

ANEXO 01. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y RELACIONES

En este anexo, presentamos los sistemas de representación usados en la unidad didáctica. Además, presentamos relaciones entre ellos.

1. SISTEMA DE REPRESENTACIÓN NUMÉRICO

El sistema de representación numérico para las fracciones equivalentes positivas tiene en cuenta el símbolo igual que relaciona dos o más fracciones. Cada fracción se representa con números naturales que se muestran uno sobre el otro, separados por un segmento horizontal. El número que se ubica sobre el segmento se denomina numerador y el número que se ubica debajo se nombra como denominador (Robles, 2011).

Para este sistema de representación abordamos el tema teniendo en cuenta (a) el tipo de fracciones (propia, impropia, igual a la unidad), (b) interpretación como cociente (decimal) y (c) fracción como porcentaje. Las fracciones propias $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ separadas por el signo igual $\left(\frac{1}{2} = \frac{2}{4}\right)$ son un ejemplo de este sistema de representación. Las fracciones $\frac{2}{2} = \frac{4}{4}$ representan la equivalencia cuando son iguales a la unidad. Por otra parte, la relación de equivalencia con fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador permite establecer una transformación sintáctica. Esta operación se hace evidente cuando la fracción impropia se transforma en un número mixto. Las fracciones $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ son un ejemplo de fracciones impropias. En este caso estas fracciones se transforman en $1\frac{1}{3} = 1\frac{2}{6}$. La interpretación como cociente permite establecer la equivalencia cuando se divide el numerador y el denominador para transformar cada fracción como un número decimal. Un ejemplo de esto se presenta cuando expresamos las fracciones equivalentes $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ a los decimales $0,5 = 0,5$. La equivalencia entre fracciones como porcentaje se presenta cuando el resultado como cociente

se transforma en un porcentaje al multiplicarlo por cien. En nuestro caso, el decimal 0,5 se convierte en 50%.

2. SISTEMA DE REPRESENTACIÓN SIMBÓLICO

Las fracciones equivalentes positivas pueden abordarse desde el sistema de representación simbólico, teniendo en cuenta la expresión $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N} \wedge b, d \neq 0$). Al operar la expresión se determinan las siguientes transformaciones (a) $ad = bc$ al realizar un producto cruzado, (b) $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{c}{d} \cdot m$ al multiplicar a ambos lados de la igualdad por el mismo natural, (c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m} = \frac{c}{d} \cdot \frac{n}{n}$ al multiplicar a ambos lados de la igualdad por una fracción igual a la unidad y (d) $a = \frac{b \cdot c}{d}$ al despejar cualquiera de las variables (en este caso la variable a). Otras transformaciones se generan a partir de expresiones equivalentes a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, de la siguiente manera i) $a : b = c : d$ ii) $a/b = c/d$ iii) $a \div b = c \div d$.

3. SISTEMA DE REPRESENTACIÓN GRÁFICO

Las fracciones equivalentes positivas pueden abordarse teniendo en cuenta la representación gráfica. Esta representación usa como signos una semirrecta y los números racionales positivos. La semirrecta indica el semieje x positivo. Esta se divide en partes iguales y se marca con un segmento de forma vertical (los segmentos guardan la misma distancia). Al origen de la semirrecta se le asigna el número cero (Contreras, 2017). Cada segmento representa una unidad y le corresponde un número natural. Por ejemplo, el número 1 representa una unidad, el número 2 representa dos unidades... y n representa n unidades. Para representar una fracción en la recta numérica, la unidad se divide en partes iguales, tantas veces como lo indica el denominador y se toman (desde 0) las partes que indique el numerador. La última parte que se toma se marca con un punto. Por ejemplo, la fracción $\frac{2}{3}$ se representa al dividir la unidad en tres partes congruentes y se marca con un punto la ubicación después de tomar las dos partes que indica el numerador como se muestra en la figura 2.



Figura 1. Representación de $\frac{2}{3}$ en el sistema de representación gráfico

En este sistema de representación, dos fracciones son equivalentes si al representarlas en la recta numérica, corresponden al mismo punto. Por ejemplo, si representamos $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ se puede observar que se ubican en el mismo punto, como se muestra en la figura 3.

