REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

The Knowledge of the Mathematics Teacher in Practice: Teaching of Proportionality

Eugenia Torres Martín[1] and Jordi Deulofeu Piquet[2]

1) Instituto Serra de Miramar de Valls (Tarragona), Spain
2) Universitat Autònoma de Barcelona, Spain

Date of publication: June 24th, 2020
Edition period: June 2020-October 2020

To cite this article: Torres, E. and Deulofeu, J. (2020). El conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica: Enseñanza de la proporcionalidad. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *9*(2), 147-172. doi: 10.17583/redimat.2020.3945

To link this article: http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2020.3945

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

The terms and conditions of use are related to the Open Journal System and to Creative Commons Attribution License (CCAL).

REDIMAT, Vol. 9 No. 2 June 2020 pp. 147-171

The Knowledge of the Mathematics Teacher in Practice: Teaching of Proportionality

Eugenia Torres Martín
Instituto Serra de Miramar de Valls

Jordi Deulofeu Piquet
Universitat Autònoma de Barcelona

(*Received: 14 December 2018; Accepted: 17 April 2020; Published: 24 June 2020)*

Abstract

The role of the Mathematics teacher as manager of the process of construction of the concept of proportionality and proportional reasoning has a special relevance; so we intend to investigate the knowledge of mathematics that the teacher mobilizes in the teaching practice regarding the specific subject of proportionality in Sixth grade of Primary and in the First course of Secondary. This work, centered on the mathematical knowledge about proportionality of the teacher, aims to compare the knowledge of Primary and Secondary teachers in terms of proportionality. The objective is not only to compare the teacher's mathematical knowledge on proportionality, but also to observe and analyse how the content is taught in order to explain what the objectives are and how it promotes the construction of the mathematical concept of proportionality.

Keywords: Mathematics teaching and learning, proportionality, linear function, transition from elementary to secondary school, knowledge of the teacher

2020 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.2020.3945

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

REDIMAT, Vol. 9 No. 2 Junio 2020 pp. 147-171

El Conocimiento del Profesor de Matemáticas en la Práctica: Enseñanza de la Proporcionalidad

Eugenia Torres Martín
Instituto Serra de Miramar de Valls

Jordi Deulofeu Piquet
Universitat Autònoma de Barcelona

(*Recibido: 14 Diciembre 2018; Aceptado: 17 Abril 2020; Publicado: 24 Junio 2020)*

Resumen

El papel del profesor de Matemáticas como gestor del proceso de construcción del razonamiento proporcional tiene una especial relevancia; por ello nos planteamos investigar los conocimientos de Matemáticas que el profesor moviliza en la práctica docente en lo que concierne a la temática específica de proporcionalidad en Sexto curso de Primaria y en Primer curso de Secundaria. Este trabajo, centrado en el conocimiento matemático sobre proporcionalidad del profesor, pretende comparar los conocimientos de los profesores de enseñanza Primaria y Secundaria en lo que respecta a la proporcionalidad. El objetivo no es sólo el de comparar los conocimientos matemáticos del profesor sobre proporcionalidad, sino el de observar y analizar cómo enseña dichos contenidos con la finalidad de explicar cuáles son los objetivos que se plantea y cómo promueve la construcción del concepto matemático de proporcionalidad.

Palabras clave: Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, proporcionalidad, función lineal, transición primaria-secundaria, conocimiento del profesor

2020 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.2020.3945

La proporcionalidad es un tema complejo matemáticamente hablando y de los más difíciles de enseñar de la enseñanza obligatoria. Es una relación de doble sentido: entre pares de valores de las dos variables, la dependiente y la independiente; y entre dos valores de la misma variable. De aquí que hablemos de la razón de proporcionalidad k=y/x cuando se relacionan las dos magnitudes, o de la razón escalar x2/x1=y2/y1 cuando se relacionan dos valores de la misma magnitud. Adquirir el razonamiento proporcional supone comprender esta relación especial entre dos magnitudes que cambian a la vez, así como reconocer la función lineal y=kx.

Al inicio de la Secundaria, los estudiantes presentan dificultades y errores en el aprendizaje de la proporcionalidad, aunque su estudio se ha iniciado ya en la Primaria. El papel del profesor1 como gestor del proceso de construcción del razonamiento proporcional tiene una especial relevancia por lo que en este artículo presentamos un estudio basado en la práctica docente del profesor en el aula y en el que analizamos cómo el profesor construye el concepto matemático de proporcionalidad.

Objetivos y Marco Teórico

Este artículo forma parte de una investigación más extensa (Torres, 2015), contextualizada en la práctica matemática del docente, así como su influencia en el aprendizaje del alumno durante la transición de Primaria a Secundaria. El objetivo general de dicha investigación es el análisis de la actividad docente en lo que concierne a la temática específica de proporcionalidad en 6.ºP y 1.ºESO, siguiendo el modelo de Rowland (2008). Se trata de caracterizar cómo un profesor enseña dichos contenidos para explicar cuáles son los objetivos que se plantea y cómo promueve la construcción de los conceptos.

A partir del objetivo general, se plantean tres objetivos específicos de investigación. El primero consiste en elaborar un instrumento para realizar el análisis de la actividad docente en el aula. El segundo, analizar desde la práctica docente cuáles son los objetivos del profesor al enseñar el tema de proporcionalidad. Y el tercero, que es en el que nos centramos en este artículo, analizar desde la práctica docente cómo el profesor construye el concepto de proporcionalidad.

Los ejes fundamentales en los que se apoya el marco teórico principal de esta investigación son: el *Knowlegde Quartet* (KQ) y los factores que intervienen en el razonamiento multiplicativo y en la proporcionalidad.

El *Knowledge Quartet* es un constructo desarrollado por Tim Rowland (2008) para describir y analizar las observaciones hechas en el aula. El KQ es un marco conceptual adecuado para revisar y analizar episodios de clase, centrándose inicialmente en el contenido matemático del episodio y en el papel que desempeñan el *Subject Matter Knowledge* (SMK) y el *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) del profesor en prácticas de Primaria (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005). Para Rowland el marco debía ser capaz de "recoger" las ideas y factores importantes sobre el conocimiento del contenido matemático a partir del análisis de las interacciones de los profesores con dicho contenido y concretarlas en un número reducido de categorías conceptuales. Rowland distingue cuatro categorías de conocimiento de los profesores:

- *Fundamento* o conocimiento teórico de las Matemáticas *per se*. En esta categoría se recogen los conceptos principales sobre el contenido matemático y las relaciones entre los mismos. Comprende además el conocimiento de lo más significativo de la literatura sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, las creencias concernientes a la naturaleza del conocimiento matemático, los objetivos de la educación matemática y las condiciones en las que los alumnos pueden aprender mejor Matemáticas. Son los conocimientos que el profesor ha adquirido en su formación académica y en su práctica para prepararse como profesor.
- *Transformación* de los conocimientos del contenido por parte del profesor para que los alumnos sean capaces de aprenderlos. Se relaciona con el conocimiento en acción, mostrado tanto en la planificación de lo que se va a enseñar como en el mismo acto de enseñar. El profesor transforma y presenta los conocimientos de distintas maneras para ayudar a los alumnos a aprenderlos, lo que conlleva la representación de los mismos en forma de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y pruebas. Es importante la elección que hace el profesor de los ejemplos con el fin de ayudar a los alumnos a entender un concepto y también a profundizar en

el mismo, a adquirir el lenguaje adecuado y para mostrar la validez de procedimientos.

