

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

FRACCIONES EQUIVALENTES POSITIVAS

ESNEIDER BENAVIDES, ALEXANDER CHAVES, SONIA SARMIENTO Y
MÓNICA BERNAL

BOGOTÁ, NOVIEMBRE DE 2021

En este documento, presentamos la unidad didáctica sobre fracciones equivalentes positivas, diseñada por el grupo 4 durante el proceso de formación de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. La unidad didáctica propuesta es para estudiantes de grado séptimo de educación básica. Con esta unidad didáctica, pretendemos contribuir al aprendizaje de conceptos y procedimientos relacionados con las fracciones equivalentes positivas.

La unidad didáctica se implementó con los estudiantes de grado séptimo del Gimnasio José Joaquín Casas, ubicado en la localidad de Usaquén, en Bogotá, Colombia. El colegio es de carácter privado de jornada única. Los estudiantes tenían edades entre los 12 y 14 años. Cabe mencionar que, desde un principio, pensamos la propuesta para la modalidad presencial; sin embargo, por la dinámica de la pandemia, realizamos ajustes de forma (como el uso de aplicaciones en lugar de material concreto) para implementarla de manera virtual. Esta situación no tuvo incidencia significativa en la estructura, las metas y los objetivos que contemplamos desde el inicio de la unidad didáctica, con lo que podemos afirmar que se podría implementar en cualquiera de las dos modalidades.

El tema de fracciones equivalentes positivas se aborda en diferentes documentos curriculares nacionales. Para el diseño de la unidad didáctica, tuvimos en cuenta las orientaciones de los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006) y los derechos básicos de aprendizaje en matemáticas (MEN, 2016). Desde el documento de los estándares básicos, asociamos el tema al pensamiento numérico y sistemas de datos, con el estándar “utiliza números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida” (MEN, pág. 84) . En cuanto a los derechos básicos de aprendizaje, relacionamos el tema con “describe y justifica diferentes estrategias para representar, operar y hacer estimaciones con números naturales y números racionales (fraccionarios), expresados como fracción o como decimal” (MEN, pág. 30).

Seleccionamos el tema de fracciones equivalentes, debido a que, desde nuestra experiencia, notamos que usualmente los estudiantes presentan dificultad para dar significado a la equivalencia. Esto sucede, en primer lugar, porque no conciben que dos fracciones con diferentes numeradores y denominadores representen la misma cantidad; y, en segundo lugar, porque no establecen relaciones entre fracciones equivalentes y situaciones de su contexto que, por ejemplo, impliquen comparación de magnitudes como masa, tiempo, longitud y área.

1. ARTICULACIÓN DE CONTENIDOS

A continuación, describimos la estructura de contenido a la que pertenece el tema de fracciones equivalentes positivas. Identificamos los conceptos y procedimientos matemáticos que caracterizan el tema y la relación entre ellos. Utilizamos diferentes formas de representar las fracciones equivalentes y las conexiones entre ellas. Finalmente, exponemos diferentes contextos (fenómenos) que le dan sentido al tema (Cañadas, Gómez, & Andrés, 2018).

1.1. Conceptos y procedimientos que caracterizan el tema

En el mapa conceptual de la figura 1, mostramos los conceptos y procedimientos clave del tema fracciones equivalentes positivas, sus elementos, relaciones, y los procesos de amplificación y simplificación.

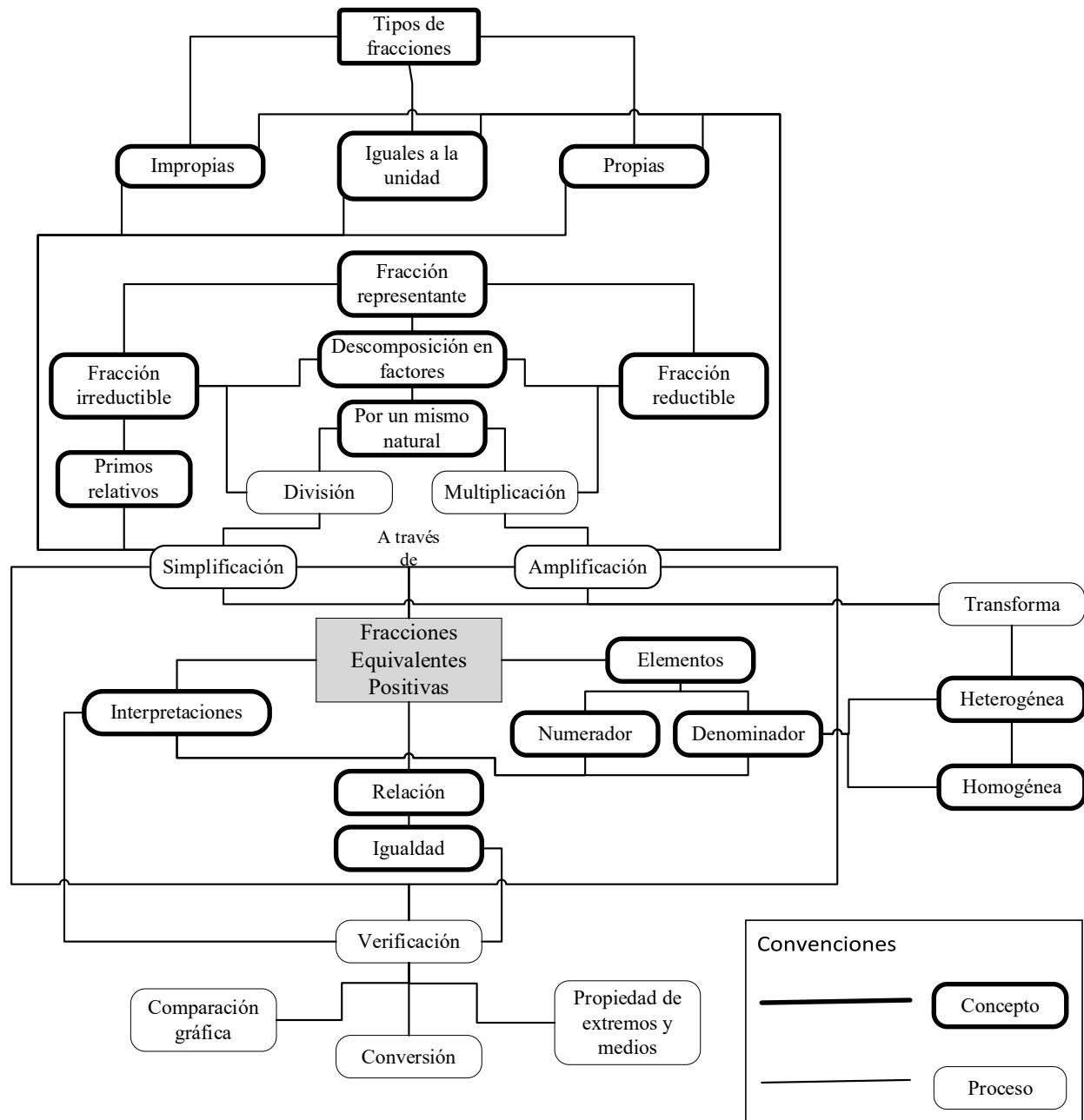


Figura 1. Conceptos y procedimientos de las fracciones equivalentes positivas

Al realizar la revisión de los conceptos y procedimientos clave de las fracciones equivalentes positivas, identificamos que la fracción tiene en cuenta dos elementos llamados numerador y denominador. También encontramos que, si dos fracciones tienen el mismo denominador, entonces establecen fracciones homogéneas. Por otra parte, si tienen distinto denominador, determinan fracciones heterogéneas. Dos fracciones son equivalentes si logramos establecer una relación de igualdad, es decir, si representan la misma cantidad.

La equivalencia entre fracciones tiene en cuenta varias formas de verificación. Una de ellas es la propiedad de extremos y medios. Esta consiste en determinar que el producto entre el numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda es igual al producto del denominador de la primera fracción y el numerador de la segunda. Otros métodos para determinar la equivalencia entre fracciones pueden ser la comparación gráfica, la igualdad en el resultado de las fracciones desde su interpretación como cociente y la transformación de una fracción a otra a partir de la simplificación o amplificación. En general, para la verificación de la equivalencia de fracciones, tuvimos en cuenta diferentes interpretaciones de la fracción (parte-todo, operador y cociente).

Por otra parte, los procesos de simplificación (división del numerador y denominador por un factor común) y amplificación (multiplicación del numerador y denominador por un mismo número natural) permiten (a) determinar fracciones equivalentes a una dada, (b) establecer una relación con los tipos de fracción propia, impropia e igual a la unidad y (c) transformar fracciones heterogéneas en fracciones homogéneas. En la simplificación, es necesario que la fracción sea reducible. El proceso completo de simplificación (cuando la fracción no se puede reducir más) genera una fracción irreducible, llamada fracción representante. Por otro lado, las fracciones equivalentes a una fracción propia, impropia o igual a la unidad seguirán siendo del mismo tipo.

1.2. Representaciones de las fracciones equivalentes positivas

En el mapa conceptual de la figura 2, presentamos las representaciones que tuvimos en cuenta en el diseño de la unidad didáctica y establecemos relaciones entre ellas.

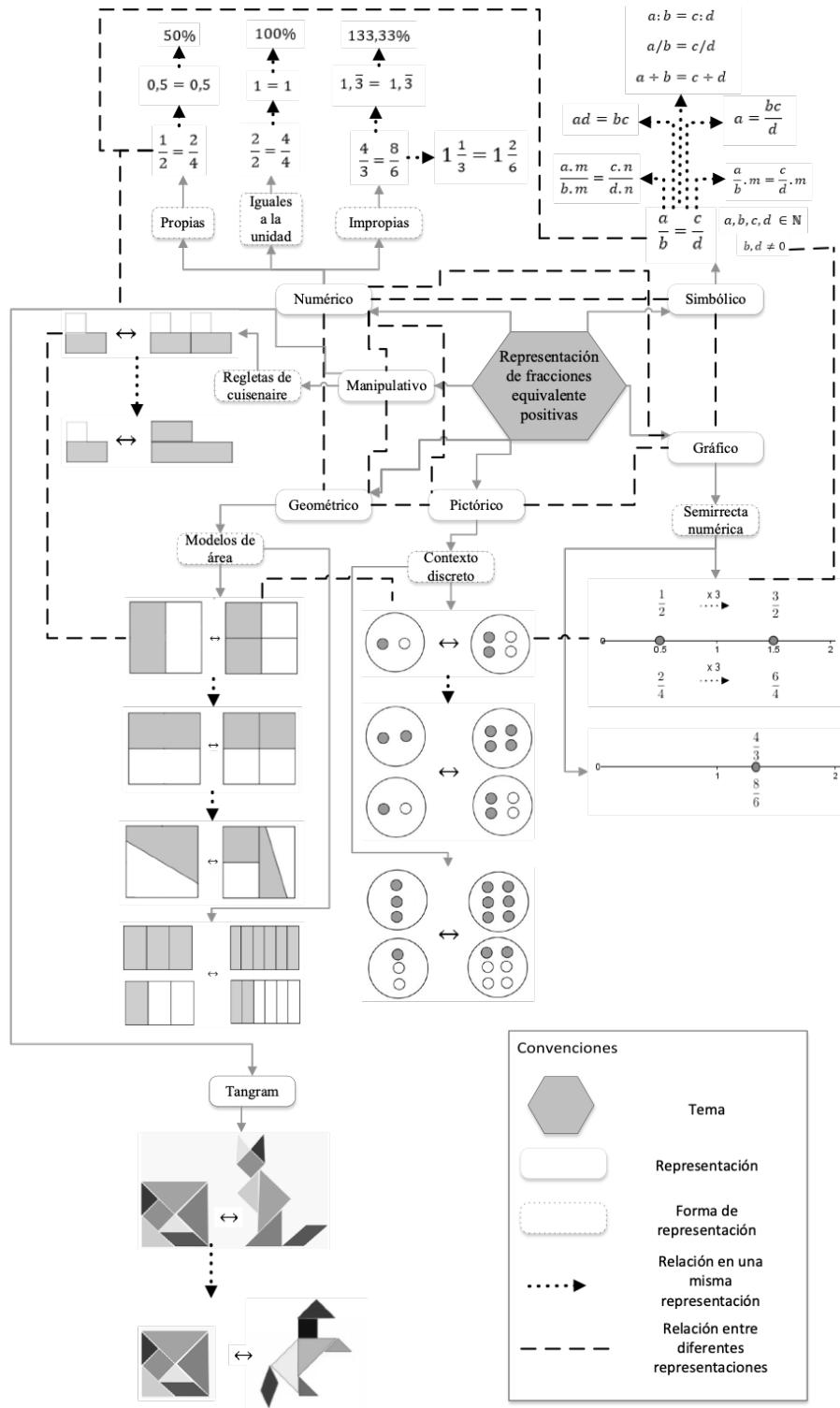


Figura 2. Representaciones de las fracciones equivalentes

Las fracciones equivalentes positivas pueden abordarse a partir de las representaciones numérica, simbólica, gráfica, geométrica, pictórica y manipulativa. A continuación, describimos brevemente esas representaciones. En el anexo 1¹, presentamos una descripción más detallada, con ejemplos y relaciones entre representaciones.

En la representación numérica, cada fracción se representa con números naturales que se muestran uno sobre el otro, separados por un segmento horizontal. El número que se ubica sobre el segmento se denomina numerador y el número que se ubica debajo se conoce como denominador (Leon, 2011). Para este sistema de representación, abordamos el tema con base en (a) el tipo de fracciones (propia, impropia, igual a la unidad), (b) su interpretación como cociente (decimal) y (c) su representación como porcentaje.

En la representación simbólica, tuvimos en cuenta la expresión $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N} \wedge b, d \neq 0$).

Los principales elementos en la representación gráfica son una recta y los números racionales positivos. La recta real permite representar cualquier cantidad. Por consiguiente, es posible representar la cantidad expresada por una fracción.

En la representación geométrica, tuvimos en cuenta figuras geométricas (habitualmente se usan figuras circulares o rectangulares). Cada figura se denomina unidad y se divide en tantas partes de igual área como lo indica el denominador. Luego se señalan (se sombrean) las partes que indica el numerador (Leon, 2011). La equivalencia entre fracciones se presenta si, al comparar las figuras, se determina la misma área sombreada.