Las fracciones equivalentes permiten que se realicen tratamientos en el sistema de representación gráfico. Una fracción se representa a través de un punto en la recta numérica. Dicho punto

determina un segmento (figura 3). Como dos fracciones equivalentes se ubican en el mismo punto, determinarán el mismo segmento. Luego, si reproducimos n veces dicho segmento, estaremos multiplicando el segmento por un natural n , determinando la misma representación para las fracciones resultantes. Con esto verificamos que, si multiplicamos dos fracciones por un mismo natural, las fracciones resultantes seguirán siendo equivalentes.

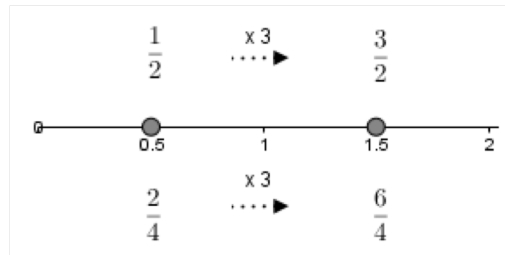


Figura 2. Fracciones equivalentes positivas en el sistema de representación gráfico.

4. SISTEMA DE REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICO

Las fracciones equivalentes positivas puede abordarse a partir del sistema de representación geométrico. Este tipo de representación tiene en cuenta figuras geométricas (habitualmente se usan figuras circulares o rectangulares). Cada figura se denomina unidad y se divide en tantas partes congruentes como lo indica el denominador. Luego se señalan (se somborean) las partes que indica el numerador (Robles, 2011). La equivalencia entre fracciones se presenta si al comparar las figuras tienen la misma área sombreada (figura 4).

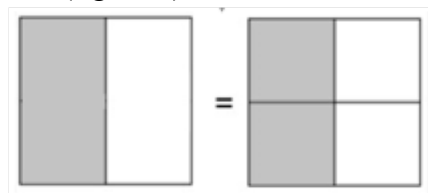


Figura 3. Fracciones equivalentes positivas en el sistema de representación geométrico

Este sistema de representación permite evidenciar distintas transformaciones. La figura 5 es un ejemplo de esta transformación. Aunque las figuras poseen divisiones distintas (en forma), determinan fracciones equivalentes, debido a que el área sombreada en cada una es la misma.

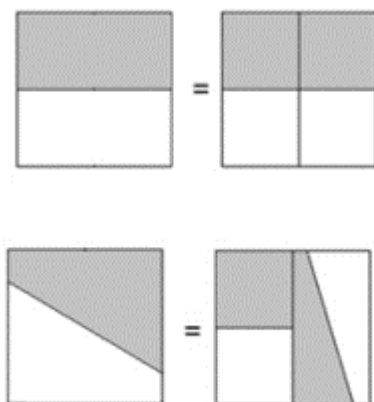


Figura 4. Transformación de fracciones equivalentes positivas en el sistema de representación geométrico.

5. SISTEMA DE REPRESENTACIÓN PICTÓRICO

Las fracciones equivalentes positivas pueden abordarse a partir del sistema de representación pictórico. Este sistema tiene en cuenta el contexto discreto de las fracciones. Cada fracción determina un número de conjuntos, cada uno con tantos elementos (círculos) como establezca el denominador. Los elementos sombreados representan el numerador de la fracción (Robles, 2011). Las fracciones equivalentes $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$, como se muestra en la figura 6, son un ejemplo de este sistema de representación. La primera fracción se presenta como un conjunto de dos elementos, en el que se sombrea uno de ellos. La segunda fracción se representa con un conjunto de cuatro elementos, en el que se resaltan dos de ellos. Las fracciones equivalentes $\frac{4}{3}$ y $\frac{8}{6}$, como se observa en la figura 7, requieren más de un conjunto para su representación pictórica, debido a que la cantidad de elementos que se deben sombrear por conjunto (numerador) es superior al número disponible en cada uno (denominador).

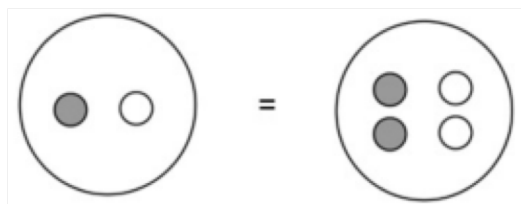


Figura 5. Fracciones equivalentes positivas propias en el sistema de representación pictórico.