- *Conexión* o conocimiento en acción manifestado en la coherencia y planificación de los contenidos a enseñar. Esta categoría combina elecciones y decisiones que se hacen en partes concretas del contenido matemático, por lo que respecta a la coherencia de la planificación o de la enseñanza a lo largo de uno o varios episodios. Se refiere a las acciones del profesor para relacionar conceptos, o procedimientos, o ambos. Esta categoría se podría subdividir en: "establecer conexiones entre conceptos", "establecer conexiones entre procedimientos", "establecer conexiones entre procedimientos y conceptos" y también "entre representaciones de un mismo concepto" (De la Fuente, Deulofeu, & Rowland, 2016).
- *Contingencia* o conocimiento en interacción en el aula, es decir, la capacidad del profesor para pensar sobre la marcha y responder a las intervenciones inesperadas de los alumnos durante un episodio de clase. Se manifiesta en los acontecimientos de la clase que no han sido planificados por el profesor o que se desvían de su planificación. Las posibles actuaciones del profesor cuando se presenta una situación contingente van desde desviarse de lo que tenía programado cuando la contribución inesperada de un alumno pueda resultar particularmente beneficiosa a dicho alumno y a la clase, o pueda implicar una vía de investigación productiva, hasta la no consideración de la intervención, pasando por caminos intermedios.

Estas categorías serán concretadas sobre la temática de proporcionalidad al describir la elaboración del instrumento para analizar la práctica en el aula.

Caracterizar lo que se le pide saber al profesor de Matemáticas de Primaria y de Secundaria sobre proporcionalidad supone analizar los factores que intervienen en el razonamiento multiplicativo y en la proporcionalidad: concepto, situaciones en las que puede aplicarse, modelos tanto informales como formales de razonamiento proporcional (incremento gradual aditivo, reducción a la unidad o regla de tres) y dificultades en el aprendizaje de la proporcionalidad. Para ello hemos utilizado como referencia fundamental a Susan Lamon (2007), que realizó un estudio longitudinal con alumnos de 8 a 12 años, partiendo del concepto de fracción y de las diferentes interpretaciones del número racional –parte-de-un-todo, cociente, medida, razón y operador- para abordar después las cuestiones de proporcionalidad: entender la proporcionalidad como una relación de doble sentido, situaciones en las que puede aplicarse, excesiva dependencia de la regla de tres, técnica de reducción a la unidad, la proporcionalidad como función lineal y la confusión entre función lineal y afín.

También consideramos referencias de investigaciones centradas en alumnos o futuros profesores. Un estudio (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010) con alumnos de 8 a 11 años muestra cómo se produce una evolución desde la aplicación de estrategias aditivas en los primeros años de la Educación Primaria, a la utilización de estrategias de proporcionalidad en los últimos años, pasando por un estadio intermedio en el que se aplican métodos aditivos a problemas de proporcionalidad y estrategias de proporcionalidad a problemas aditivos, dependiendo de si las razones que aparecen en los problemas son enteras o no. Otro estudio (Fernández y Llinares, 2012) con alumnos de Primaria y Secundaria identifica cinco perfiles de los estudiantes cuando resuelven problemas aditivos y proporcionales y cómo varían estos perfiles desde la Primaria a la Secundaria. Se muestra que un mayor nivel de éxito en los problemas proporcionales no evidencia el desarrollo del razonamiento proporcional al incrementarse también las respuestas proporcionales en los problemas aditivos. Otras investigaciones indican que los estudiantes para maestro tienen dificultades para interpretar las respuestas de los alumnos de Primaria cuando resuelven tareas relacionadas con el razonamiento proporcional (Balderas, Block y Guerra, 2014).

A partir del KQ y de los factores que intervienen en la proporcionalidad construimos un instrumento para realizar el análisis de la actividad docente en el aula.

Metodología

La metodología utilizada es de tipo cualitativo y se centra en el estudio de casos. Entendemos que la práctica docente debe estudiarse analizando la realidad del aula y los estudios relevantes de los que disponemos sobre esta temática son asimismo cualitativos, como los que ha realizado Rowland (2005 y 2008). La investigación se ha contextualizado en alumnos y profesores que fueron observados y grabados en 6.ºP y en el 1.ºESO en dos centros educativos públicos distintos (uno de Primaria y uno de Secundaria), obteniendo los datos para nuestra investigación a partir de la videograbación en el aula de todas las clases (8 de 6.ºP y 8 del 1.ºESO) que se ocuparon de la temática de la proporcionalidad en dos cursos sucesivos, 2010-11 y 2011-12. La realización de las grabaciones de aula fue posible gracias al proyecto de investigación *Factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre Primaria y Secundaria* (EDU 2009-07298) y a un convenio con el *Consorci d'Educació* de la ciudad de Barcelona.

La observación de las clases tanto de Primaria como de Secundaria fue externa y no participativa, limitándonos a observar de manera natural, ajenos al objeto de la observación y sin aportar otra cosa que nuestra presencia física en el aula. La población la conformaban tanto los alumnos y el profesor de Matemáticas de 6.ºP del centro educativo de Primaria, como los alumnos y la profesora de Matemáticas de 1.ºESO del centro de Secundaria en el que estaban cursando la ESO la mayoría de los alumnos de 6.ºP objeto de nuestra observación e investigación. Este ha sido un contexto adecuado para estudiar satisfactoriamente la práctica docente, tanto del profesor de Primaria, de formación generalista (diplomado en Magisterio), como de la profesora de Secundaria, de formación especialista (licenciada en Matemáticas), además estudiar la transición de etapa de Primaria a Secundaria.

Una vez recogidos los datos, se transcribieron todas las clases de proporcionalidad subdividiéndolas en episodios según el contenido desarrollado. De los 48 episodios identificados, 15 son de 6.ºP y 33 del 1.ºESO. Esta desproporción en el número de episodios se debe a que el número de horas de clase en Secundaria dedicadas a la proporcionalidad fue considerablemente mayor al número de horas en Primaria. El criterio para delimitar un episodio ha sido el contenido desarrollado en el mismo, es decir, si hay un cambio de contenido de proporcionalidad, si se trabaja un contenido o un concepto, si se trabajan ejemplos sobre un concepto, si se explica una técnica, si se ponen ejemplos de una técnica o si se relaciona una técnica con un concepto.