En la representación pictórica, tuvimos en cuenta el contexto discreto de las fracciones. Cada fracción determina un número de conjuntos, cada uno con tantos elementos (círculos) como establezca el denominador. Los elementos sombreados representan el numerador de la fracción (Leon, 2011).

Finalmente, en la representación manipulativa, las fracciones equivalentes pueden abordarse a partir de las regletas de Cuisenaire. Estas regletas son prismas cuadrangulares de 1cm^2 de base y cuya longitud oscila entre uno y diez centímetros. Cada regleta equivale a un número natural (Aguilera & Rodriguez, 2017). Una fracción puede ser representada a partir de dos conjuntos de regletas. Los dos conjuntos se disponen uno sobre otro de tal forma que el de arriba representa al numerador y el de abajo representa al denominador de la fracción. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ se puede representar con la regleta de un centímetro en la parte de arriba y la regleta dos centímetros en la parte inferior.

1.3. Fenómenos que le dan sentido a las fracciones equivalentes positivas

En este apartado, presentamos algunos fenómenos (situaciones o contextos cotidianos que involucran fracciones equivalentes positivas) que le dan sentido al tema. En la figura 3, mostramos un esquema que relaciona los fenómenos, los tipos de fracciones y los contextos PISA 2012 (Ministerio de educación, 2013).

¹ Los anexos se pueden descargar en este enlace: <http://funes.uniandes.edu.co/23707>

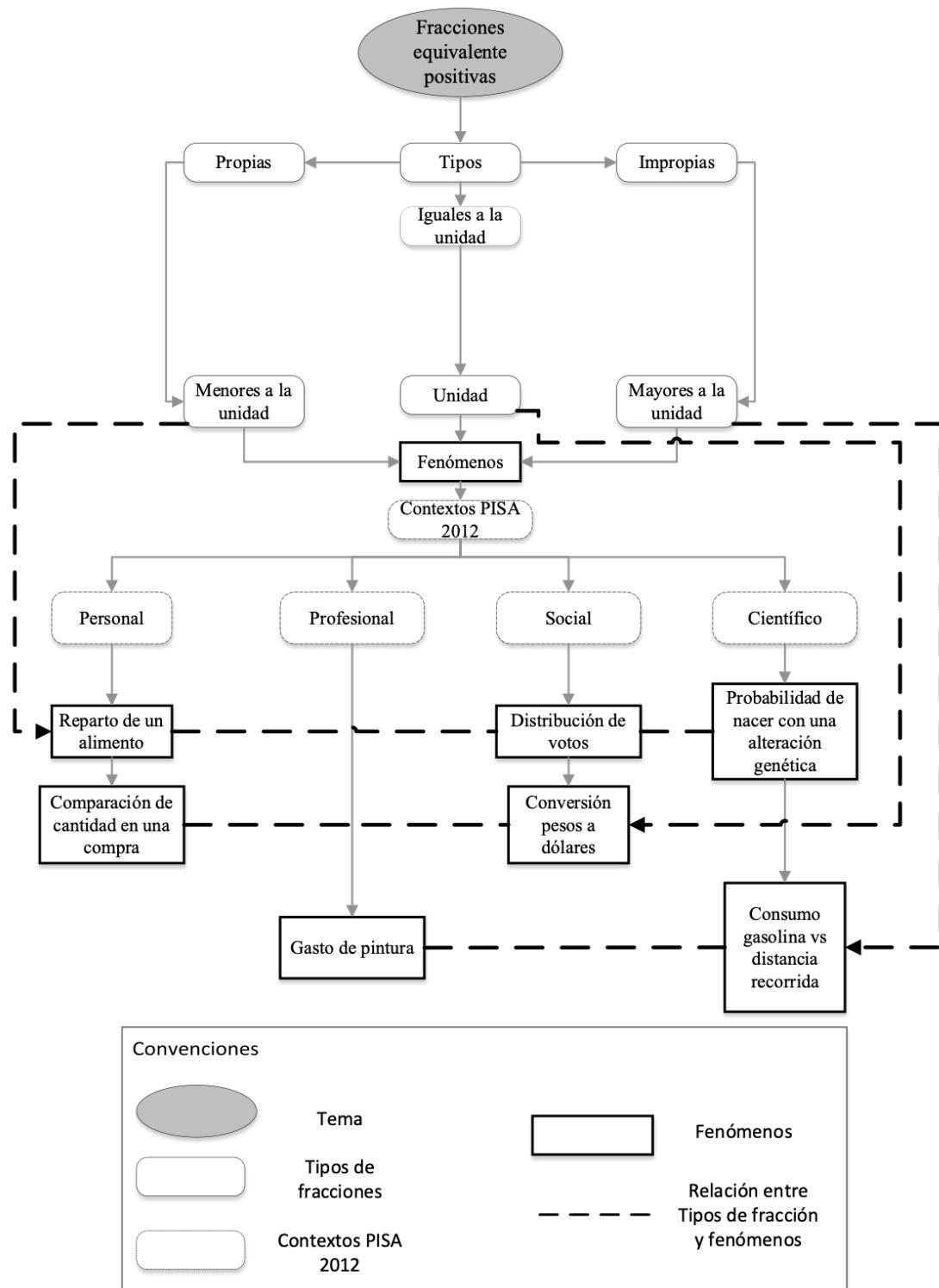


Figura 3. Fenómenos que le dan sentido a las fracciones equivalentes

Las fracciones equivalentes positivas nos permiten abordar diferentes fenómenos que favorecen la visión funcional del tema. De acuerdo con esto, como se observa en la figura 3, identificamos los siguientes fenómenos: (a) reparto de un alimento (al fraccionar un alimento —en partes iguales— de dos maneras distintas y repartirlo entre la misma cantidad de personas, de tal manera que a cada una le corresponda la misma parte); (b) distribución de votos (cuando se compara la cantidad de votos por un mismo candidato en dos lugares distintos y el porcentaje es el mismo); (c) comparación de cantidad en una compra (por ejemplo, en un supermercado, al comparar dos o más productos en diferentes unidades medida y determinar que pesan lo mismo); (d) consumo de gasolina vs distancia recorrida (al establecer la relación entre distancias recorridas con los consumos de gasolina); (e) probabilidad de nacer con una alteración genética (cuando dos personas tienen la misma probabilidad de nacer con una alteración genética); (f) conversión de pesos a dólares o dólares a pesos (al multiplicar por fracciones iguales a la unidad); y (g) gasto de pintura (por ejemplo, cuando se contratan dos albañiles para realizar un trabajo de pintura y cada uno compra la materia prima en diferentes presentaciones —tamaños— y, al final, los trabajadores concluyen que gastan la misma cantidad de pintura).

Los fenómenos anteriores presentan características comunes. Estas características permiten clasificarlos a partir del tipo de fracción que involucran (propias, impropias o iguales a la unidad) y los contextos PISA 2012. El reparto de un alimento y la comparación de cantidades en una compra tienen en cuenta situaciones propias del individuo, familiares o de su grupo de iguales. Por esta razón, los podemos ubicar en el contexto personal. El de gasto de pintura se relaciona con situaciones que tienen en cuenta aspectos de medición, costos o arquitectura. De esta manera, lo podemos ubicar en el contexto profesional. La distribución de votos y la conversión de pesos a dólares se relacionan con situaciones asociadas a elecciones, gobierno y economía. Por esta razón, los podemos ubicar en el contexto social. Finalmente, la probabilidad de nacer con una alteración genética y el consumo de gasolina vs distancia recorrida tienen en cuenta situaciones relacionadas con la medicina, la ciencia, la tecnología y el medio ambiente. De esta manera, los podemos ubicar en el contexto científico.

2. ASPECTOS COGNITIVOS

En este apartado, presentamos los aspectos cognitivos de nuestra unidad didáctica. En primer lugar, exponemos la contribución de la unidad didáctica a los procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales propuestas en PISA 2012. De esta manera, establecemos los objetivos de aprendizaje y los aspectos de tipo afectivo a los cuales pretendemos aportar. Luego, mencionamos los errores y dificultades que, desde la teoría y nuestra experiencia, identificamos en relación con el desarrollo de tareas asociadas a fracciones equivalentes positivas. Finalmente, mostramos las acciones y estrategias que podrían realizar los estudiantes en el momento de resolver las tareas (Gonzalez & Gómez, 2018).

2.1. Procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales

A continuación, describimos los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales mencionados en PISA, a los que pretendemos contribuir con nuestra unidad didáctica.

En relación con los procesos matemáticos, aportamos al proceso de formular, cuando el estudiante reconoce relaciones y elementos de las fracciones equivalentes en un problema, y establece diferentes representaciones que le permitan dar una solución. Aportamos al proceso de emplear, cuando el estudiante usa algoritmos y procedimientos matemáticos para obtener resultados y resolver situaciones. En las fracciones equivalentes, estas acciones tienen que ver con la amplificación, simplificación, comparación de fracciones y producto cruzado. Por último, aportamos al proceso de interpretar, con la validación y argumentación de los resultados, de tal forma que el estudiante reflexione acerca de su validez. Un ejemplo de este proceso se da cuando el estudiante determina la validez de fracciones equivalentes asociadas a diferentes representaciones.

En lo que respecta a las capacidades matemáticas fundamentales, con nuestra unidad didáctica, buscamos que los estudiantes (a) interpreten preguntas, tareas, instrucciones, objetos o imágenes, para crear un modelo mental de la situación; (b) utilicen las fracciones equivalentes para transformar, analizar e interpretar la realidad a partir de modelos matemáticos; (c) seleccionen, interpreten, traduzcan y hagan uso de distintas representaciones de las fracciones equivalentes para abordar una situación; (d) generen fracciones equivalentes a una dada; (e) establezcan relaciones entre fracciones y sus representaciones; y (f) expliquen y argumenten cuándo dos fracciones son equivalentes. Estas acciones se relacionan con las capacidades matemáticas fundamentales de matematización, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas y utilización de operaciones y un lenguaje simbólico.

2.2. Objetivos y expectativas de tipo afectivo

Basados en los procesos matemáticos, las capacidades matemáticas fundamentales, los conceptos, los procedimientos, los fenómenos y las representaciones que caracterizan el tema de fracciones equivalentes positivas, definimos los siguientes objetivos y aspectos afectivos para nuestra unidad didáctica (tabla 1).

Objetivo 1. Reconocer las relaciones entre las representaciones de la fracción para establecer su equivalencia.

Objetivo 2. Modelar situaciones que le den sentido al uso de fracciones equivalentes en la solución de problemas.

Tabla 1

Listado de expectativas de tipo afectivo del tema fracciones equivalentes positivas

EA	Descripción
1	Incrementar el interés por comprender y solucionar situaciones asociadas al uso de las fracciones equivalentes positivas
2	Desarrollar el hábito de verificar y explicar las soluciones que tienen en cuenta la equivalencia de fracciones
3	Desarrollar la confianza al matematizar y representar situaciones que involucren fracciones equivalentes

Nota. EA: expectativa afectiva.

En la tabla 1, presentamos las expectativas de tipo afectivo que pretendemos desarrollar con la implementación de la unidad didáctica. Tenemos en cuenta el desarrollo de (a) interés por generar modelos mentales y estrategias que permitan resolver situaciones; (b) hábitos de aplicación de distintos procedimientos y la explicación de sus resultados; y (c) confianza al interpretar información matemáticamente, a partir de la expresión de ideas y uso de diferentes representaciones de la fracción.

2.3. Dificultades y errores

En este apartado, presentamos las dificultades y errores más frecuentes en los que pueden incurrir los estudiantes en la implementación de la unidad didáctica sobre fracciones equivalentes positivas. González y Gómez (2018, pág. 139) definen la dificultad como una circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje. Ellos definen el error como la manifestación visible de una dificultad. Determinamos esta lista a partir de referentes teóricos y nuestra experiencia en el aula.

En la tabla 2, listamos dificultades relacionadas con cuestiones teóricas y prácticas del tema, las formas de representar y las relaciones que se establecen entre las representaciones de la fracción. Además, listamos dificultades relacionadas con explicaciones, argumentos y demostraciones que se pueden dar en el tema sobre fracciones equivalentes positivas (Gonzalez & Gómez, 2018). El listado completo de dificultades y errores puede consultarse en el anexo 2.

Tabla 2

Algunas dificultades y errores para el tema Fracciones equivalentes

E	Descripción
Dificultad para establecer relaciones entre las diferentes representaciones de la fracción	
E9	Asocia los enteros del numerador y denominador (representación numérica) con las unidades de la recta numérica, al ubicar el punto entre ellos
E10	Divide la unidad en tantas partes como lo indica el numerador y toma tantas como lo indica el denominador
E11	Toma el numerador como denominador y el denominador como el numerador
E12	Asume que una fracción no se puede representar como un punto en la representación gráfica
E13	Supone que las regiones en la representación geométrica no se pueden asociar con el denominador y numerador de la fracción
E14	Asocia representaciones diferentes a la situación
Dificultad relacionada con el significado de la equivalencia de fracciones	
E15	Afirma que dos fracciones no son equivalentes a pesar de que se ubican en el mismo punto
E16	Afirma que dos fracciones son equivalentes, aunque no lo son

Tabla 2

Algunas dificultades y errores para el tema Fracciones equivalentes

-
- E17 Afirma que dos fracciones no son equivalentes a pesar de que el cociente de cada una es igual

Dificultad para reconocer una situación que puede ser resuelta con fracciones equivalentes

- E19 Plantea fracciones que no corresponden con la situación

- E20 Extrae del enunciado del problema, fracciones o información diferentes a las necesarias

Dificultad para explicar los resultados obtenidos de una situación que involucren fracciones equivalentes

- E23 Sustenta su respuesta con resultados de la situación que no corresponden

- E24 Determina la equivalencia de fracciones, pero no la interpreta de acuerdo con el contexto del problema

Dificultad asociada al uso de propiedades y algoritmos para la suma, multiplicación y división

- E25 Realiza la suma de forma directa, es decir, numerador con numerador y denominador con denominador

- E26 Realiza la suma de numeradores y multiplica denominadores

- E28 Tiene en cuenta el mínimo común múltiplo de los denominadores, pero mantiene los numeradores de las fracciones iniciales

- E66 Al sumar fracciones homogéneas se equivoca al sumar los numeradores

- E67 No tiene en cuenta todas las fracciones al realizar la suma

- E31 Amplifica con el algoritmo de la suma

- E32 Divide el denominador entre el numerador para expresar una fracción en forma decimal
-

Dificultad para construir o verificar la equivalencia de fracciones desde lo operativo

- E35 Suma el mismo número natural en el numerador y denominador para determinar fracciones equivalentes

- E36 Amplifica al multiplicar sólo en el numerador

- E37 Amplifica al multiplicar sólo en el denominador

- E38 Amplifica al multiplicar por diferentes números en el numerador y denominador

- E40 Simplifica al dividir sólo en el numerador

- E41 Simplifica al dividir sólo en el denominador

- E42 Simplifica al dividir entre diferentes números en el numerador y denominador

Tabla 2

Algunas dificultades y errores para el tema Fracciones equivalentes

- | | |
|---|--|
| E43 | Simplifica parcialmente, sin llegar a la fracción irreductible |
| E45 | Realiza el producto de extremos y medios de manera directa, numerador por numerador y denominador por denominador |
| Dificultad para asociar fracciones equivalentes en la solución de una situación | |
| E52 | Usa algún ejemplo que no tiene relación con fracciones equivalentes, como guía para resolver el problema |
| E53 | Encuentra una respuesta incompleta por ensayo y error, sin emplear procedimientos asociados con las fracciones equivalentes. |
-

Nota. E: error, D: dificultad.

