si este fuera el camino de una futura investigación, consideramos que el diseño metodológico de esta investigación podría utilizarse para realizar estudios comparativos entre profesores, o bien, en un diseño de caso múltiple.

A nuestro parecer, este trabajo puede contribuir al desarrollo de actividades de formación del profesorado que propicien la reflexión y mejoras en su desempeño. Asimismo, de los resultados planteamos la necesidad de generar instancias focalizadas en el uso de herramientas tecnológicas que faciliten su gestión para la enseñanza y el aprendizaje, tendientes a aprovechar su potencial dinámico en el diseño de tareas y ejemplos pertinentes para su implementación en el aula. Por otra parte, reivindicamos la necesidad de favorecer la articulación entre el conocimiento teórico (en este caso el ETM) con la práctica de los profesores, a fin de diseñar, adaptar e implementar propuestas para la enseñanza de la matemática apropiadas al contexto y a los objetivos trazados para el trabajo en el aula.

Finalmente, aunque reconocemos que el uso de tareas y ejemplos puede ser espontáneo o planificado, y que su diseño y formas de abordarlos no pueden verse como dimensiones disociadas (Coles y Brown, 2016; Lozano, 2017), planteamos la necesidad de realizar investigación que contribuya con un cuerpo de conocimiento asociado tanto a su diseño y selección, como a su adaptación e implementación en el aula para fortalecer el conocimiento matemático y didáctico de los profesores. Este tipo de análisis, desde la perspectiva del ETM, permite poner el foco en el tipo de trabajo matemático que se propone en relación con dotar de significado a los objetos matemáticos, la construcción basada en el uso de artefactos y los razonamientos discursivos, aportando una perspectiva complementaria a las usadas en otras investigaciones (Chevallard, 1999; Espinoza-Vásquez et al., 2018; Rowland et al., 2005; Zodik, y Zaslavsky, 2008).

AGRADECIMIENTOS

C. Henríquez Rivas agradece el financiamiento al Convenio Marco FID-TAL 1856, de la Universidad de Talca.

Los autores agradecen a los revisores y al editor Dr. Ángel Gutiérrez por sus comentarios y sugerencias que ayudaron a mejorar la versión anterior del artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM Mathematics Education*, *34*(3), 66-72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Badillo Jiménez, E., Figueiras, L., Font, V. y Martínez, M. (2013) Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias 31*(3), 207-225. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n3.986

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176.
https://doi.org/10.1007/BF00314724

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (Trad. Pedro Gómez). Bogotá: Una empresa docente, Universidad de los Andes.

Becker, J. P. y Shimada, S. (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics.* Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Christiansen, B. y Walter, G. (1986). Task and activity. En B. Christiansen, A.-G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education: Papers submitted by members of the Bacomet Group* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reide.

Coles, A. y Brown, L. (2016). Task design for ways of working: making distinctions in teaching and learning mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*, 149-168.
https://doi.org/10.1007/s10857-015-9337-4

Denzin, N. K. (1978). *The Research Act: A Theoretical Introduction to Sociological Method* (2.ª ed.). Nueva York: McGraw-Hill.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* (Trad. Myriam Vega). Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5-53.

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-60). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Espinoza-Vázquez, G., Zakaryan, D. y Carrillo Yáñez, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Relime*, *21*(3), 301-324.
https://doi.org/10.12802/relime.18.2133

Flores-González, M. y Montoya Delgadillo, E. (2016). Artefacto y espacio de trabajo matemático en la multiplicación de números complejos. *Educación Matemática*, *28*(2), 85-117.

Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema*, *30*(54), 1-22.
https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Henríquez-Rivas, C. y Montoya-Delgadillo, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 51-70. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1408

Hölzl, R. (1995). Between drawing and figure. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education* (pp. 117-124). Berlín: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_8

Huntley, R. (2013). Pre-service primary teachers' choice of mathematical examples: Formative analysis of lesson plan data. En V. Steinle, L. Ball y C. Bardini (Eds.), *Mathematics education: Yesterday, today and tomorrow. Proceedings of the 36th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. (pp. 394-401). Melbourne: MERGA.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A. (2018). Thinking About the Teaching of Geometry Through the Lens of the Theory of Geometric Working Spaces. En P. Herbst et al. (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools, ICME-13 Monographs* (pp. 5-21). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3_2

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espaces de travail mathématique: puntos de vista y perspectivas. *Relime*, *17*(4-I), 5-15. https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 721-737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Lozano, M. D. (2017). Investigating task design, classroom culture, and mathematics learning: An enactivist approach. *ZDM Mathematics Education*, *49*, 895-907. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0890-4

Margolinas, M. (2013). *Task Design in Mathematics Education*. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford.

Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and Using Mathematical Tasks*. St. Albans: Tarquin Publications.

Mineduc. (2015). *Bases Curriculares. 7.º* Básico a 2*.º Medio.* Santiago: Autor.

Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A. y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4-I), 181-197. https://doi.org/10.12802/relime.13.1749

Montoya Delgadillo, E. y Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des espaces de travail mathematique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *19*, 73-101.

Montoya Delgadillo, E. y Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 739-754. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9

Morales, H. (2018). Influencia de un Proceso de Formación de Profesores en el Sistema de Enseñanza del Concepto de Área en Estudiantes de Pedagogía en Matemáticas, un Estudio de Caso. *Bolema*, *32*(62), 1050-1067. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a15

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. París: Armand Colin.

Richard, P. (2004). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Berna: Peter Lang.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Watson, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity. Learners Generating Examples*. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Watson, A. y Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 205-215. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9059-3

Watson, A. y Thompson, D. (2015). Design Issues Related to Text-Based Tasks. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education. An ICMI study 22* (143-190). Cham: Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2

Yin, R. K. (2009). *Case study research. Design and methods* (4.ª ed.). Thousand Oaks: SAGE Publications INC.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(2), 105-123. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260

Zaslavsky, O. (2010). The Explanatory Power of Examples in Mathematics. En M. Stein y L. Kucan (Eds.), *Instructional Explanations in the Disciplines* (pp. 107-128). Nueva York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0594-9_8

Zodik, I. y Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 165-182. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9140-6

Mathematical work of a teacher based on tasks and examples proposed for teaching

Carolina Henríquez Rivas
Facultad de Ciencias de la Educación,
Universidad de Talca, Talca, Chile
cahenriquez@utalca.cl

Rodrigo Ponce
Instituto de Matemáticas,
Universidad de Talca, Talca, Chile
rponce@inst-mat.utalca.cl

José Carrillo Yáñez, Nuria Climent
Departamento de Didácticas Integradas,
Universidad de Huelva, Huelva, España
carrillo@uhu.es, climent@uhu.es

Gonzalo Espinoza-Vásquez
Instituto de Matemáticas,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile
gonzalo.espinoza.v@gmail.com

This article addresses a problem related to the use of tasks and examples that teachers propose in the classroom. The aim of the research is to characterize the mathematical work proposed by a teacher from the tasks and examples he or she considers for the teaching of Thales' theorem.

To analyze the mathematical work, the framework of the mathematical work space (MWS) is used (Kuzniak, 2011). Specifically, the suitable MWS for a teacher, understood as the way in which a mathematical content is designed, adapted and proposed in the classroom.

The research proposes a case study based on a unique case design (Yin, 2009), which considers as a unit of analysis the mathematical work proposed by a secondary school teacher in the context of a training experience. For data collection, video recordings and transcriptions, participant and non-participant observation are considered. The characterization of the teacher's suitable MWS is carried out in two stages: 1) identification of episodes of the session, tasks and use of examples for teaching, and description of the proposed and adjusted work; 2) analysis of the circulation in the teacher's suitable MWS carried out on the basis of the information in stage 1.

The results reveal the privilege of treatments and algebraic operations based on figurative representations, little emphasis on justifications, and a proposed change involving the use of technological tools, where their dynamic potential is little used by the teacher, leading to evidence of difficulties associated with their use.

The discussion raises the use of technological artifacts and their organization and management in the classroom, where it is emphasized that the tasks could be more challenging for students in relation to their use, to promote diverse cognitive processes, being able to involve different types of dragging with different purposes in the solution of open tasks, which promote exploration, conjecture, recognition of invariants, etc., in coordination with discursive reasoning, or other forms of evidence.

Finally, in relation to the use of tasks and examples, their design and ways of approaching them cannot be dissociated dimensions. The authors raise the need to carry out research that contributes with a body of knowledge associated both with its design and selection, and with its adaptation and implementation in the classroom to strengthen the mathematical and didactic knowledge of teachers. This type of analysis, from the perspective of the MWS, allows putting the focus on the type of mathematical work proposed in relation to giving meaning to mathematical objects, construction based on the use of artifacts and discursive reasoning, contributing a complementary perspective to those used in other pieces of research.