Para hacer un análisis de la práctica docente vimos que no era necesario considerar todos los episodios, sino aquellos que además de referirse tanto a conceptos como a técnicas, ofrecían enfoques diferentes, en algún sentido, por parte del profesor. Elegimos los tres pares de episodios que se revelaban más ricos para hacer un análisis de la práctica docente, a saber, aquellos que abordaban la introducción de la técnica de reducción a la unidad y en los que se introducía el concepto de proporcionalidad, pues en dichos episodios se construía de manera más evidente el concepto, se explicaba una técnica como la de reducción a la unidad y se relacionaba la técnica con el concepto.

Una vez centramos el análisis de la actividad docente en el aula en estos episodios, elaboramos un instrumento para realizar dicho análisis. Para ello, construimos una lista de indicadores a partir del marco teórico de referencia y de acuerdo con el modelo de las categorías de Rowland (2008). Elegimos este modelo porque es especialmente adecuado para el análisis de la práctica docente en el aula. Esta lista de indicadores ha sido el instrumento que hemos utilizado para hacer el análisis de dicha práctica.

Construcción de la Lista de Indicadores

A partir del análisis de las acciones que hace la profesora del 1.ºESO en un episodio sobre la introducción a la técnica de reducción a la unidad, construimos una lista de indicadores para la práctica del profesorado a partir de las categorías de Rowland (*Fundamento-Transformación-Conexión-Contingencia*), consideradas desde el contenido matemático de proporcionalidad. Añadimos una quinta categoría, que titulamos *General*, donde listamos indicadores que no están relacionados directamente con el contenido de proporcionalidad, ni con los procedimientos, ni con las situaciones de contingencia y que pueden aparecer en cualquier episodio de una clase de Matemáticas. Detallamos a continuación la lista de indicadores.

Fundamento

Al concretar esta categoría en el tema de proporcionalidad, consideramos 11 indicadores:

1.1. Identificación de las magnitudes

1.2. Asignación de una medida a una magnitud

1.3. Características de las magnitudes (discreta, continua)

1.4. Utilización del incremento gradual aditivo [$f(x+y) = f(x) + f(y)$]

1.5. Utilización del incremento gradual multiplicativo [$f(\lambda x) = \lambda f(x)$]

1.6. Explicitación del procedimiento de reducción a la unidad

1.7. Trabajo de la relación de proporcionalidad entre pares de valores de las dos magnitudes y la relación entre pares de valores de la misma magnitud: la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$.

1.8. Tipo de razón de proporcionalidad $k=y/x$ (entera o no, mayor o menor que la unidad).

1.9. Tipo de razón escalar $x_2/x_1= y_2/y_1$ (entera o no, mayor o menor que la unidad)

1.10. Explicitación de la razón dada por el problema ($k=y/x$ o $x_2/x_1=y_2/y_1$).

1.11. Explicitación de la constante de proporcionalidad obtenida al hacer la reducción a la unidad para obtener la función de proporcionalidad.

Transformación

Al concretar esta categoría en el tema de proporcionalidad, consideramos 11 indicadores:

2.1. Explicitación de que se va a enseñar una técnica para los casos en que la razón de proporcionalidad $k=y/x$ no sea entera

2.2. Explicitación que permite diferenciar una técnica de un concepto

2.3. Uso de una representación de la situación del problema mediante dibujos o esquemas

2.4. Uso de un dibujo o esquema para construir un modelo

2.5. Asignación de un valor concreto a la representación en tabla de valores

2.6. Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad a nivel de visualización gráfica

2.7. Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad a nivel de razón de proporcionalidad $k=y/x$

2.8. Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad utilizando un contexto adecuado

2.9. Uso que se hace de los ejemplos para conducir al alumno a descubrir la razón de proporcionalidad $k=y/x$

2.10. Uso que se hace de los ejemplos para conducir al alumno a aplicar la técnica de la reducción a la unidad

2.11. Uso que se hace de los ejemplos para conducir al alumno a descubrir la función lineal $y=kx$

Conexión

Al concretar esta categoría en el tema de proporcionalidad, consideramos 7 indicadores:

3.1. Relación y comparación de la técnica de reducción a la unidad con otras técnicas como la regla de 3 y la técnica basada en la propiedad fundamental de las proporciones.

3.2. Énfasis en el descubrimiento de un modelo dentro del problema y búsqueda por parte de los alumnos de dicho modelo dentro del problema

3.3. Énfasis en la relación entre la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la técnica de reducción a la unidad

3.4. Énfasis en la relación entre la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la función lineal $y=kx$

3.5. Énfasis en la relación entre la técnica de reducción a la unidad y la función lineal $y=kx$

3.6. Visión del horizonte matemático hacia adelante: la proporcionalidad como modelo de función

3.7. Visión del horizonte matemático hacia atrás: modelos aditivos y multiplicativos

Contingencia

Al concretar esta categoría en el tema de proporcionalidad, consideramos 4 indicadores:

4.1. Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza métodos aritméticos informales

4.2. Gestión de intervenciones en las que el alumno generaliza la razón de proporcionalidad $k=y/x$ a partir de un caso concreto

4.3. Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza la razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$

4.4. Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ entre pares de valores de la misma magnitud

General

Al concretar esta categoría en el tema de proporcionalidad, consideramos 6 indicadores:

5.1. Explicitación de los objetivos marcados para la clase

5.2. Claridad en el camino a seguir para llegar al objetivo

5.3. Generación por parte del profesor de una situación de aula interactiva

5.4. Explicitación reiterada de lo que se hace

5.5. Discusión activa del problema en la pizarra, escribiendo explícita y continuamente

5.6. Recapitulación del trabajo de los alumnos en relación con los objetivos de la clase

Análisis de los datos y resultados

Con esta lista de indicadores hemos analizado y comparado, desde el punto de vista del profesor, tres pares de episodios de clase de 6.ºP y del 1.ºESO extraídos de las dos primeras clases de proporcionalidad. Dicho análisis y comparación corresponde a una investigación más extensa (Torres, 2015) en la que se enmarca el estudio presentado en este artículo, tal como ya indicamos. La selección de los episodios para analizar y comparar se ha realizado en función de cómo el profesor construye el concepto de proporcionalidad, de cómo explica una técnica como la de reducción a la unidad y de cómo relaciona la técnica con el concepto de proporcionalidad.

En dicho estudio empezamos con los episodios sobre la introducción de la técnica de reducción de la unidad ya que son más ricos y complejos para analizar la práctica docente en el aula. En ellos se explica una técnica y se relaciona la técnica con el concepto de proporcionalidad. Asimismo entendemos que estos episodios son claves para detectar posibles diferencias en los objetivos de la enseñanza de la proporcionalidad, puesto que marcan la diferencia entre una enseñanza centrada en las técnicas para resolver ejercicios y problemas (como la regla de tres), y una enseñanza basada en la construcción de modelos (como el de la función de proporcionalidad $y=kx$). Después comparamos los dos pares de episodios que se refieren a la introducción del concepto de proporcionalidad.