2.4. Criterios de logro que caracterizan los objetivos

A continuación, presentamos los procedimientos que un estudiante tiene en cuenta cuando propone una estrategia para dar solución a una tarea. Denominamos a estas acciones criterios de logro. En la tabla 3, mostramos los criterios de logro más relevantes para los dos objetivos de aprendizaje de nuestra unidad didáctica. En el anexo 3, incluimos el listado completo de los criterios de logro.

Tabla 3

Ejemplos de criterios de logro

CdL	Descripción
Objetivo 1	
CdL1.2	Encuentro relaciones entre representaciones de la fracción
CdL1.4	Simplifico fracciones para comprarlas
CdL1.5	Amplifico fracciones para compararlas
CdL1.6	Aplico extremos y medios para comparar fracciones
CdL1.8	Uso los números decimales que surgieron del cociente de fracciones para abordar la situación
CdL1.10	Comparo números decimales
CdL1.11	Establezco la equivalencia de fracciones
Objetivo 2	
CdL2.1	Identifico la información de la situación y determino las fracciones asociadas
CdL2.2	Multiplico la fracción con un número entero

CdL	Descripción
CdL2.3	Relaciono la fracción con la probabilidad de un evento
CdL2.4	Relaciono el número decimal que obtuve al dividir numerador entre denominador con la probabilidad de un evento
CdL2.16	Utilizo la equivalencia de fracciones para solucionar el problema
CdL2.18	Decido qué proceso usar para comparar fracciones

Nota: CdL: Criterio de logro

Es importante tener en cuenta que algunos criterios de logro están relacionados con la decisión que toma el estudiante al desarrollar la tarea, lo que establece las diferentes formas o estrategias en que se puede abordar una situación. Por ejemplo, en el criterio de logro 2.18, el estudiante debe decidir qué proceso usar para comparar fracciones. Los criterios de logro que no están relacionados con la toma de decisiones tienen asociado al menos un error.

2.5. Grafos de criterios de logro de los objetivos

Un grafo de criterios de logro se puede definir como el conjunto de estrategias que un estudiante puede tener en cuenta (o activar) para resolver una tarea de aprendizaje. Este grafo se presenta con un esquema que muestra de forma organizada y secuencial los procedimientos o acciones concretas que el estudiante usa para resolver la tarea. En la figura 4, presentamos las acciones que los estudiantes pueden activar para la consecución del primer objetivo.

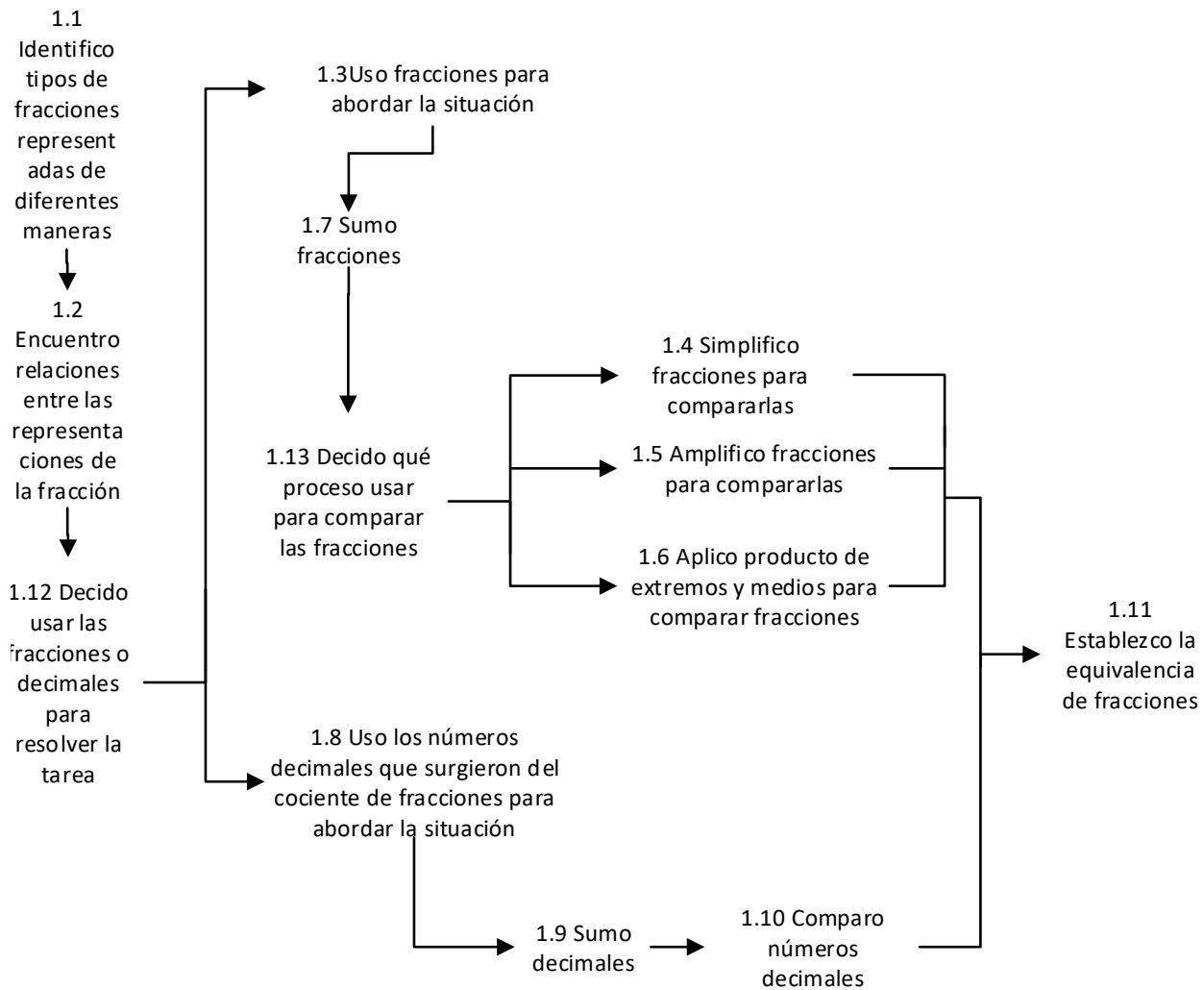


Figura 4. Grafo de criterios de logro del primer objetivo

Prevemos que inicialmente el estudiante identifica la representación y el tipo de fracción en la situación. Luego, reconoce que la situación se puede abordar con fracciones equivalentes. A continuación, pone de manifiesto la decisión de usar la representación numérica como estrategia para abordar el problema. En este momento, tiene en cuenta la expresión numérica como fracción o como decimal para resolver la tarea. En el caso en que use las fracciones, es posible que el estudiante decida establecer la equivalencia, a partir de la simplificación, amplificación o el producto de extremos y medios. Por otra parte, si decide usar los decimales, puede acudir a la representación decimal para establecer la equivalencia. Luego de comparar las representaciones numéricas por cualquiera de estos caminos, el estudiante le da sentido a la equivalencia para resolver la tarea.

En la figura 5, presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo.

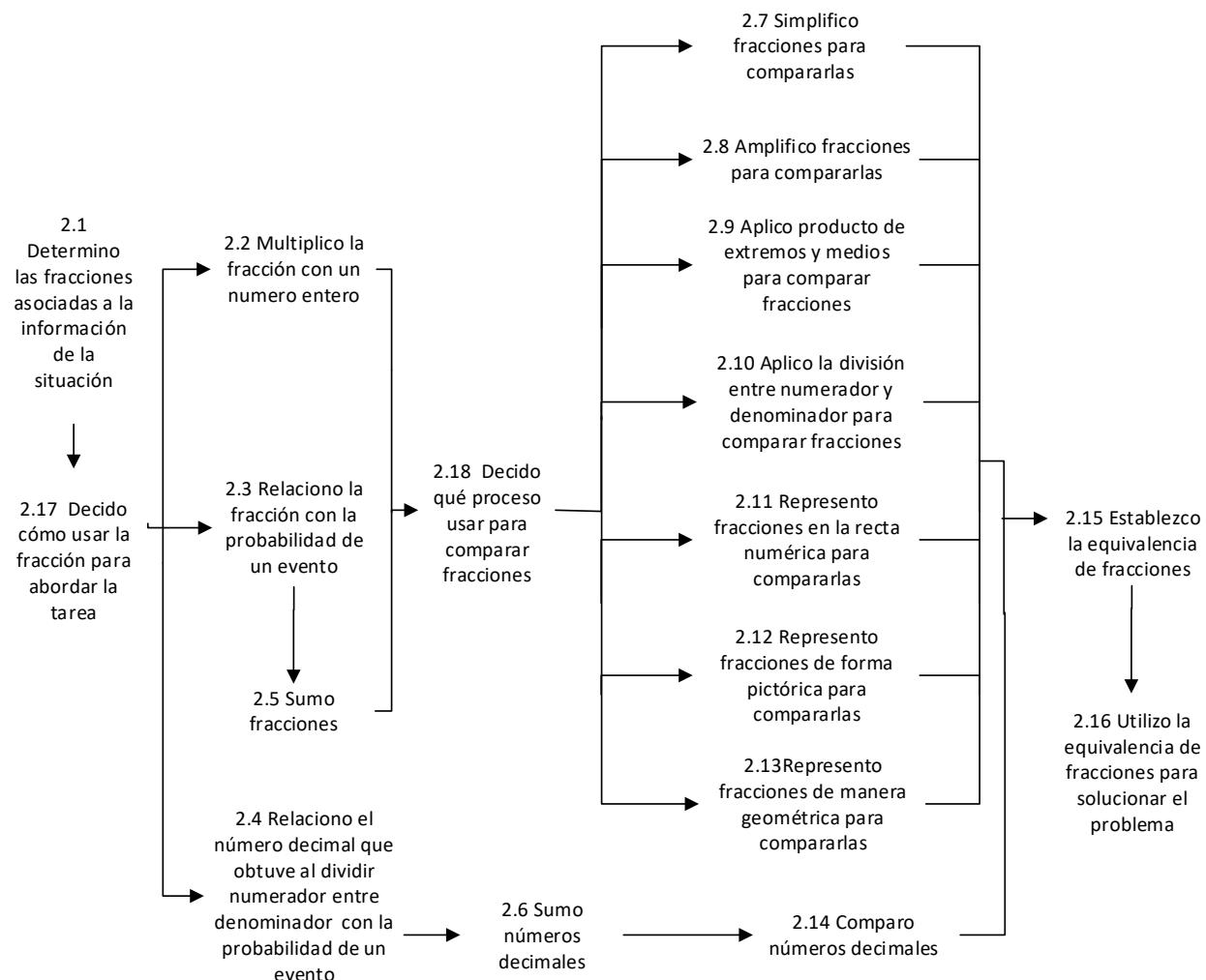


Figura 5. Grafo de criterios de logro del segundo objetivo

En primer lugar, planteamos que el estudiante interpreta y extrae las fracciones asociadas a la situación. Luego, decide qué estrategia usar para resolver la tarea. La parte superior del grafo tiene en cuenta procedimientos relacionados con el uso de fracción como operador. La parte media tiene en cuenta acciones relacionadas con el uso de la fracción como parte todo. La parte inferior incluye procedimientos relacionados con el uso de la fracción como cociente. Finalmente, el esquema termina con los criterios de logro en los que se establece la equivalencia, se interpreta y da significado con el contexto de situación para solucionar la tarea.

3. ESQUEMA GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En el siguiente apartado, presentamos el esquema general de la unidad didáctica para el tema fracciones equivalentes positivas. Mostramos la cantidad de tareas de aprendizaje para cada objetivo

y la cantidad de sesiones para desarrollar cada tarea. En la tabla 4, presentamos el esquema de la unidad didáctica.