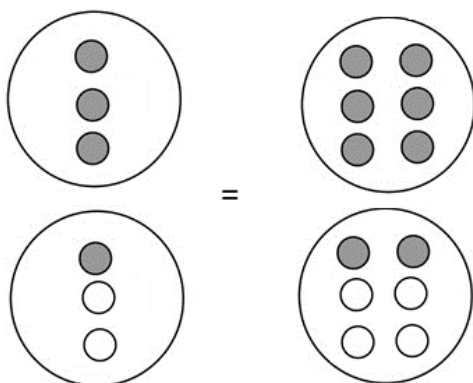


Figura 6. Fracciones equivalentes positivas impropias en el sistema de representación pictórico.

En este sistema de representación, la equivalencia de fracciones se determina cuando establecemos la siguiente relación entre las fracciones. La representación pictórica de una de las fracciones está contenida n veces (n natural) en la representación pictórica de la otra. Por ejemplo, la representación de la fracción $\frac{1}{2}$ está contenida dos veces en la representación de la fracción $\frac{2}{4}$ (figura 8)

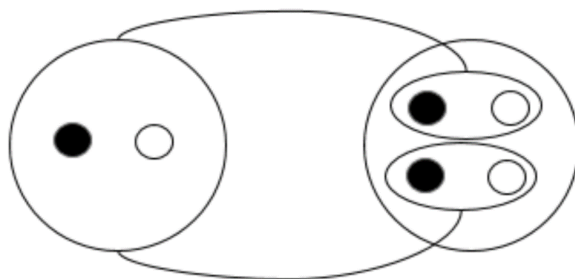


Figura 7. Relación entre fracciones equivalentes positivas propias en el sistema de representación pictórico.

Así mismo, la representación de la fracción $\frac{4}{3}$ está contenida dos veces en la representación de la fracción $\frac{8}{6}$ (figura 9)

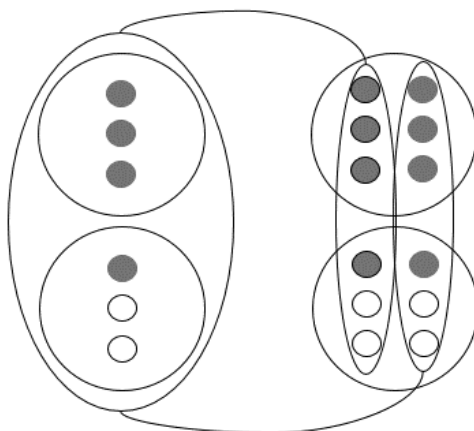


Figura 8. Relación entre fracciones equivalentes positivas impropias en el sistema de representación pictórico

En este sistema de representación determinamos la siguiente transformación sintáctica. Las representaciones pictóricas de $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ podemos transformarlas a $\frac{3}{2}$ y $\frac{6}{4}$ respectivamente, cuando seleccionamos los elementos sombreados y los replicamos tres veces. De acuerdo con lo anterior, las fracciones resultantes, también son equivalentes.

6. SISTEMA DE REPRESENTACIÓN MANIPULATIVO

Las fracciones equivalentes positivas pueden abordarse a partir del sistema de representación manipulativo. Las regletas de cuisenaire son un sistema de representación para las fracciones equivalentes. Las regletas son prismas cuadrangulares de 1cm^2 de base y cuya longitud oscila entre uno y diez centímetros. Cada regleta equivale a un número natural (Aguilera & Rodriguez, 2017). Una fracción puede ser representada a partir de dos conjuntos de regletas. Los dos conjuntos se disponen uno sobre otro de tal forma que el de arriba representa al numerador y el de abajo representa al denominador de la fracción. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ se puede representar con la regleta de un centímetro en la parte de arriba y la regleta dos centímetros en la parte inferior, como se muestra en la figura 10.