Para contextualizar nuestra elección en el orden de comparación de los episodios, conviene destacar que en cuanto a la introducción del concepto de proporcionalidad, la manera de proceder de uno y otro profesor son bien diferentes. En primer lugar, difieren en las definiciones de proporcionalidad que ofrecen a los alumnos; en segundo lugar, se diferencian también en el momento en que dan la definición; y en tercer lugar, observamos secuenciaciones de las dos primeras clases de proporcionalidad, las que corresponden a la introducción del concepto de proporcionalidad y de la técnica de reducción a la unidad, bien diferentes. En el caso del profesor de Primaria, quiere desarrollar una técnica, por lo que su secuencia de clase es partir de la definición de proporcionalidad para desarrollar posteriormente la técnica de reducción a la unidad. En el caso de la profesora de Secundaria, quiere “modelizar” la proporcionalidad y de ahí que su secuencia de clase sea partir de un ejemplo y llegar a la definición de proporcionalidad. Después introduce la reducción a la unidad con el objetivo de llegar a la función de proporcionalidad. El hecho de programar secuenciaciones bien distintas puede deberse a que uno u otro profesor tenga en mente modelos de enseñanza bien diferentes.

En este artículo nos centramos en cómo se produce por parte del profesor la introducción del concepto de proporcionalidad. Para ello vamos a analizar y comparar dos episodios de los seis a los que nos hemos referido. Dichos episodios forman parte de la primera clase de proporcionalidad de cada profesor.

Episodios sobre la Introducción a la Proporcionalidad

Contextualización episodio 1: La primera clase de proporcionalidad de 1.ºESO la hemos dividido en dos episodios. En el primero, la profesora parte del siguiente ejemplo: "si un coche hace con 10 litros de gasolina 1,2 vueltas al circuito de Montmeló, ¿cuántas vueltas hará con 90 litros de gasolina?". A continuación pide encontrar un valor desconocido en una tabla de proporcionalidad para llegar, al final del episodio, a una definición de proporcionalidad. En el segundo continúa trabajando con el mismo ejemplo y pide a los alumnos que encuentren valores desconocidos en la tabla. Transcribimos este segundo episodio (el primero objeto de este análisis) y lo analizamos a partir de la lista de indicadores creada para la praxis del profesorado siguiendo el modelo del *Knowledge Quartet* de Rowland. Las evidencias de los indicadores mostrados en el apartado 3, si se dan, con su numeración correspondiente, se indican entre corchetes en la transcripción del mismo episodio, evitando así introducir más tablas.

Tabla 1.
Transcripción episodio 1

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
0:00	Profesora	En este problema hemos observado una relación de proporcionalidad entre 2 magnitudes: la gasolina y las vueltas al circuito [1.1]. Vamos a ver el modelo matemático que está como escondido y que es propio del problema.
2:36		Mirad, nosotros los matemáticos ponemos las 2 magnitudes en forma de tabla. El formato de tabla ya lo

Tabla 1.
Transcripción episodio 1 (…/…)

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
		conocemos. Y las tablas a veces van en vertical, como ésta, o en horizontal [2.5]. No hay ninguna diferencia conceptual entre ellas.
3:08		¿Qué he hecho yo? Dar la gasolina y la gasolina era algo que yo controlaba, algo que yo podía decidir cuánta iba en el coche. Por eso es la primera que escribo. Por cierto, nosotros que ya hemos hecho las representaciones gráficas, esto lo pondremos en el eje de las “x”, en el eje horizontal. No es arbitrario que está la primera y que esté en la posición de las “x”, y aquí a la derecha pondremos las vueltas [2.11; 5.2].
3:55		Y ahora voy a resumir un poco. Os he dicho que con 10l hacía 1,2 vueltas [1.8; 2.7; 2.8] y esto es un dato del problema [1.11]. Siempre hemos de tener algún dato de partida para poder comenzar a trabajar. Esto es el enunciado [escribe al lado de 1,2 vueltas “Dato”=”Enunciado”].
4:40		Siempre tiene que haber algún tipo de información sobre el problema y nosotros tenemos que aprender a descubrirla para visualizarlo. Una vez tenemos el dato ya podemos comenzar a trabajar.
5:00		¿Qué pasaría si ponemos 90l? Hemos visto que eran 10,8 vueltas [4.4]. ¿Y si pongo 50l Jonás? [1.9]…
5:30	Jonás	3 con 5
5:31	Profesora	¿Cuánto?
5:32	Jonás	Por 5
5:33	Profesora	Por 5 ¿qué?
5:34	Jonás	El 1,2 por 5 [1.5]
5:36	Profesora	El 1,2 por 5 [4.1], que son, ¿Aimar?
5:40	Aimar	60… ¡Ay! 6
5:43	Profesora	6 vueltas ¿no? ¿Y si pongo 47l? Soy mala ¿eh? 47 [4.3].
5:58	Aimar	Habría que multiplicarlo...por 4,7...
6:00	Profesora	Bueno, todavía 47 no. Y ¿si pongo 120l? ¿Cuál ha sido el factor de paso de aquí [señala 10l]? Este es el enunciado. Es que esta es la clave, por eso la he marcado [1.11]. ¿Cuál ha sido el factor de paso de aquí [señala 10l] hasta aquí abajo [señala los 120l], Farfán? ¿Por cuánto he multiplicado el 10?
6:29	Farfán	Por 10
6:33	Profesora	Venga Ainoa

Tabla 1.
Transcripción episodio 1 (.../...)