Tabla 4
Estructura del nuevo diseño

Sesión	Actividad	Tiempo (minutos)
1	Presentación del tema	50
	Tarea diagnóstica	
2	Realimentación de la tarea diagnóstica	50
	Presentar el objetivo y meta de la tarea 1.1	10
	Presentar la tarea 1.1 y el material	5
3	Desarrollar la tarea 1.1 de forma individual	15
	Compartir resultados iniciales de la tarea 1.1 en grupos pequeños	5
	Compartir en gran grupo la tarea 1.1	15
	Devolver trabajos realimentados de la tarea 1.1	20
4	Formalizar ideas e introducir el concepto de fracción equivalente (cierre de la tarea 1.1)	30
	Presentar el objetivo y meta de la tarea 1.2	5
	Presentar la tarea 1.2 y el material	5
5	Desarrollar la tarea 1.2 en grupos	25
	Compartir en gran grupo la tarea 1.2	15
	Fracciones equivalentes	16

Tabla 4
Estructura del nuevo diseño

Sesión	Actividad	Tiempo (minutos)
	Devolver trabajos realimentados de la tarea 1.2	20
6	Formalizar aspectos en lo relacionado con la representación gráfica y las fracciones equivalentes	30
	Presentar el objetivo y meta de la tarea 2.1	10
	Presentar la tarea 2.1	5
7	Desarrollar la tarea 2.1 de forma grupal	25
	Compartir en gran grupo la tarea 2.1	10
	Devolver trabajos realimentados de la tarea 2.1	20
8	Formalizar aspectos en lo relacionado con la representación gráfica y las fracciones equivalentes	30
	Presentar la tarea 2.2	5
9	Desarrollar la tarea 2.2 de forma grupal	30
	Compartir en gran grupo la tarea 2.2	15
	Devolver trabajos realimentados de la tarea 2.2	20
10	Formalizar la idea de modelar situaciones a partir de fracciones equivalentes	30
11	Examen final	50

Tabla 4
Estructura del nuevo diseño

Sesión	Actividad	Tiempo (minutos)
12	Realimentación de los resultados del examen y de la calificación global	50

La unidad didáctica está diseñada para 12 sesiones de 50 minutos cada una. Por ejemplo, para la sesión 1, presentamos a los estudiantes el tema que pretendemos abordar y comentamos los propósitos que buscamos desarrollar con la unidad didáctica; luego, se inicia con una actividad que busca indagar por conocimientos previos; finalmente, recogemos el material.

Estructuramos el diseño de la unidad didáctica en cuatro momentos (Gomez, F, & Velazco, 2018). El primero tiene en cuenta la tarea diagnóstica y su discusión; el segundo consiste en la implementación de las tareas de aprendizaje; el tercero está compuesto por el examen final; finalmente, proponemos una sesión de cierre.

4. TAREA DIAGNÓSTICA

A continuación, presentamos la actividad diagnóstica de nuestra unidad didáctica. Con la actividad, pretendemos indagar si los estudiantes poseen los conocimientos previos necesarios para abordar las tareas de aprendizaje y, en caso de que no sea así, proporcionarles las ayudas adecuadas que les permitan desarrollar las tareas (Benavides, Chaves, & Sarmiento, 2020). La tarea diagnóstica está conformada por 11 preguntas, 10 abiertas y 1 de selección múltiple. Diseñamos las preguntas a partir del listado de conocimientos previos que presentamos en la tabla 5.

Tabla 5
Listado de conocimientos previos del tema Fracciones equivalentes positivas

CP	Descripción
1	Identificar términos de la fracción
2	Identificar si dos fracciones son mayores, menores o iguales
3	Identificar fracciones propias
4	Identificar fracciones impropias
5	Identificar fracciones irreductibles
6	Identificar fracciones reductibles
7	Identificar fracciones unitarias (con numerador uno y denominador entero positivo)
8	Identificar las fracciones presentes en una situación

Tabla 5

Listado de conocimientos previos del tema Fracciones equivalentes positivas

CP	Descripción
9	Representar fracciones geométricamente
10	Representar fracciones gráficamente (recta numérica)
11	Representar fracciones numéricamente (decimal)
12	Representar fracciones pictóricamente
13	Conocer el algoritmo de la suma de fracciones
14	Conocer el algoritmo de la multiplicación de fracciones
15	Realizar divisiones del numerador y denominador entre el mismo entero positivo
16	Interpretar la fracción como operador
17	Interpretar la fracción como parte todo
18	Interpretar la fracción como cociente
19	Determinar la probabilidad de eventos
20	Identificar fracciones iguales a la unidad

Nota. CP: conocimientos previos.

Los conocimientos previos que se listan en la tabla 5 tienen en cuenta los términos, los tipos y las interpretaciones de la fracción, algunas representaciones de la fracción y los algoritmos de suma y multiplicación de fracciones.

La actividad diagnóstica se puede desarrollar en dos sesiones. En la primera, los estudiantes resuelven las preguntas de manera individual. En la segunda, el docente socializa las respuestas y aclara dudas de la actividad. Para el desarrollo de la tarea diagnóstica, se entrega a cada estudiante la actividad que deben resolver de manera individual. Sugerimos que el profesor presente el propósito de la tarea y la manera como se va a abordar. Con la tarea diagnóstica, tenemos en cuenta las siguientes representaciones: (a) geométrica, en la interpretación del diagrama de torta o la superficie de una piscina; (b) gráfica, cuando el estudiante ubica fracciones en la recta numérica, y (c) numérica, cuando reconoce los tipos y las interpretaciones de la fracción.

Durante el desarrollo de la tarea diagnóstica, es posible que los estudiantes incurran en algunos errores. Por ejemplo, el estudiante puede confundir el numerador con el denominador y el denominador con el numerador; suponer que una fracción es mayor que otra, cuando los números de la primera son mayores que los de la segunda; o asociar la fracción propia como la fracción en la que el numerador es mayor que el denominador. Finalizada la actividad, el docente comparte los resultados, con el propósito de aclarar dudas, superar errores y fortalecer los conocimientos previos. A continuación, presentamos la formulación de la tarea diagnóstica.

Pregunta 1

Completa los espacios con la palabra que corresponda.

En la fracción $9/12$ al número 9 se le conoce como el _____, mientras que al número 12 se le llama _____.

Pregunta 2

A continuación, mostramos la cantidad de agua de tres alimentos.

Alimento	Contenido de agua
Pollo asado	$\frac{147}{500}$
Carne de res	$\frac{27}{50}$
Galleta	$\frac{2}{25}$

¿Cuál es el alimento con mayor cantidad de agua?

Pregunta 3

Relaciona con líneas las columnas de decimales, fracciones y tipos de fracción. Un elemento de la columna central puede relacionarse con varios de la derecha.

1	$1/4$	Propia
2,5	$3/6$	Impropia
0,25	$5/2$	Igual a la unidad
0,5	$7/7$	Unitaria

Pregunta 4

Ten en cuenta las fracciones que se presentan a continuación. Encuentra la fracción irreductible de cada una (si es posible).

$24/64$ $57/12$ $45/24$

Pregunta 5

Sara tiene una rutina antes de salir a trabajar, tarda media hora en bañarse y la ponerse ropa, un cuarto de hora en desayunar y bañarse los dientes y una hora y media en transportarse de

su casa al trabajo. ¿Cuánto tiempo le toma a Sara desde que se levanta hasta que llega a su trabajo?

Pregunta 6

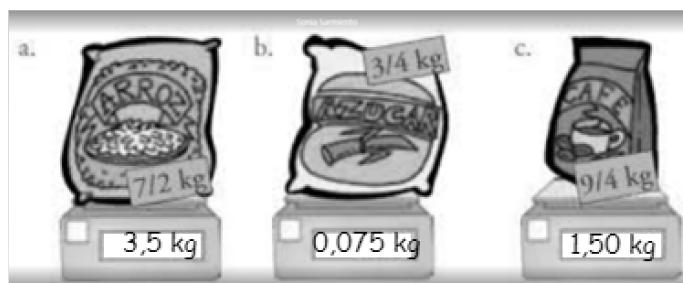
Liliana trabaja 48 horas a la semana. Si la semana pasada estuvo enferma y solo pudo trabajar $\frac{1}{3}$ de su carga laboral, ¿cuántas horas trabajó esa semana?

Pregunta 7

Ubica las siguientes fracciones en la recta numérica: $\frac{5}{4}$ y $\frac{2}{3}$.

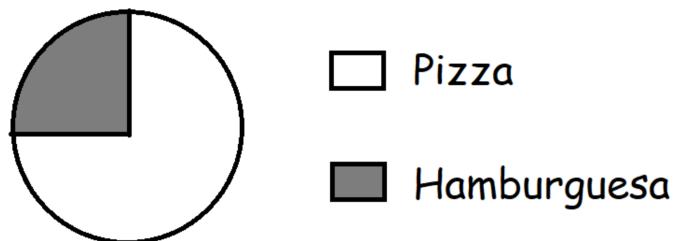
Pregunta 8

¿Cuáles productos de la figura tiene la etiqueta correcta? Márcalos en la figura.



Pregunta 9

La siguiente gráfica representa la información sobre la preferencia de comidas rápidas.



Determina cual de las afirmaciones es verdadera

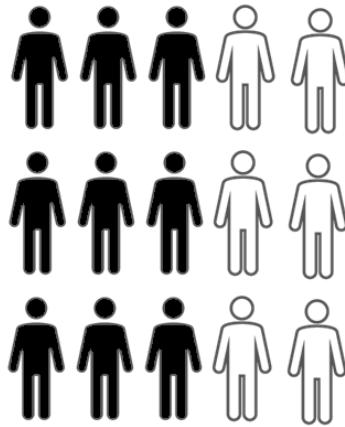
$\frac{1}{4}$ de las personas prefiere la hamburguesa

$\frac{1}{3}$ de las personas prefiere la pizza

$\frac{4}{1}$ de las personas prefiere la hamburguesa

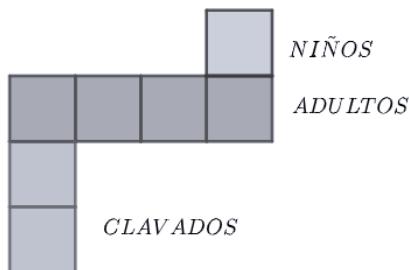
Pregunta 10

A una fiesta, las personas asisten vestidas de blanco y negro, como se muestra en la figura. Durante la fiesta, el organizador elige al azar una persona para recibir un premio. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona que se elija esté vestida de negro?



Pregunta 11

La siguiente figura representa la superficie de una piscina. Esta piscina está distribuida en siete zonas cuadradas de igual tamaño: una zona para los niños, cuatro zonas para los adultos y dos zonas para practicar clavados. Las zonas están demarcadas con cuerdas plásticas.



Determina la fracción que representa cada zona.

5. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL PRIMER OBJETIVO

A continuación, presentamos las tareas de aprendizaje del primer objetivo de nuestra unidad didáctica. Para cada tarea, (a) realizamos una descripción, (b) mencionamos los errores en los que pueden suceder, (c) mostramos el grafo de criterios de logro de la tarea, (d) describimos la actuación del profesor, (e) realizamos sugerencias metodológicas y (f) establecemos la manera en que se evalúa el desarrollo de la tarea (Benavides, Chaves, & Sarmiento, 2020).

5.1. Tarea 1.1 Rompecabezas de regletas

Con la tarea 1.1, pretendemos generar un acercamiento a la equivalencia de fracciones desde la relación entre las representaciones numérica, geométrica y manipulativa de la fracción. Además,

buscamos introducir procedimientos relacionados con la comparación de fracciones para establecer su equivalencia.

Descripción de la tarea

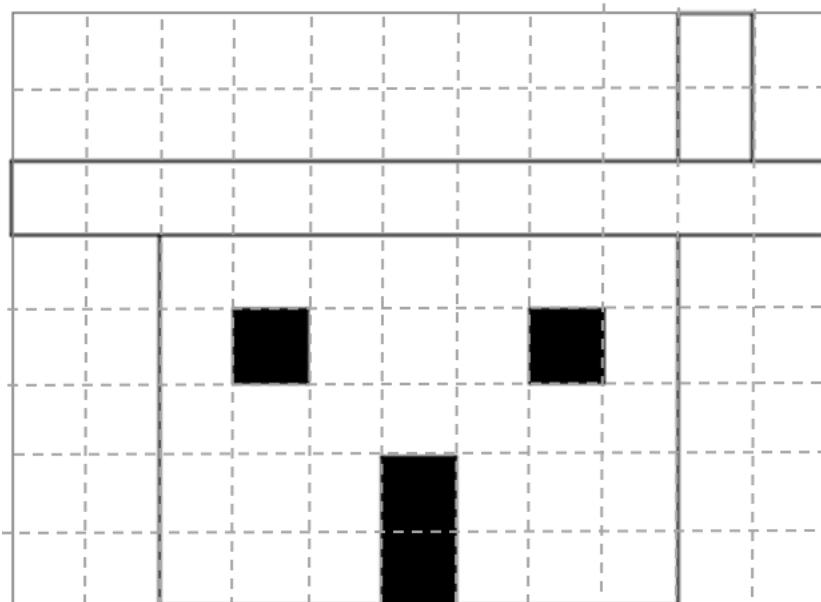
A continuación, presentamos los elementos que se deben tener en cuenta para implementar la tarea 1.1.

Requisitos. La tarea requiere que el estudiante tenga conocimiento sobre los elementos de la fracción, la interpretación de la fracción como parte de un todo, la suma de decimales, y las representaciones numérica y geométrica de fracciones.

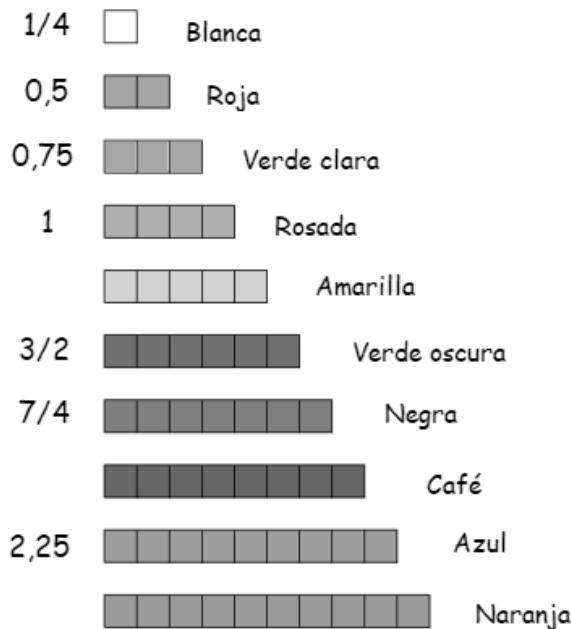
Aportes de la tarea al primer objetivo. Con la tarea 1.1, buscamos que los estudiantes reconozcan relaciones entre las representaciones manipulativa, geométrica y numérica de la fracción, expresa da como decimal para establecer su equivalencia.

Formulación. La formulación de la tarea incluye una explicación por parte del profesor sobre la relación entre las regletas, cómo se va a construir la figura y cómo se determina el decimal asociado a cada construcción. El enunciado de la tarea es el siguiente.

Se quiere hacer la construcción que aparece en la imagen que se muestra a continuación.