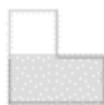


Figura 9. Fracción $\frac{1}{2}$ en el sistema de representación manipulativo

La figura 11 es un ejemplo que muestra la equivalencia de fracciones en este sistema de representación. Una regleta blanca sobre una regleta roja es equivalente a dos regletas blancas sobre dos

regletas rojas. Estos últimos pares de regletas se pueden transformar en una regleta roja sobre una regleta rosa.

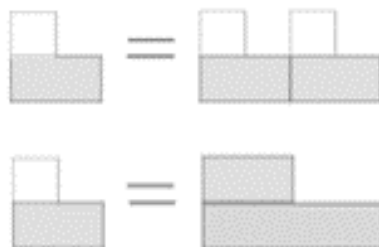


Figura 10. Fracciones equivalentes positivas en el sistema de representación manipulativo

El Tangram como parte del sistema de representación manipulativo. Este elemento está compuesto por siete piezas que en conjunto pueden formar un cuadrado. Cinco triángulos de diferente tamaño (dos grandes, uno mediano y dos pequeños), un cuadrado y un paralelogramo. Estas piezas guardan relaciones de proporcionalidad (en área) entre ellas. La equivalencia entre fracciones la encontramos cuando establecemos relaciones entre diferentes piezas. Por ejemplo, en la figura 12 mostramos la relación entre el triángulo mediano y los dos pequeños. (Rodríguez & Sarmiento, 2002)

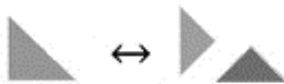


Figura 11. Equivalencia entre piezas del Tangram.

El triángulo mediano corresponde a $\frac{1}{8}$ del área del cuadrado grande, mientras que cada triángulo pequeño representa $\frac{1}{16}$ de dicho cuadrado. De esta manera se determina que el triángulo mediano tiene la misma área que los dos pequeños, es decir, se establece la siguiente equivalencia entre fracciones positivas $\frac{1}{8} = \frac{2}{16}$.

En este sistema de representación encontramos la transformación presentada en la figura 13. A pesar de realizar diferentes construcciones, podemos establecer relaciones de equivalencia entre ellas, pues el área de cada una es la misma.



Figura 13. Transformación en el Tangram.

7. RELACIONES ENTRE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

En el siguiente apartado presentamos las relaciones entre los sistemas de representación de las fracciones equivalentes positivas. Identificamos las principales traducciones entre los sistemas de representación. Mostramos ejemplos de estas traducciones.

El sistema de representación numérico establece valores concretos para los numeradores y denominadores de las fracciones equivalentes positivas. De esta manera, estas fracciones pueden expresarse en otros sistemas de representación como el simbólico, geométrico, gráfico, pictórico y manipulativo, como se mencionó en el apartado anterior. Por otra parte, cada uno de estos sistemas de representación permiten identificar los valores específicos de las fracciones equivalentes positivas (numeradores y denominadores). De esta manera, es posible realizar traducciones de cualquier sistema de representación al sistema numérico.

El sistema de representación simbólico se puede traducir a otros sistemas de representación. Esta representación establece expresiones para las fracciones equivalentes positivas, de manera que puede representarse en otros sistemas, pasando previamente por el sistema de representación numérico. Por ejemplo, si a las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se les asignan los valores $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$, es posible expresarlas en cualquier otro sistema de representación. Por otra parte, los diferentes sistemas de representación pueden traducirse al sistema simbólico, a partir de un proceso de generalización de los términos de las fracciones equivalentes positivas (numeradores y denominadores).

El sistema de representación gráfico permite abordar diferentes traducciones. El punto que representa las fracciones equivalentes positivas en la recta numérica se determina a partir de la cantidad de partes en que está dividida la unidad y la distancia entre el origen (cero) y el punto (cantidad de partes tomadas). Todo lo anterior se asocia con el sistema de representación (a) geométrico, cuando se relaciona con la cantidad de partes en que está dividida la figura y el número de partes sombreadas en esta, (b) pictórico, al relacionarse con la cantidad de elementos que tiene el conjunto y la cantidad de elementos que se seleccionan y (c) manipulativo, al hacer corresponder con el conjunto de regletas que se ubican en la parte inferior y el conjunto de regletas que se disponen en la parte superior. De esta manera, se pueden establecer relaciones entre los sistemas de representación gráfico, geométrico, pictórico y manipulativo.