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
6:34	Ainoa	¿14,4?
6:35	Profesora	14,4
6:36	Alumno	1,2 por 120
6:37	Profesora	Sí, sí. Genial. Tomás explícanos porque Ainoa ha dicho el último resultado.
6:44	Tomás	Pues… multiplicas por 12...
6:50	Profesora	Perfecto, hemos hecho 10 multiplicado por 12 y entonces... [señala la derecha de la tabla]
6:59	Tomás	El 1,2 por 12
7:00	Profesora	El 1,2 por 12 que son 14,4.
7:03	Ainoa	Yo lo he hecho de otra forma
7:04	Profesora	Venga Ainoa. ¡Explícanoslo!
7:06	Ainoa	He hecho 50 que son 6 ¿no? Y como 120 es como 50 y 50, que son 100, entonces son 12 vueltas y sólo tengo que sumar 2 veces el 1,2.
7:21	Profesora	A ver, vuélvemelo a explicar
7:24	Ainoa	O sea, que 50 son 6 vueltas ¿no? Y como es 120, yo he cogido el 100 y he hecho 50 y 50, 12...
7:33	Profesora	Muy bien
7:34	Alumno	Y después como me sobran 20, he sumado 10 y 10 que son 20 y me sale 2,4.
7:40	Profesora	Genial
7:41	Ainoa	14,4
7:42	Profesora	Genial. Ainoa lo que ha hecho, ha partido los 120 en trocitos con los cuales se encontraba cómoda [1.4]. Lo voy a explicar un momento en la pizarra. Al final no utilizaremos esta técnica pero me parece superingeniosa.
7:58	Aimar	Es mejor poner 10,8 y sumarle 2 veces 4.
8:02	Profesora	Hay muchas maneras de hacerlo pero conceptualmente vuestras dos maneras son diferentes. A mí me gustan las dos, lo que pasa que en el tema que estamos, digamos que la de Tomás es la que busco [3.2; 3.6]. Pero está muy bien y como está muy bien yo pienso que está bien explicarla.
8:16		Ella ha hecho: yo tengo 120 [dibuja un segmento grande] que es todo este trozo. Entonces el 120 lo puedo descomponer en trocitos que ya conozco: sería 50 y 50 y me faltan 20 [va dividiendo el segmento en tres partes y escribiendo encima de cada trozo los litros: 50, 50 y 20]. Con 50 hago 6 vueltas [señala en la tabla 50l y 6 vueltas]. Y con 50 más hago unas 6 vueltas [escribe

Tabla 1.
Transcripción episodio 1 (.../...)

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
9:10	Profesora	debajo de los 2 primeros segmentos 6 y 6]. Y ahora el 20. Entonces Ainoa ha dicho. Vale. No tengo el 20 en la tabla, pero sí que tengo el 10. Pues puedo pensarme que hay 10, 2 veces. Sería 1.2 y 1.2, 2.4. Al final ha sumado 6 y 6, 12, oye 14.4 [2.3]. Genial. ¿Hemos entendidos cómo lo ha hecho Ainoa? Otra manera. Tomás ha llegado a este 14,4 haciendo el 1,2 por 12 [escribe al lado de 14,4=1,2·12] porque la razón de que Tomás haya hecho 1,2 por 12 es que ha dicho, hombre, el factor de paso de aquí [10l] a aquí [120l] es por 12 [1.7]¿ ¿sí? y entonces, el factor de paso de aquí [1,2 vueltas] a 14,4 también va a ser multiplicar por 12 [5.6].

Contextualización episodio 2: La primera clase de proporcionalidad de 6.ºP también la hemos dividido en dos episodios. En el primero el profesor introduce el concepto de proporcionalidad con la definición: “la proporcionalidad es una relación entre magnitudes mesurables”. En el segundo propone algunos pares de magnitudes para que justifiquen si son proporcionales o no y después propone a los alumnos resolver el siguiente problema: “si 2 barras de pan cuestan 1,80€, ¿cuánto costarán 4 barras de pan?”. Acaba ofreciendo una segunda definición de proporcionalidad: “dos magnitudes son proporcionales si aumentan o disminuyen de la misma forma”. Transcribimos parte de este segundo episodio (objeto de nuestro análisis) y procedemos a su análisis de manera análoga al realizado con el episodio 1.

Tabla 2.
Transcripción episodio 2

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
0:13	Profesor	Por ejemplo, tenemos aquí número de barras de pan y aquí tenemos una magnitud que … [1.1]
0:58	Alumno	El dinero
0:59	Profesor	El precio ¿no? Dinero [1.2]. ¿Cómo escribimos el dinero?
1:01	Alumno	En euros

Tabla 2.
Transcripción episodio 2 (.../...)

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
1:02	Profesor	En euros. La pregunta que os hago es cómo sabemos cuáles magnitudes son proporcionales y cuáles no si sabemos que la proporcionalidad es la relación que hay entre magnitudes. Y aquí tenemos por ejemplo la edad y la altura… La pregunta que yo os hago es si estas 2 magnitudes son proporcionales [señala barras de pan-euros] y estas otras también [señala edad-altura]. Si sabéis qué quiere decir proporcionales, si tienen relación. Serán proporcionales si hay relación entre ellas.
2:10	Alumno	Y ¿cómo se sabe si hay relación?
2:11	Profesor	Vamos a verlo. Por ejemplo, imaginad que vais a la panadería a comprar el pan como todos los días. Imaginemos que vamos a comprar 2 barras de pan. Número de barras de pan: 2. Y la de la panadería nos dice que valen 1,80.
3:06	Alumno	¿Cada una?
3:08	Profesor	No, ¿cuántas?
2:10	Alumno	Y ¿cómo se sabe si hay relación?
2:11	Profesor	Vamos a verlo. Por ejemplo, imaginad que vais a la panadería a comprar el pan como todos los días. Imaginemos que vamos a comprar 2 barras de pan. Número de barras de pan: 2. Y la de la panadería nos dice que valen 1,80.
3:06	Alumno	¿Cada una?
3:08	Profesor	No, ¿cuántas?
3:10	Alumnos	2
3:11	Profesor	¿Valen?
3:12	Alumnos	1,80
3:26	Profesor	En este caso, imaginemos que son barras integrales. Las más caras. Si no, no dará bien… 2 barras de pan, 1.80 [1.8; 2.7; 2.8]. Aquí [señala el precio], ¿qué unidad de medida habéis...?
3:54	Alumno 1	Precio
3:55	Alumno 2	Altura
3:57	Profesor	Sí, el precio es la magnitud, pero ¿cuál es la unidad de medida? [1.2]
4:01	Alumno	Euros
4:02	Profesor	En euros. Recordad esto. Valen 1,80.

Tabla 2.
Transcripción episodio 2 (…/…)