Para esto, se dispone de las siguientes regletas. Puedes usar la cantidad de cada color que consideres necesaria.



Presenta dos formas para construir la casa (usando diferentes regletas) sin cubrir las ventanas y la puerta. Establece el decimal que se asocia a cada regleta y determina el número que representa cada construcción. ¿Qué relación encuentras entre las cantidades que obtuviste? Justifica dicha relación.

Reúnete con un compañero, comparte las construcciones y compara la relación que encontraste.

Conceptos y procedimientos. Los conceptos que se involucran en la tarea son el número decimal, los términos, los tipos y la clasificación de la fracción. Los procedimientos que se tienen en cuenta en la tarea se relacionan con la adición y la comparación de decimales.

Sistemas de representación que se activan. En la tarea, se tiene en cuenta el sistema de representación manipulativo a partir del uso de las regletas; el sistema de representación geométrico, cuando se realiza la construcción de la casa; y el sistema de representación numérico, a partir de la asociación y comparación de los decimales que representan las regletas.

Contexto PISA en el que se sitúa la tarea. Todos los elementos de la tarea 1.1 pertenecen al mundo de las matemáticas. Por esta razón, la hemos clasificado en el contexto científico propuesto en el marco conceptual PISA 2012.

Materiales y recursos. El recurso que tenemos en cuenta para la tarea son las regletas de Cuisenaire y las hojas con la formulación de la actividad.

Agrupamiento e interacción. Inicialmente, los estudiantes abordan la tarea de manera individual. En este momento, la comunicación se establece entre profesor y estudiante. Luego, los estudiantes se reúnen en parejas para compartir construcciones e ideas en torno a sus resultados, lo que genera

una comunicación entre ellos. Finalmente, se pone de manifiesto una interacción entre todos los estudiantes y el docente, para compartir las respuestas que se encontraron.

Temporalidad. La tarea se desarrolla en dos sesiones de 50 minutos. En la primera sesión, el profesor inicia con la presentación del objetivo y de la meta de la tarea, y explica la forma de trabajo (10 minutos). Explica el material con el que se va a trabajar y presenta la tarea (5 minutos). Los estudiantes, desarrollan la situación de forma individual (15 minutos) y luego se reúnen con un compañero para compartir los resultados (5 minutos). El profesor socializa las soluciones con todo el grupo (15 minutos). En la segunda sesión, se entregan los trabajos con la retroalimentación (20 minutos) y se formalizan las ideas para introducir el concepto de fracción equivalente (30 minutos).

Errores y ayudas

Los estudiantes pueden incurrir en errores al abordar la tarea. Consideramos que los errores más relevantes son asociar representaciones diferentes a la situación, usar números decimales que no corresponden con el cociente de fracciones para abordar la situación, sumar números decimales sin tener en cuenta el valor posicional, asumir la parte decimal como números enteros para comparar decimales y afirmar que dos fracciones no son equivalentes a pesar de que el cociente de cada una es igual. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 2. Para cada error, proponemos una ayuda. Por ejemplo, cuando el estudiante asocia representaciones diferentes a la situación, proponemos como ayuda la siguiente pregunta: ¿consideras que la información que identificaste corresponde a la representación que hay en la situación? Con esta pregunta, esperamos que el estudiante reflexione sobre el error en el que incurrió. El listado de ayudas se encuentra en el anexo 4.

Grafo de criterios de logro

En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro del primer objetivo. Destacamos con un recuadro los criterios de logro que los estudiantes pueden activar al resolver la tarea 1.1

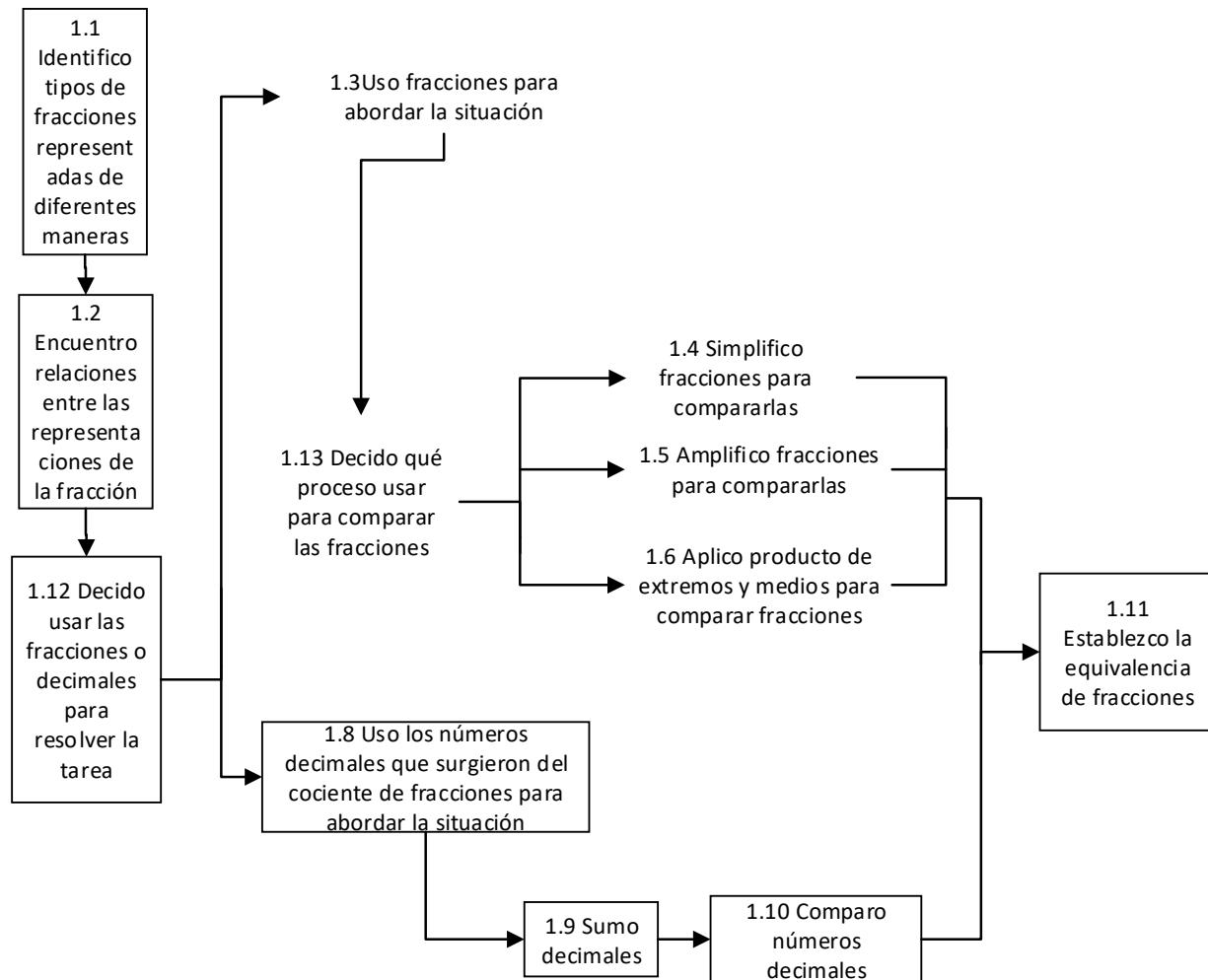


Figura 6. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.1

Para el desarrollo de la tarea, el estudiante identifica los tipos de fracciones representadas de diferentes maneras. En este momento, es posible que el estudiante asuma la fracción propia como la fracción en la que el numerador es más grande que el denominador, asocie representaciones diferentes a la situación o asuma la fracción impropia como la fracción en la que el denominador es más grande que el numerador. Para estos errores, proponemos ayudas como la pregunta ¿consideras que la información que identificaste corresponde a la representación que hay en la situación? El siguiente criterio de logro que el estudiante debe activar corresponde a las relaciones entre representaciones de la fracción, en las que puede suponer erróneamente que las regiones en la representación geométrica no se pueden asociar con el denominador y numerador de la fracción. Luego, el estudiante usa los números decimales que surgieron del cociente de fracciones para abordar la situación, pero puede incurrir en errores como usar números que no corresponden con la situación, sumar números decimales sin tener en cuenta todas las cifras o sumar decimales sin tener en cuenta

el valor posicional. Para estos errores proponemos preguntas (ayudas) como ¿por qué consideras que el proceso que usaste para sumar decimales es correcto? La acción final en el desarrollo de la tarea corresponde al establecimiento de la equivalencia (de las cantidades asociadas a las construcciones de la casa). En este momento, el estudiante puede incurrir en errores como afirmar que dos fracciones no son equivalentes a pesar de que el cociente de cada una es igual. Proponemos como ayuda la siguiente pregunta ¿por qué consideras que las cantidades son equivalentes si tienes resultados diferentes? Con las acciones anteriores, pretendemos que el estudiante identifique cuándo dos fracciones son equivalentes, al encontrar una correspondencia entre las representaciones manipulativa (regletas de Cuisenaire), geométrica (la imagen de la casa) y numérica (decimales que establece de cada construcción).

Actuaciones del profesor

El profesor presenta el propósito de la tarea y la forma como se va a abordar. Durante el desarrollo de la tarea, el profesor estará atento a implementar las ayudas cuando un estudiante incurra en un error. Al finalizar la actividad, el profesor genera un espacio para que cada grupo exponga los resultados obtenidos y las dificultades que tuvieron. Posteriormente, el profesor realimenta la tarea y formaliza la comparación de decimales para determinar la equivalencia de fracciones. Finalmente, el profesor introduce procedimientos de simplificación, amplificación y producto cruzado como estrategias adicionales para comparar fracciones y determinar su equivalencia.

Sugerencias y aclaraciones

Sugerimos al profesor proporcionar el tiempo necesario para que los estudiantes jueguen y exploren con las regletas, de manera que el docente favorezca la concentración en el momento de realizar la tarea. También, recomendamos que el profesor esté atento a las construcciones que realiza el estudiante, para evitar que elabore una construcción que no corresponda con el requerimiento; por ejemplo, que construya una figura distinta a la casa o que deje espacios. Además, sugerimos que el docente disponga del material suficiente para que cada estudiante pueda realizar la construcción que desee. Si no es posible que el profesor garantice la cantidad de material, recomendamos que use las regletas virtuales disponibles en el siguiente enlace <https://vedoque.com/html5/regletas/>.

Evaluación

Para evaluar la tarea 1.1, proponemos que el docente tenga en cuenta el actuar del estudiante durante el desarrollo de la tarea, particularmente cuando establece la relación entre las representaciones manipulativa, geométrica y numérica. Otro criterio de evaluación importante tiene que ver con la relación que el estudiante establece entre las cantidades asociadas a las dos construcciones. Finalmente, consideramos relevante que el profesor tenga en cuenta los errores en los que incurre el estudiante.

5.2. Tarea 1.2 Saltos

Con la tarea 1.2, buscamos que el estudiante reconozca fracciones en su representación gráfica y use procedimientos de amplificación, simplificación o producto de extremos y medios para determinar su equivalencia.

Descripción de la tarea

A continuación, presentamos los elementos que se deben tener en cuenta para implementar la tarea 1.2.

Requisitos. La tarea requiere utilizar conocimientos relacionados con la representación numérica de la fracción (como racional a/b) y algoritmos de simplificación, amplificación y producto cruzado.

Aportes de la tarea al primer objetivo. Con la tarea 1.2, buscamos que los estudiantes reconozcan relaciones entre las representaciones gráfica y numérica de la fracción, expresada de la forma a/b para establecer su equivalencia.

Formulación. Si la implementación es presencial, debemos copiar el archivo de GeoGebra en los computadores de la institución. Si la modalidad es virtual, debemos garantizar el envío del archivo a todos los estudiantes. A continuación, presentamos la formulación de la tarea.

Ingresa al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/j8gztxsm>. En el applet de GeoGebra, se muestran las distancias que recorren tres clases de animales, a partir de los saltos que dan. Mueve los deslizadores que representan los animales y observa los saltos que da cada uno.

Determina un punto de encuentro de los tres animales y valida, a partir de un procedimiento de comparación de fracciones, que ese sí es un punto donde coinciden todos.

Conceptos y procedimientos. Los conceptos que involucra la tarea son los términos, los tipos y la clasificación de la fracción. Los procedimientos que se tienen en cuenta en la tarea son la amplificación, la simplificación y el producto cruzado.

Sistemas de representación que se activan. En la tarea, se tiene en cuenta el sistema de representación gráfico, a partir de los puntos (en la recta numérica) relacionados con el desplazamiento de los animales, y el sistema de representación numérico, a partir de la asociación y comparación de las fracciones que representan los saltos de los animales.

Contexto PISA en el que se sitúa la tarea. Todos los elementos de la tarea 1.2 pertenecen al mundo de las matemáticas. Por esta razón, la hemos clasificado en el contexto científico propuesto en el marco conceptual PISA 2012.

Materiales y recursos. Los recursos que requerimos para el desarrollo de la tarea son el dispositivo electrónico (computador, celular o tableta) y el applet diseñado en Geogebra.

Agrupamiento e interacción. Los estudiantes inician la tarea en parejas. En este momento, la comunicación se establece entre profesor y parejas de estudiantes. Finalmente, todos los estudiantes y el docente interactúan para compartir las respuestas que surgieron.

Temporalidad. La tarea se desarrolla en dos sesiones de 50 minutos. En la primera sesión, el profesor inicia con la presentación del objetivo y la meta de la tarea, y comenta la forma de trabajo (5 minutos). Explica el material con el que se va a trabajar y presenta la tarea (5 minutos). Los estudiantes, desarrollan la situación en parejas (25 minutos). El profesor, comparte las soluciones con todo el grupo (15 minutos). En la segunda sesión, el profesor devuelve los trabajos revisados (20

minutos) y formaliza aspectos relacionados con la representación gráfica y las fracciones equivalentes (30 minutos).

Errores y ayudas

Consideramos que los errores más relevantes al desarrollar la tarea son asociar representaciones diferentes a la situación; usar fracciones que no corresponden con los saltos de cada animal; y amplificar, simplificar y realizar producto cruzado, al usar algoritmos diferentes. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 2. Para cada error, sugerimos una ayuda. Por ejemplo, si el estudiante simplifica sin llegar a la fracción irreductible, proponemos como ayuda preguntarle si está seguro de que no puede seguir dividiendo. Con esto, buscamos que el estudiante reflexione, retome la simplificación y reconozca que puede seguir dividiendo para reducir aún más la fracción. El listado de ayudas de la tarea 1.2 se encuentra en el anexo 4.