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
		Mi pregunta es cómo sabemos si éstas magnitudes son proporcionales, es decir, si tienen relación [señala barras de pan-euros] y éstas [señala edad-altura], si son proporcionales o no… ¿Cómo sabemos esto? Si voy y digo, si dos barras de pan me costarán 1,80 [1.11], quiero comprar...
4:30	Alumno	3
4:32	Profesor	4. Os hago la pregunta, ¿si quiero comprar 4?
4:35	Alumno	1,80 por 2
4:38	Profesor	Si el día anterior fui y compré 2 barras de pan y me cobraron 1,80 [1.8], al día siguiente quiero comprar 4 barras de pan [1.9]. ¿Podré predecir lo que me costarán? [1.7; 5.2].
4:56	Alumno	Sí
4:57	Profesor	¿Por qué?
4:58	Alumno	Porque en 2 está la mitad de 4. 4 es el doble de 2
5:01	Profesor	¿Cómo has dicho?
5:02	Alumno	4 es el doble de 2
5:04	Profesor	Ha dicho un concepto nuevo ¿no? El doble. ¿Qué es el doble?
5:12	Ainoa	Yo haría 1,80 por 2
5:17	Profesor	1,80 por 2. ¿Por qué?
5:19	Ainoa	Cómo 2 barras valen 1,80 y son 2 barras más
5:24	Alumno	El doble
5:25	Profesor	Lo que haría Ainoa: 1,80 por 2 [1.5]. Muy bien. ¿Se podría hacer otra cosa?
5:31	Alumno	Sí
5:32	Profesor	Con este concepto de doble. ¿Es el doble?
5:36	Alumno	Se podría sumar: 1,80 y 1,80
5:39	Ainoa	Que son 3,60 [1.4].
5:46	Profesor	¿Y se podría hacer otra cosa?
5:47	Alumno	Sí
5:50	Alumno	180 dividido entre 2 y esto por 4
5:52	Profesor	Sí pero tú ya sabes que son 4 las que quieres comprar, tú necesitas saber el precio.
5:57	Alumno	Sí, 1,80 dividido entre 2 que da el precio de una, por 4 [3.2].
6:01	Profesor	Ah vale. Muy bien también. 1,80 dividido entre 2 y el resultado... Multiplicado por 4 has dicho. ¿Veis? Cada uno lo haría de diferentes formas [1,80x2; 1,80+1,80; (1,80:2)x4] y el resultado sería ¿cuál?

Tabla 2.
Transcripción episodio 2 (.../...)

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
6:18	Alumno	90 dividido por 4
6:20	Profesor	Por tanto, esto está bien… llegar al resultado de diferentes formas…Pero lo que me interesa es esto, de esta tabla de aquí [2.5] [señala la tabla de la pizarra donde pone número de barras de pan, precio, 2, 1.80, 4].
6:31	Ainoa	Una barra vale 90 céntimos [3.2].
6:41	Profesor	Por tanto, 4 barras ¿cuánto costarían?
6:47	Alumno	3,60
6:48	Profesor	3,60. Muy bien [escribe 3,60 en la tabla] Por tanto… ¿Son proporcionales estas dos?
6:55	Alumno	Sí
6:56	Profesor	¿Por qué?
6:57	Alumno	Porque son iguales. Bueno no es que sean iguales…
7:01	Profesor	A ver, me tenéis qué decir por qué son proporcionales estas dos magnitudes…
7:06	Alumno	Porque se pueden medir
7:07	Profesor	Todas son magnitudes. Todas se pueden medir.
7:10	Ainoa	Porque son dobles
7:12	Profesor	Porque son dobles. Este concepto lo habéis visto muy bien. Hacemos otra para que lo veáis. Pues ponemos 6 [1.9].
7:36	Ainoa	Sí. 3,60 por 2
7:41	Profesor	¿Y qué daría?
7:44	Alumno 1	No, no es por 2
7:46	Alumno 2	5,40
7:47	Alumno 3	5,20
7:48	Alumno 4	…tienes que dividir… 180 por 3
7:49	Profesor	Lo ponemos aquí
7:50	Alumno 1	por 3
7:51	Alumno 2	Yo haría 90 por 3
7:53	Profesor	¿Qué operaciones haríamos? Venga
7:56	Alumno 1	180 por 3
7:58	Profesor	180 por 3
8:00	Alumno 2	1,80 [corrige al alumno 1]
8:01	Profesor	¡Ah! Y esto ¿qué quiere decir? ¿Qué sería esto?
8:06	Alumno 1	Doble
8:07	Alumno 2	Triple
8:08	Profesor	Muy bien. Aquí hay un concepto nuevo. El triple.
8:17	Alumno	90 por 3. ¡Ay! Por 6…
8:22	Ainoa	¿Y eso cuánto da?

Tabla 2.
Transcripción episodio 2 (…/…)

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
8:27	Alumno	5,20
8:28	Profesor	¿Seguro?
8:29	Alumno	Con 40, perdón
8:30	Alumno	Ahora
8:38	Ainoa	360 por 2
8:39	Alumno	No
8:44	Alumno	Entonces serían 4 por …
8:46	Alumno	90 por 3 por 2
8:47	Profesor	90 por 3 y después por 2
8:50	Alumno 1	Y el resultado por 2
8:53	Alumno 2	Y nos da 5 con 40
8:54	Profesor	Después el resultado multiplicarlo por 2 ¿no?
8:57	Alumno 2	O primero dividirlo por…
8:59	Profesor	¿Nos daría lo mismo?
9:01	Alumno	Sí
9:02	Alumno	5,20
9:03	Profesor	Por tanto, da ¿qué?
9:05	Alumno 1	5 con 20
9:05	Alumno 2	5,40
9:06	Alumno 3	Y luego multiplicarlo por dos, y luego
9:10	Alumno 4	5,40
9:11	Alumno 5	3,60+1,80
9:13	Profesor	También [hace la operación en la pizarra].
9:19	Alumno 2	Ya lo he dicho yo
9:20	Ainoa	Pues yo tengo otro
9:21	Profesor	Se pueden hacer muchas cosas
9:22	Ainoa	1 con 80 por 6, no por 4
9:27	Profesor	¿Por qué? No…
9:28	Alumno	3,50 + 0,90
9:30	Profesor	Por 6 no, porque aquí son 2 [señala en la tabla].
9:32	Alumno	El resultado, ¿cuál es?
9:34	Profesor	¿Cuál es el resultado?
9:37	Alumno	5,40
9:38	Profesor	Muy bien [escribe 5,40 en la tabla]. Por tanto, hemos visto que, incluso Ainoa ha pensado que 1 barra de pan… ¿cuánto vale 1 barra de pan? Aquí no está la unidad. ¿Cómo lo sabemos? Habéis dicho que 2 valen 1,80, que valen 3,60 porque alguien ha dicho que es el doble, el doble será 3,60; después habéis dicho que es el triple, si ponemos 6.

Tabla 2.
Transcripción episodio 2 (…/…)

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
		¿Cuánto has dicho que vale 1 barra de pan? [1.6; 1.10; 2.9].
10:19	Alumnos	90
10:20	Profesor	90 céntimos [1.10]. Pero ¿cómo lo sabemos esto?
10:22	Alumno	Porque 90 por 90…
10:24	Profesor	90 por 90 no
10:34	Ainoa	180 entre 2
10:37	Profesor	90 entre 2 ¿Qué quiere decir? ¿Qué concepto es este?
10:40	Ainoa	Pues la división
10:42	Profesor	Pero ¿qué sería? Si esto es el doble [señala las casillas donde están el 2 y el 4], después tengo el triple [señala las casillas 2 y 6]… ¿Qué sería?
10:49	Ainoa	El 1
10:50	Profesor	Si tú divides esto [1,80] entre 2, te dará la unidad que tú has dicho ¿no? 90. ¿Esto qué es?
10:57	Ainoa	Una unidad. La unidad.
11:00	Profesor	Sí, esto es lo que vale una barra de pan. Pero ¿qué es siempre que dividimos entre 2? ¿Qué hacemos?
11:04	Alumnos	¡Ah! La mitad
11:05	Profesor	Muy bien. La mitad. Por tanto, ¿qué relación tenemos entre estas 2 magnitudes? Habéis visto también que la unidad, el doble y el triple y la pregunta que hacía al principio, si estas dos magnitudes son proporcionales o no y por qué, ¿cómo lo sabemos?
11:41	Alumno	Bueno yo creo que sí porque a partir de 2 barras de pan y el precio, se puede saber más.
11:52	Profesor	Podemos predecir el resultado
11:53	Alumno	A partir de esas
11:54	Profesor	A partir de las que nos dan. Por tanto, ¿serán proporcionales?
12:01	Alumnos	¡Sí!
12:02	Alumno	Y porque este caso de las barras de pan y el precio, si tienes 2, 1.80; si da 4, 3.60 pero en cambio la edad…
12:18	Profesor	Es decir, tú puedes predecir aquí lo que te van a costar 4 ¿no? Es decir, si tú aumentas el número de barras, ¿cómo aumentará el número del precio?
12:26	Alumno	Pues el mismo número por el que has multiplicado el otro.
12:29	Profesor	De la misma forma. Es decir, dos magnitudes serán proporcionales, si cuando aumentamos una, en este

Tabla 2.
Transcripción episodio 2 (…/…)

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
		caso, el número de barras, la otra aumenta de la misma forma, en este caso, ha aumentado el doble y el triple. Incluso igual que aumenta puede disminuir. Aquí ha disminuido a la mitad y ha disminuido de la misma forma. Luego, dos magnitudes son proporcionales si aumentan o disminuyen de la misma forma [5.1; 5.6]. Es decir, podemos predecir lo que nos va a costar.

Comparación de los Episodios

En la comparación de los episodios vamos a proceder explicitando las características más relevantes de cada categoría.

Fundamentos

En cuanto al concepto de proporcionalidad, el profesor de 6.ºP identifica al final del episodio las magnitudes proporcionales como aquellas que aumentan o disminuyen de la misma forma dando así un criterio para reconocer si dos magnitudes son proporcionales. La profesora de 1.ºESO, después de ayudar a los alumnos a ver que hay una variable independiente (gasolina), que se representa en el eje de las “x”, tiene en mente ver la proporcionalidad como una función lineal pues, para averiguar cuántas vueltas se dan al circuito con 120l de combustible, le interesa mostrar que el número de vueltas es 14,4=1,2·12. No obstante, enfatiza al final del episodio la definición de proporcionalidad: “lo que haces en un lado (gasolina), el factor de cambio en un lado se respeta en el otro (nº de vueltas)”. Por lo tanto, si bien la manera de proceder de uno y otro profesor son diferentes, las definiciones propuestas son equivalentes puesto que las magnitudes implicadas aumenten o disminuyan de la misma manera no es sino respetar el factor de cambio en un lado u otro de la tabla.

Los dos profesores han elegido ejemplos donde la razón de proporcionalidad $k=y/x$ es menor que la unidad y no entera (0,90 en el caso de las barras de pan y 0,12 en el caso de la fórmula 1). Ahora bien, ambos trabajan con razones escalares $x_2/x_1=y_2/y_1$ enteras y mayores que la unidad que resultan cómodas para los alumnos: el profesor de 6.ºP pide a sus alumnos el precio de 4 y 6 barras de pan, y la profesora de 1.ºESO que investiguen el número de vueltas que se darán con 47 (razón escalar no entera), 50, 90 y 120 litros.

En cuanto a las magnitudes implicadas, el profesor de 6.ºP explicita una de ellas (precio de las barras de pan) y su unidad de medida (euros). La profesora de 1.ºESO también menciona al principio las magnitudes implicadas en el ejemplo (gasolina y número de vueltas al circuito) sin indicar las unidades de medida.

Respecto al "dato del problema", la profesora de 1.ºESO insiste en la importancia del mismo, subrayando que siempre hay que extraer un dato de partida del enunciado del problema para poder empezar a trabajar: "os he dicho que con 10 litros hacía 1,2 vueltas y esto es un dato del problema"; el profesor de 6.ºP, en cambio, si bien representa los "datos" del problema en forma tabular, 2 barras de pan y 1,80€, no menciona explícitamente que este sea un punto clave.

Transformación

Ambos profesores sitúan los ejemplos para introducir el concepto en un contexto familiar para los alumnos: precio de barras de pan (6.ºP) y carreras de fórmula 1 (1.ºESO).

En cuanto a la utilización de representaciones gráficas de la situación del problema, la profesora de 1.ºESO recurre a la representación del "dato" del problema (con 10l se dan 1,2 vueltas al circuito) que le permita tanto extraer un modelo para responder el número de vueltas que se darán con 90l, como ofrecer una primera definición de proporcionalidad (mantener a un lado y a otro la misma relación). El profesor de 6.ºP, no recurre a representaciones gráficas de la situación del problema.

Ambos profesores otorgan un valor concreto a la tabla de valores, aunque explicitándolo en distintos grados. El profesor de 6.ºP señalando en la pizarra que lo que le interesa es la tabla donde pone número de barras de pan, precio, 2, 1.80, 4; y la profesora de 1.ºESO insistiendo en que hay que poner las magnitudes en forma tabular, recordando que ya las han utilizado y remarcando que las tablas se pueden representar tanto en forma vertical como horizontal.

Conexión

La profesora de 1.ºESO, al remarcar al final del episodio que la proporcionalidad no es otra cosa que conservar el factor de cambio que se aplica entre 2 valores de las magnitudes número de litros y número de vueltas al circuito respectivamente, busca que los alumnos descubran un modelo para el problema. Lo sabemos porque cuando los alumnos buscan el número de vueltas que corresponden a 120 litros de gasolina, de las dos maneras propuestas por ellos (utilizando el incremento gradual aditivo o multiplicando 1,2 por 12), la profesora resalta que la manera de encontrar la solución que le interesa es la segunda.

Contingencia

En relación con la contingencia, ambos profesores gestionan las intervenciones de los alumnos de manera similar y ágil, reconociendo y resaltando las aportaciones valiosas de los alumnos. La profesora de 1.ºESO enfatiza sobre todo aquellas intervenciones que conducen a ver la proporcionalidad como una función lineal. El profesor de 6.ºP, si bien pone de manifiesto las diferentes aportaciones de los alumnos relacionadas con la obtención del precio de las 4 barras de pan (incremento gradual aditivo, incremento gradual multiplicativo), no atiende todas las intervenciones relevantes. En este sentido, un ejemplo de intervención desatendida es “una barra de pan vale 90 céntimos”. Esto puede deberse a que el profesor no esté interesado en ese momento en introducir el procedimiento de reducción a la unidad, aunque con anterioridad sí que ha recogido una intervención de un alumno que ha propuesto obtener el precio de las 4 barras de pan dividiendo 1,80 entre 2 y multiplicando el resultado por 4.