Grafo de criterios de logro

En la figura 7, presentamos el grafo de criterios de logro del primer objetivo. Destacamos con un recuadro los criterios de logro que los estudiantes pueden activar al resolver la tarea Saltos.

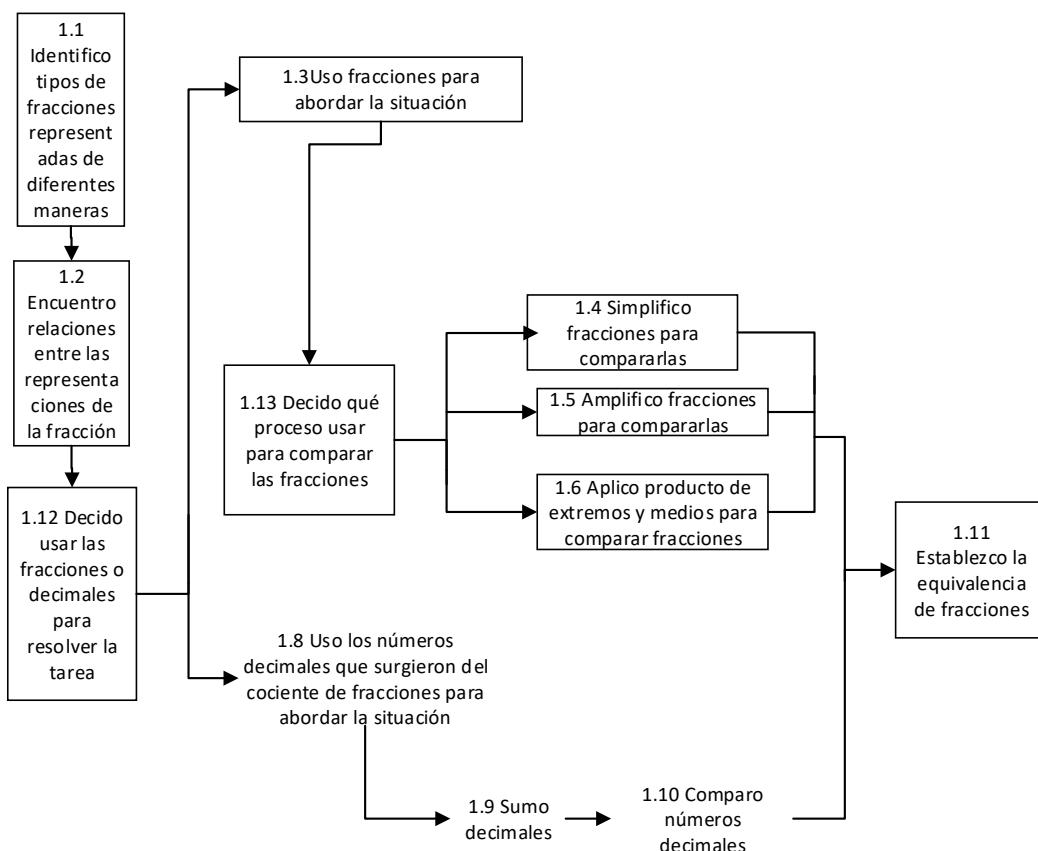


Figura 7. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.2

Para el desarrollo de la tarea, el estudiante identifica los tipos de fracciones representadas de diferentes maneras y encuentra relaciones entre representaciones de la fracción. Luego, usa las fracciones asociadas a los saltos de los animales para compararlas, a partir de la simplificación, amplificación o producto de extremos y medios. En este momento, el estudiante puede incurrir en errores operativos (por ejemplo, simplificar dividiendo sólo en el numerador o solo en el denominador, y realizar el producto cruzado de manera directa, numerador por numerador y denominador por denominador). Para estos errores proponemos las siguientes ayudas: ¿qué fracción cambia a medida que mueves el deslizador?, ¿qué animal se mueve si se modifica el deslizador 1, 2, 3? y ¿se podría dividir tanto el numerador y el denominador por un mismo número? Finalmente, en el criterio de logro que corresponde al establecimiento de la equivalencia, el estudiante puede afirmar que dos fracciones no son equivalentes a pesar de que se ubican en el mismo punto. Para superar este error, proponemos retomar los saltos en Geogebra, de manera que el estudiante evalúe las fracciones asociadas a saltos que se ubican en el mismo punto. Con las acciones anteriores, pretendemos que el estudiante identifique cuándo dos fracciones son equivalentes al encontrar una correspondencia entre las representaciones gráfica (puntos en la recta numérica) y numérica (fracciones que determinan el desplazamiento de cada animal).

Actuaciones del profesor

El profesor presenta el propósito de la tarea y la forma como se va a abordar. Durante el desarrollo de la tarea, el docente estará atento a implementar las ayudas cuando un estudiante incurra en un error y a motivarlos a que comparten sus ideas en el trabajo por parejas. Al finalizar la tarea, el profesor genera un espacio para que cada grupo exponga los resultados obtenidos y las dificultades que tuvieron. Posteriormente, el profesor retroalimenta la tarea y formaliza la comparación de fracciones para determinar su equivalencia, al usar diferentes estrategias (algoritmos y representaciones).

Sugerencias y aclaraciones

Sugerimos que el profesor verifique que cada grupo (pareja) tenga acceso a la tarea en GeoGebra. También recomendamos que el docente proporcione el tiempo necesario para que los estudiantes exploren la herramienta, puedan ver los cambios que realizan al mover los deslizadores y que se asegure que los estudiantes comprendan el uso de la herramienta. Finalmente sugerimos que el profesor esté pendiente de cada pareja de estudiantes al desarrollar la actividad.

Evaluación

Para evaluar la tarea 1.2, proponemos que el docente tenga en cuenta el actuar del estudiante durante el desarrollo de la tarea, particularmente cuando establece la relación entre la representación gráfica y numérica. También, es necesario que el profesor esté atento a las participaciones que realizan los estudiantes en la socialización con todo el grupo. Finalmente, sugerimos que el docente tenga en cuenta las soluciones escritas que presentan los estudiantes, para identificar los errores en los que incurrieron.

6. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL SEGUNDO OBJETIVO

A continuación, presentamos las tareas de aprendizaje del segundo objetivo de nuestra unidad didáctica (Benavides, Chaves, & Sarmiento, 2020). Para cada tarea, (a) realizamos una descripción, (b) mencionamos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes, (c) mostramos el grafo de criterios de logro de la tarea, (d) describimos la actuación del profesor, (e) realizamos sugerencias metodológicas y (f) establecemos la manera en que se evalúa el desarrollo de la tarea.

6.1. Tarea 2.1 Urnas

Con la tarea, pretendemos que el estudiante tenga un acercamiento a la modelación de situaciones, a partir de un problema relacionado con la probabilidad de un evento y que proponga conclusiones que le permitan tomar decisiones con base en la equivalencia de fracciones.

Descripción de la tarea

A continuación, presentamos los elementos que se deben tener en cuenta para implementar la tarea 2.1.

Requisitos. Para la solución de la tarea, es necesario que el estudiante tenga conocimientos relacionados con las fracciones propias, la probabilidad de eventos simples desde su representación decimal o como fracción, la suma de fracciones y decimales, el producto cruzado, y la amplificación y la simplificación de fracciones.

Aportes de la tarea al segundo objetivo. Con la tarea, buscamos que los estudiantes extraigan información de una situación dada y determinen la probabilidad de un evento, con el uso de fracciones o decimales. Luego, buscamos que los estudiantes determinen la equivalencia de probabilidades para resolver la situación.

Formulación. Presentamos la tarea en una hoja impresa, con el propósito de que el estudiante pueda escribir las soluciones allí mismo. Además, se permite el uso de la calculadora para los cálculos que se requieran. El enunciado de la tarea es el siguiente.

En grado séptimo, se sortean entradas a un parque de diversiones. Para esto, el estudiante contará con dos urnas que contienen balotas de diferentes colores. La primera urna tiene 1 balota negra, 1 azul y 6 rojas. La segunda tiene 3 balotas negras, 3 azules y 18 rojas. El estudiante debe seleccionar una de las dos urnas disponibles y extraer una balota. Gana la entrada si la balota que se extrae es negra o azul. ¿Cuál de las dos urnas elegirías para hacer la extracción?
Justifica la respuesta.

Conceptos y procedimientos. Los conceptos que se involucran en la tarea son fracción propia, probabilidad clásica y números decimales. Los procedimientos que se tienen en cuenta en la tarea se relacionan con la suma de fracciones y decimales, y la comparación de decimales y fracciones, a partir de las representaciones, la amplificación, la simplificación y el producto cruzado.

Sistemas de representación que se activan. En la tarea, se tienen en cuenta los sistemas de representación numérico, gráfico, pictórico y geométrico, cuando el estudiante decide comparar fracciones para establecer su equivalencia.

Contexto PISA en el que se sitúa la tarea. La tarea se centra en una actividad propia del individuo y su grupo de iguales, como lo es el sorteo de un premio. Por esta razón, la hemos clasificado en el contexto personal propuesto en el marco conceptual PISA 2012.

Materiales y recursos. Los recursos que tenemos en cuenta para la tarea son la calculadora y la hoja con la formulación de la actividad.

Agrupamiento e interacción. En un primer momento, los estudiantes responden la tarea por parejas. Durante el desarrollo de la tarea, se mantiene una comunicación constante entre el profesor y los estudiantes. En la medida en que los estudiantes planteen preguntas, el docente interactúa con cuestionamientos que contribuyan a la estrategia que usaron para resolver la tarea. Además, el docente estará atento a que la pareja establezca una conclusión, al relacionar el contexto de la tarea con la equivalencia de fracciones asociadas a la probabilidad. Al finalizar la tarea, se comparten las respuestas a nivel de la clase (todos los compañeros y profesor).

Temporalidad. La tarea se desarrolla en dos sesiones de 50 minutos. En la primera sesión, el profesor inicia con la presentación del objetivo y de la meta de la tarea (10 minutos) y presenta la tarea (5 minutos). Los estudiantes desarrollan la situación por parejas (25 minutos) y luego presentan las respuestas a todos sus compañeros (10 minutos). En la segunda sesión, se entregan los trabajos con la retroalimentación (20 minutos) y se formalizan las ideas en lo relacionado con la extracción de la información, la elección de la urna y el uso de fracciones equivalentes para tal decisión (30 minutos).

Errores y ayudas

En la tarea, los errores más comunes en los que un estudiante puede incurrir están asociados con la matematización y la extracción de información de una situación; la probabilidad desde su representación decimal y como fracción; y las estrategias para comparar fracciones y el significado de la equivalencia en términos del problema. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 2. Para cada error, proponemos una ayuda. Por ejemplo, si el estudiante asume la fracción sólo como la parte de un todo, proponemos como ayuda preguntarle si recuerda cómo se puede escribir la división. Con esto, buscamos que el estudiante reflexione e identifique que un número decimal es el resultado de dividir numerador entre denominador. El listado de ayudas se encuentra en el anexo 4.

Grafo de criterios de logro

En la figura 8, presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo. Destacamos con un recuadro los criterios de logro que los estudiantes pueden activar al resolver la tarea.

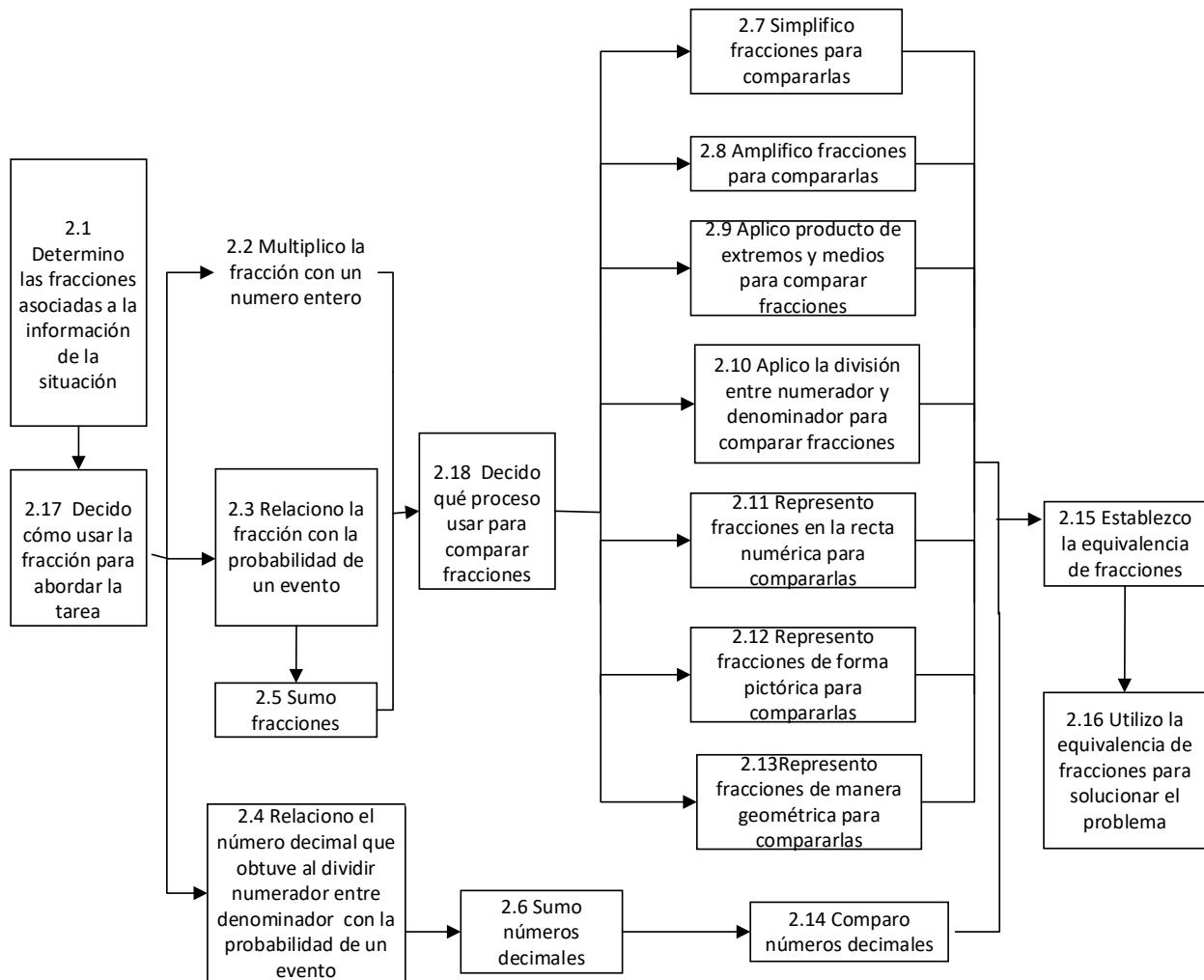


Figura 8. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.1

Para el desarrollo de la tarea, el estudiante debe activar acciones relacionadas con la identificación de la información de la situación y la determinación las fracciones implícitas. No obstante, el estudiante puede plantear fracciones que no corresponden con la situación o extraer, del enunciado del problema, fracciones o información diferente a la necesaria. Para estas imprecisiones, proponemos ayudas como la siguiente pregunta: ¿consideras que la fracción que escribiste tiene en cuenta las cantidades que se presentan en la situación? Posteriormente, es necesario que el estudiante use los decimales o las fracciones asociadas a la probabilidad, para sumarlas y compararlas, a partir de procedimientos (amplificación, simplificación, producto cruzado o división) o representaciones (gráfica, pictórica o geométrica). Sin embargo, el estudiante puede incurrir en errores como tomar el numerador como los casos posibles y el denominador como los casos favorables, amplificar al multiplicar solo en el numerador o simplificar al dividir solo en el denominador. Proponemos las siguientes preguntas como ayuda para superar las dificultades: ¿consideras que la

fracción que escribiste tiene en cuenta las cantidades que se presentan en la situación?, ¿tiene sentido que la probabilidad de un evento sea mayor que 1?, ¿tiene sentido que haya más casos favorables que casos posibles? y ¿por qué consideras que el proceso que usaste es correcto? Finalmente, el estudiante debe establecer la equivalencia de fracciones, pero puede afirmar que dos fracciones son equivalentes, aunque les correspondan fracciones irreductibles diferentes; sustentar su respuesta con resultados de la situación que no corresponden; o determinar la equivalencia de fracciones, pero no interpretarla de acuerdo con el contexto del problema. Las ayudas para cada error pueden consultarse en el anexo 4.

Actuaciones del profesor

El profesor presenta el propósito de la tarea y la forma como se va a abordar. Durante el desarrollo de la tarea, el profesor estará atento a implementar las ayudas cuando un estudiante incurra en un error. Al finalizar la actividad, el profesor genera un espacio para que cada grupo exponga los resultados obtenidos y las dificultades que tuvieron. Posteriormente, el profesor retroalimenta la tarea y destaca el uso de las fracciones equivalentes en la solución de situaciones del contexto del estudiante.

Sugerencias y aclaraciones

Para que el estudiante sea ordenado y pueda extraer mejor la información de la situación, sugerimos al profesor que solicite a los estudiantes resaltar (en la formulación de la tarea) y escribir, en una hoja, la información relacionada con las cantidades (números). También, recomendamos al profesor que esté atento a la noción de probabilidad clásica y los procedimientos relacionados con la comparación de fracciones. Si es necesario, debe hacer aclaraciones al respecto. Finalmente, consideramos que es importante que el docente aclare a los estudiantes que la tarea no consiste simplemente en determinar equivalencia de fracciones, sino que, a partir de esta relación, se dé respuesta a la situación.

Evaluación

Para evaluar la tarea 2.1, proponemos que el docente tenga en cuenta las acciones del estudiante, en lo que respecta a la extracción de información, la comparación de fracciones y el uso de la equivalencia de fracciones en la solución del problema. Finalmente, consideramos relevante que el profesor tenga en cuenta los errores en los que incurre el estudiante.

6.2. Tarea 2.2 Ejercicios de matemáticas

Con la tarea, pretendemos que el estudiante use la fracción como operador, desarrolle la capacidad argumentativa y le dé sentido a la equivalencia de fracciones en la solución situaciones propias de su contexto.

Descripción de la tarea

A continuación, presentamos los elementos que se deben tener en cuenta para implementar la tarea 2.2.

Requisitos. Para la solución de la tarea, es necesario que el estudiante identifique los términos de la fracción, conozca el algoritmo de la multiplicación de un entero y una fracción, use la fracción

como un operador y determine la equivalencia de fracciones a partir de representaciones (gráfica, pictórica, geométrica) y algoritmos (producto cruzado, división de numerador entre numerador, amplificación y simplificación).

Aportes de la tarea al segundo objetivo. Con la tarea, buscamos que los estudiantes identifiquen las cantidades (fracciones y enteros) que intervienen en la situación, las relacionen, reconozcan que dos fracciones no equivalentes pueden convertirse en equivalentes si tienen connotación de operador (es decir, la equivalencia depende de los enteros por los cuales se multipliquen) y le den sentido a la equivalencia de fracciones en la solución de la situación.

Formulación. Presentamos la tarea en una hoja impresa, con el propósito de que el estudiante pueda escribir las soluciones allí mismo. Además, se permite el uso de la calculadora para las multiplicaciones de fracción y entero. El enunciado de la tarea es el siguiente.

El profesor propone 48 ejercicios de matemáticas, de los que se deben entregar la mitad. Camila y Diana deciden trabajar juntas, de manera que cada una resuelva la misma cantidad de ejercicios. Camila asegura que debe desarrollar la mitad de los ejercicios que deben entregar. Diana afirma que debe hacer exactamente la cuarta parte del total de los ejercicios. Las dos tienen la razón. ¿Cómo explicarías esta afirmación?

Conceptos y procedimientos. Los conceptos que se involucran en la tarea son la fracción como operador, los términos y los tipos de fracciones. Los procedimientos que se tienen en cuenta en la tarea se relacionan con la multiplicación y la comparación de fracciones (a partir de representaciones, amplificación, simplificación y producto cruzado).

Sistemas de representación que se activan. En la tarea, se tienen en cuenta los sistemas de representación numérico, gráfico, pictórico y geométrico, cuando el estudiante decide comparar fracciones para establecer su equivalencia.

Contexto PISA en el que se sitúa la tarea. La tarea se centra en una actividad propia del individuo y su grupo de iguales, como lo es el reparto. Por esta razón, la hemos clasificado en el contexto personal propuesto en el marco conceptual PISA 2012.

Materiales y recursos. El recurso que tenemos en cuenta para la tarea son la calculadora y la hoja con la formulación de la actividad.

Agrupamiento e interacción. En un primer momento, los estudiantes responden la tarea por parejas. Durante el desarrollo de la tarea, se mantiene una comunicación constante entre el profesor y los estudiantes. Al finalizar la tarea, se comparten las respuestas a nivel de la clase (todos los compañeros y profesor).

Temporalidad. La tarea se desarrolla en dos sesiones de 50 minutos. En la primera sesión, el profesor inicia con la presentación del objetivo y de la meta de la tarea (10 minutos) y presenta la tarea (5 minutos). Los estudiantes, desarrollan la situación por parejas (25 minutos) y luego comparten las respuestas a todos sus compañeros (10 minutos). En la segunda sesión, se entregan los trabajos con la retroalimentación (20 minutos) y se formalizan las ideas en lo relacionado con la identificación de cantidades en la situación, la fracción como operador y el uso de fracciones equivalentes en la solución de la tarea (30 minutos).

Errores y ayudas

En la tarea, los errores más comunes en los que un estudiante puede incurrir están asociados con la matematización y la extracción de información de una situación, la fracción como operador, las estrategias para comparar fracciones y el significado de la equivalencia en términos del problema. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 2. Para cada error, proponemos una ayuda. Por ejemplo, si el estudiante asume la fracción sólo como la parte de un todo, proponemos como ayuda preguntarle: ¿cuántos minutos hay en un cuarto de hora? Con esto, buscamos que el estudiante reflexione e identifique que debe multiplicar la fracción con un número entero (en este caso $1/4 \times 60$). El listado de ayudas se encuentra en el anexo 4.

Grafo de criterios de logro

En la figura 9, presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo. Destacamos con un recuadro los criterios de logro que los estudiantes pueden activar al resolver la tarea.

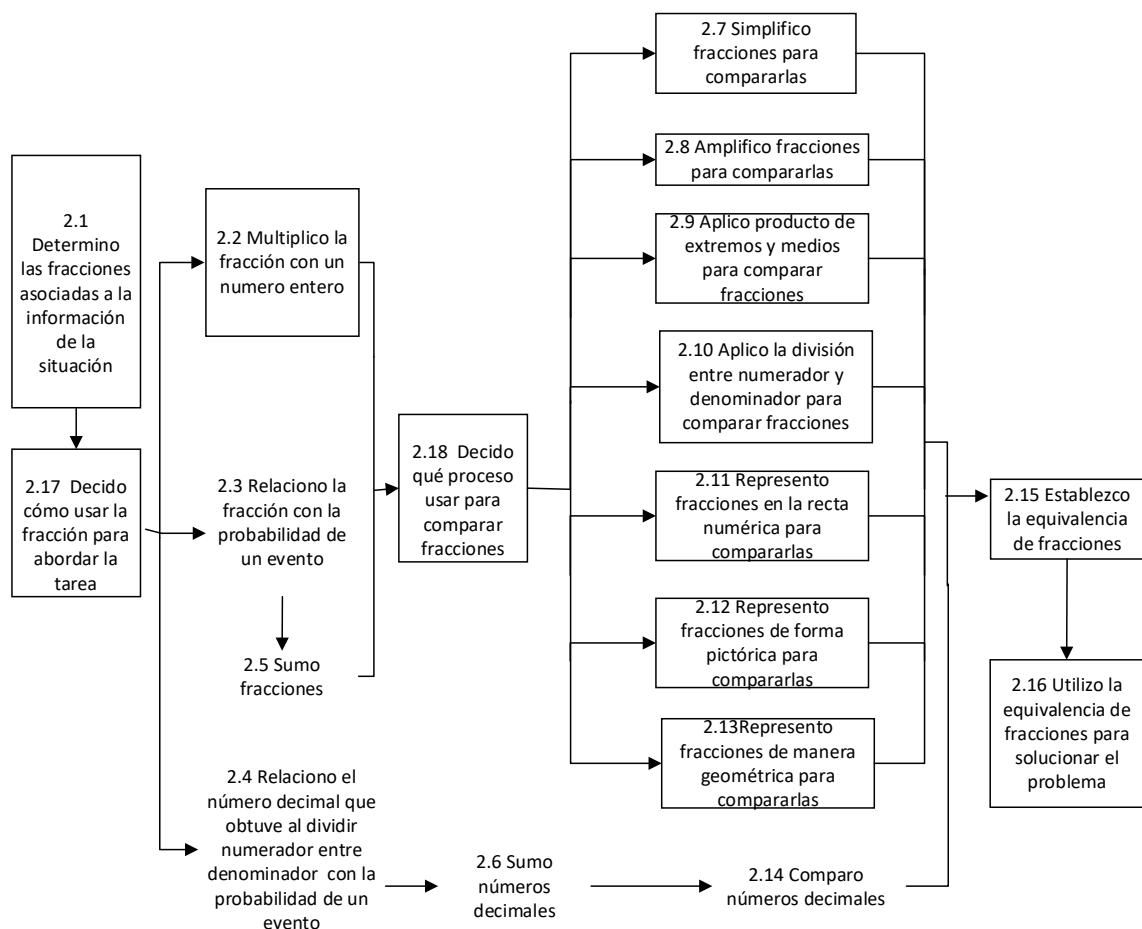


Figura 9. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.2

Para el desarrollo de la tarea, el estudiante debe activar acciones relacionadas con la identificación de la información de la situación y la determinación las fracciones implícitas. No obstante, el estudiante puede plantear fracciones que no corresponden con la situación o extraer, del enunciado del problema, fracciones o información diferente a la necesaria. Para estas imprecisiones, proponemos ayudas como la siguiente pregunta: ¿consideras que la fracción que escribiste tiene en cuenta las cantidades que se presentan en la situación? Posteriormente, es necesario que el estudiante multiplique el entero (correspondiente al número de preguntas) con las fracciones que extrajo, para luego comparar las fracciones resultantes, a partir de procedimientos (amplificación, simplificación, producto cruzado o división) o representaciones (gráfica, pictórica o geométrica). Sin embargo, el estudiante puede incurrir en errores como amplificar al multiplicar solo en el numerador o simplificar al dividir solo en el denominador. Proponemos las siguientes preguntas como ayuda para superar las dificultades: ¿consideras que la fracción que escribiste tiene en cuenta las cantidades que se presentan en la situación?, y ¿por qué consideras que el proceso que usaste es correcto? Finalmente, el estudiante debe establecer la equivalencia de fracciones, pero puede afirmar que dos fracciones son equivalentes, aunque les correspondan fracciones irreductibles diferentes; sustentar su respuesta con resultados de la situación que no corresponden; o determinar la equivalencia de fracciones, pero no interpretarla de acuerdo con el contexto del problema. Las ayudas para cada error pueden consultarse en el anexo 4.

Actuaciones del profesor

El profesor presenta el propósito de la tarea y la forma como se va a abordar. Durante el desarrollo de la tarea, el profesor estará atento a implementar las ayudas cuando un estudiante incurra en un error. Al finalizar la actividad, el profesor genera un espacio para que cada grupo exponga los resultados obtenidos y las dificultades que tuvieron. Posteriormente, el profesor realimenta la tarea y destaca el uso de las fracciones equivalentes en la solución de situaciones del contexto del estudiante.

Sugerencias y aclaraciones

Sugerimos al profesor que solicite a los estudiantes resaltar (en la formulación de la tarea) y escribir (en una hoja) la información relacionada con cantidades (fracciones y enteros). También, recomendamos al profesor que esté atento a la noción de fracción como operador (los estudiantes suelen confundirlo con número mixto) y los procedimientos relacionados con la comparación de fracciones. Finalmente, consideramos que es importante que el docente aclare a los estudiantes que la tarea no consiste simplemente en determinar equivalencia de fracciones, sino que responda a la pregunta de la situación.

Evaluación

Para evaluar la tarea 2.2, proponemos que el docente tenga en cuenta las acciones del estudiante, en lo que respecta a la extracción de información, la comparación de fracciones, el uso de la equivalencia de fracciones y la argumentación en la solución del problema. Finalmente, consideramos relevante que el profesor tenga en cuenta los errores en los que incurre el estudiante.

7. EXAMEN FINAL

Para evaluar el aprendizaje de la unidad didáctica, proponemos un examen final que se realiza en dos sesiones de 50 minutos cada una. En este examen, pretendemos determinar en qué medida los estudiantes logran comprender aspectos relacionados con las fracciones equivalentes positivas, a partir de los objetivos propuestos. El examen final está compuesto por cuatro tareas. Las tareas 1 y 2 permiten evaluar si el estudiante tiene en cuenta las relaciones entre las representaciones de las fracciones para establecer su equivalencia. Con las tareas 3 y 4, evaluamos si los estudiantes modelan situaciones que le den sentido al uso de fracciones equivalentes en la solución de problemas. Como apoyo a la evaluación del examen final, proponemos una rúbrica para determinar el nivel de desempeño de los estudiantes. La rúbrica presenta niveles de logro (superior, alto, básico, bajo), indicadores y errores asociados a los indicadores.

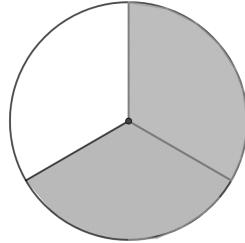
7.1. Tareas del examen final para el primer objetivo

A continuación, presentamos las tareas de evaluación asociadas al primer objetivo. Luego, mostramos la rúbrica con las que evaluaremos el grado en que los estudiantes han alcanzado objetivo.

Tarea de evaluación 1

En la siguiente tabla, se muestran diferentes fracciones. Representa una fracción equivalente a la dada, con base en la indicación de cada columna. En las casillas con la etiqueta “Explicación”, describe detalladamente de qué manera determinas que la fracción representada es equivalente a la dada.

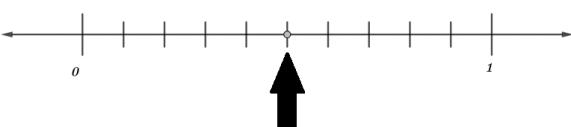
R. Gráfica	R. Geométrica	R. Numérica
	Explicación:	Explicación:

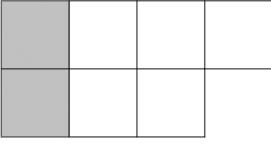
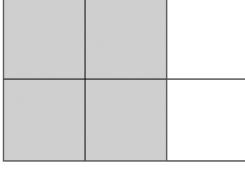
Explicación:		Explicación:
		$\frac{50}{40}$
Explicación:	Explicación:	

La primera tarea del examen final presenta una situación en la que el estudiante encuentra fracciones equivalentes en distintas representaciones, a partir de una representación dada. Con esta tarea, pretendemos determinar en qué medida el estudiante logra establecer la equivalencia de fracciones a partir de diferentes representaciones. Esta tarea se ubica en un contexto científico (Ministerio de educación, 2013), pues aborda elementos que pertenecen al mundo de las matemáticas.

Tarea de evaluación 2

A continuación, se muestran diferentes representaciones de la fracción. Encuentra aquellas que son equivalentes y explica por qué son equivalentes.

a) 	b) 7,5
c) 0,5	d)

	
e)	
f)	$\frac{12}{18}$
g)	
h)	
$\frac{15}{2}$	
Explicación:	

La segunda tarea del examen final presenta una situación en la que el estudiante relaciona diferentes representaciones que son equivalentes y describe detalladamente la estrategia que usa para resolver la tarea. Con esta tarea, pretendemos determinar en qué medida el estudiante logra establecer la equivalencia de fracciones a partir de diferentes representaciones. Esta tarea se ubica en un contexto científico (Ministerio de educación, 2013), pues aborda elementos que pertenecen al mundo de las matemáticas.

Rúbrica de evaluación del objetivo 1

En la tabla 6, presentamos los niveles de logro con sus respectivos indicadores, a partir de los criterios de logro del primer objetivo y los errores en que pueden incurrir los estudiantes cuando abordan las tareas 1 y 2.

Tabla 6
Niveles de logro e indicadores para el objetivo 1

Nivel de logro	Indicadores
Superior (4,6- 5,0)	El estudiante activa todos los criterios de logro de la estrategia usada para resolver las tareas (camino de aprendizaje) sin incurrir en errores.
Alto (4,1 – 4,5)	El estudiante incurre en un error menor, relacionado con la construcción o verificación de la equivalencia de fracciones desde lo operativo (E35-E46), que no le impiden llegar a establecer una relación de equivalencia entre fracciones.
Básico (3,7- 4,0)	El estudiante establece relaciones entre las diferentes representaciones de la fracción, pero pone de manifiesto que no comprende el significado de la equivalencia de fracciones, al incurrir en errores como E15-E18, E3, E62, E64, E65. El estudiante comprende el significado de la equivalencia de fracciones, pero no establece relaciones entre las diferentes representaciones de la fracción, al incurrir en errores como E9, E10, E56.
Bajo (1,0- 3,6)	El estudiante no establece relaciones entre las diferentes representaciones de la fracción, al incurrir en errores como E9-E14, E56-E61. Además, no comprende el significado de la equivalencia de fracciones, al incurrir en errores como E15-E18, E3, E62, E64, E65.

7.2. Tareas del examen final para el segundo objetivo

A continuación, presentamos las tareas de evaluación asociadas al segundo objetivo. Posteriormente, mostramos la rúbrica que permite calificarlo.

Tarea de evaluación 3

Para un cumpleaños, se compran tres tortas del mismo tamaño: una de chocolate que trae 8 porciones iguales; otra de vainilla que trae 10 porciones iguales; y una de arequipe que trae 12 porciones iguales. Luis se comió una porción de cada sabor, María se comió tres porciones de vainilla, Juan se comió tres porciones de arequipe y una de chocolate, y Camila se comió tres porciones de chocolate. ¿Quiénes comieron la misma cantidad de torta? Describe el paso a paso utilizado para resolver la situación.

La tercera tarea del examen final presenta una situación en la que el estudiante debe extraer la información para identificar las fracciones y, luego, establecer cuáles son equivalentes. Con esta

tarea, buscamos que el estudiante modele la situación problema y use la equivalencia de fracciones para dar solución a la situación. Ubicamos esta tarea en un contexto personal (Ministerio de educación, 2013).

Tarea de evaluación 4

En un centro comercial, se proyectaron cuatro películas: una de dibujos animados, una de ciencia ficción, una de comedia y una de acción. En una encuesta realizada acerca de la película que el público prefiere, se encontró que $\frac{2}{5}$ del público femenino prefieren la de dibujos animados, mientras que el resto de público femenino prefiere la comedia. Por otro lado, $\frac{1}{3}$ del público masculino prefiere la de ciencia ficción y el resto prefiere la de acción.

Si el público femenino está compuesto por 50 mujeres y el masculino por 30 hombres, ¿se puede afirmar que hay películas con la misma cantidad de preferentes? Si es así, ¿cuáles son?

La cuarta tarea del examen final presenta una situación en la que el estudiante debe determinar las fracciones que representan la preferencia de un tipo de película, a partir de la fracción que se da. También debe usar la equivalencia entre fracciones para determinar si hay películas con la misma cantidad de preferentes. Con esta tarea, buscamos que el estudiante modele la situación problema, interprete la fracción como razón y use la equivalencia de fracciones para dar solución a la situación. Ubicamos esta tarea en un contexto social (Ministerio de educación, 2013).

Rúbrica de evaluación del objetivo 2

En la tabla 7, presentamos los niveles de logro con sus respectivos indicadores acorde a los criterios de logro del objetivo 2 y los errores en que pueden incurrir los estudiantes cuando abordan las tareas 3 y 4.

Tabla 7

Niveles de logro e indicadores para el objetivo 2

Nivel de logro	Indicadores
Superior (4,6- 5,0)	El estudiante activa todos los criterios de logro de la estrategia usada para resolver las tareas (camino de aprendizaje) sin incurrir en errores.
Alto (4,1 – 4,5)	El estudiante incurre en un error menor que no le impide dar una respuesta a la situación. Los errores están relacionados con la construcción o verificación de la equivalencia de fracciones desde lo operativo (E35-E46), o desde las representaciones (E47-E51).
Básico (3,7- 4,0)	El estudiante modela la situación y reconoce que puede ser resuelta con fracciones equivalentes, pero no explica o justifica sus respuestas en términos de la equivalencia al incurrir en E23 o E24.

Bajo (1,0- 3,6)	<p>El estudiante no reconoce que la situación puede ser resuelta o está asociada con fracciones equivalentes, al incurrir en errores como E19, E20, E52, E53, E54.</p> <p>El estudiante incurre en E21 o E22, relacionados con la modelación de situaciones y en E23 o E24, asociados con la explicación de resultados que involucran fracciones equivalentes.</p>
--------------------	--

8. CONCLUSIONES

En este documento, presentamos la unidad didáctica sobre fracciones equivalentes positivas. Propusimos el tema debido a que notamos que usualmente los estudiantes presentan dificultad para dar significado a la equivalencia de fracciones, principalmente porque no establecen relaciones entre fracciones equivalentes y situaciones de su contexto.

La estructura de la unidad está enmarcada en el análisis didáctico propuesto por Gómez (2018), desde la planificación, implementación y evaluación. El desarrollo de la unidad nos permitió reflexionar sobre la importancia de conocer los aspectos que caracterizan la teoría curricular, los documentos curriculares colombianos, el marco conceptual PISA y los documentos elaborados por la institución donde fue aplicada. A partir de los documentos anteriores, identificamos los conceptos y procedimientos inmersos en el tema, establecimos las relaciones de las representaciones de la fracción y reconocimos las situaciones que le dan sentido al tema. Además, con el referente del análisis didáctico, establecimos lo que esperamos que el estudiante aprenda sobre las fracciones equivalentes positivas (expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo) y las previsiones en términos del actuar del estudiante; previmos las dificultades y errores (limitaciones de aprendizaje) que pueden surgir en el proceso de aprendizaje y propusimos las ayudas que contribuyan a superarlos; y establecimos los criterios e instrumentos de evaluación para determinar el nivel de desempeño y la consecución de los objetivos.

El diseño de la unidad didáctica está compuesto por una tarea diagnóstica, cuatro tareas de aprendizaje y una tarea de evaluación (el documento imprimible de estas tareas se encuentra en el anexo 5). La puesta a punto del diseño de la unidad didáctica, surgió del análisis de los resultados de la implementación de la primera versión. Los principales ajustes están relacionados con la formulación de la tarea 1.1 y la tarea diagnóstica.

Con la unidad didáctica, contribuimos al desarrollo de procesos de aprendizaje sobre las fracciones equivalentes positivas, a superar dificultades relacionadas con la representación y verificación de fracciones equivalentes, y a valorar la utilidad de las fracciones equivalentes en la solución de situaciones en diferentes contextos.

Finalmente, consideramos que, aunque la virtualidad demandó cambios en los materiales de algunas tareas, la unidad didáctica puede ser implementada tanto de manera presencial como virtual.

9. LISTADO DE ANEXOS

En este apartado presentamos el listado de anexos² usados en este documento.

- ◆ En el anexo 1, presentamos ejemplos y relaciones entre las representaciones de la fracción (apartado de Articulación de contenidos - representaciones de las fracciones equivalentes positivas).
- ◆ En el anexo 2, mostramos el listado completo de dificultades y errores en los que puede incurrir un estudiante al desarrollar las tareas de aprendizaje (subapartados de Errores y ayudas).
- ◆ En el anexo 3, incluimos el listado completo de los criterios de logro de los dos objetivos de aprendizaje (apartado de Aspectos cognitivos - criterios de logro que caracterizan los objetivos).
- ◆ En el anexo 4, incluimos el listado completo de ayudas (subapartados de Errores y ayudas y Grafos de criterios de logro).
- ◆ En el anexo 5, incluimos el imprimible de las tareas de la unidad didáctica (en el apartado de Conclusiones).

10. REFERENCIAS

- Aguilera, M., & Rodriguez, S. (2017). Uso de las regletas de Cousenaire para el aprendizaje de las fracciones . Bogotá.
- Benavides, E., Chaves, A., & Sarmiento, S. (2020). Fichas de tareas. Documento no publicado. Universidad de los Andes . Bogotá: Universidad de los Andes.
- Benavides, E., Chaves, A., & Sarmiento, S. (2020). Lista de Análisis cognitivo. Documento no publicado. Universidad de los Andes. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Cañadas, M., Gómez, P., & Andrés, P. (2018). Análisis de contenido. En M. G. Cañadas, Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares (págs. 53-112). Bogotá: Universidad de los Andes: Uniandes.
- Gómez, P. (2018). Currículo de matemáticas. En P. Gómez, Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: coceptos y técnicas curriculares (págs. 11-52). Bogotá: Universidad de los Andes: Uniandes.
- Gomez, P. (2018). Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares. Bogotá: Universidad de los Andes: Uniandes.
- Gomez, P., F. M. M., & Velazco, C. (2018). Análisis de instrucción. En P. M. Gomez, Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: coceptos y técnicas curriculares (págs. 197- 268). Bogotá: Universidad de los Andes: Uniandes.
- Gonzalez, M., & Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En M. G. Gonzalez, Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: coceptos y técnicas curriculares (págs. 113-196). Bogotá: Universidad de los Andes: Uniandes.
- Leon, G. (2011). Unidad didáctica: Fracciones. España .

² Los anexos se pueden descargar en este enlace: <http://funes.uniandes.edu.co/23707>

- MEN. (2006). Estádares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. En MEN, Estádares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas (pág. 84). Bogotá: Mineducación.
- MEN. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. En MEN, Derechos Básicos de Aprendizaje (pág. 30). Bogotá: Mineducación.
- Ministerio de educación, c. y. (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, le cultura y ciencias. Madrid. España: Secretaría General y Técnica.