El profesor de 6.ºP no muestra seguridad en todas las intervenciones, como por ejemplo en el caso de asignar una medida a una magnitud: “El precio ¿no? Dinero. ¿Cómo escribimos el dinero?”. Se observa aquí cierta confusión.

General

En relación con el concepto de proporcionalidad, los dos profesores tienen claro que su objetivo es profundizar en el mismo aunque de maneras diferentes. Mientras el profesor de 6.ºP propone a los alumnos al final del episodio una definición más concreta que la que ofreció al inicio de la primera clase cuando introdujo la proporcionalidad como una relación entre magnitudes mesurables, la profesora de 1.ºESO insiste en la misma definición que ya propuso al principio.

Ambos profesores generan durante el episodio una situación interactiva, solicitando reiteradamente la intervención de los alumnos, discutiendo activamente el problema en la pizarra y escribiendo continuamente. El profesor de 6.ºP analiza y discute con los alumnos el problema en la pizarra a partir de la representación de todos los datos que salen a lo largo del episodio en la tabla de valores.

Discusión de Resultados y Conclusiones

En cuanto a los objetivos del profesor al enseñar el tema de proporcionalidad, al analizar y comparar los episodios, constatamos que:

- El concepto de proporcionalidad que construye el profesor de 6.ºP se basa en la idea de relación, al haber afirmado en la primera clase que “la proporcionalidad es una relación entre magnitudes mesurables”. A partir del ejemplo de las barras de pan se constata que lo que entiende por relación es la razón escalar entre dos valores de la misma variable. Esto lo hemos podido identificar porque el profesor ha construido el concepto de proporcionalidad insistiendo en que al doble de un valor le corresponde el doble del otro; que al triple de un valor le corresponde el triple del otro; y que “si una magnitud aumenta, aumenta la otra”.
- La profesora de 1.ºESO construye el concepto de proporcionalidad partiendo de un ejemplo concreto y llevando a los alumnos hasta la siguiente definición de proporcionalidad: “la proporcionalidad quiere decir que lo que haces en un lado, el factor de cambio en un lado se respeta en el otro”. El concepto de proporcionalidad que se construye se basa en el concepto de

"factor de cambio": lo que se mantiene a uno y otro lado de la tabla.

- La profesora de 1.ºESO no limita la comprensión del concepto de proporcionalidad a la comprensión del concepto de "relación" aunque sí utiliza "relación" para aclarar la definición que ha ofrecido: "mantienes a un lado y al otro la misma relación". Esto lo hace porque se percata, en el momento de utilizar la expresión "factor de cambio", que puede ser difícil de entender para los alumnos, por lo que reexplica la palabra "factor" utilizando la palabra "relación".
- Ambos profesores tienen en mente que han de construir el concepto de proporcionalidad, pero la manera de proceder de ambos es distinta. La profesora de 1.ºESO conecta la proporcionalidad y la idea de modelo para no reducirla, por ejemplo, al hecho de doblar o triplicar magnitudes, relacionando así desde el principio la proporcionalidad con la función de proporcionalidad. Esta es una de las diferencias en la construcción del concepto de proporcionalidad entre ambos profesores. Mientras ella problematiza el concepto para que el alumno construya una definición, el profesor de 6.ºP no lo hace. La idea de proporcionalidad de la profesora, al hacer intervenir la función de proporcionalidad, es más compleja que la del profesor.
- En cuanto a la elección de ejemplos, el profesor de 6.ºP elige uno en el que si bien la razón de proporcionalidad $k=y/x$ no es entera, pide encontrar valores en la tabla de proporcionalidad donde la razón escalar entre dos valores de la misma variable es prototípica (2, 3 ó 1/2). La profesora de 1.ºESO elige un ejemplo donde la razón de proporcionalidad no es entera, si bien pide encontrar valores en la tabla donde las razones escalares son enteras (9, 5 y 12), pero no prototípicas. Entendemos que así pretende evitar que los alumnos cometan errores como el de restringir la proporcionalidad al hecho de doblar o triplicar magnitudes.
- En la profesora de 1.ºESO se observa visión del horizonte matemático hacia adelante cuando enfatiza que las 10.8 vueltas al circuito que corresponden a 90l de gasolina se obtienen a partir del producto $9 \cdot 1.2$, pensando en la futura conexión de la razón de

proporcionalidad con la función lineal y el primer modelo de función.

Llegados a este punto nos podemos preguntar hasta qué nivel los alumnos han llegado a construir y a utilizar el razonamiento proporcional. Como ya advirtiera Susan Lamon (2007), para que un alumno llegue a tener “razonamiento proporcional”, es necesario que reconozca tanto la razón de proporcionalidad entre dos espacios de medida como la relación funcional entre ambos espacios. El hecho de que un alumno encuentre el valor correspondiente en una tabla de proporcionalidad no garantiza que esté utilizando razonamiento proporcional, pues a menudo los alumnos contestan adecuadamente cuestiones sobre proporcionalidad porque utilizan conocimientos mecanizados sobre fracciones equivalentes, relaciones numéricas o aplicaciones de procedimientos algorítmicos que lo que hacen en realidad es eludir el uso de la razón de proporcionalidad $k=y/x$.

A este respecto, la profesora de Secundaria, al marcarse como objetivo que el alumno llegue a ver la función de proporcionalidad más allá de la aplicación de la técnica de reducción a la unidad, se acercará más que el profesor de Primaria a conseguir que el alumno razone proporcionalmente. A menudo se habla de proporcionalidad y de razonamiento proporcional como si fueran términos intercambiables, siendo en realidad la proporcionalidad un constructo matemático más amplio que el de razonamiento proporcional. La proporcionalidad supone comprender la estructura subyacente a una situación en la cual existe una relación invariante especial entre dos magnitudes que están relacionadas y que cambian a la vez (Lamon 2007). Comprender la proporcionalidad implica relacionar la razón escalar entre dos valores de la misma variable y la razón de proporcionalidad entre la dos variables como ya hemos señalado. Entendemos que con los objetivos que se marca la profesora de Secundaria, el alumno puede comprender mejor que es la proporcionalidad y razonar proporcionalmente. El profesor de Primaria puede conseguir que sus alumnos encuentren valores en una tabla de proporcionalidad pero difícilmente pueden razonar proporcionalmente y entender bien la proporcionalidad. Cuando la profesora de Secundaria se plantea como objetivo que el alumno vea el “modelo escondido” y llegue hasta la función de proporcionalidad, pretende que el alumno comprenda la proporcionalidad, comprensión que pasa por ser capaz de utilizarla como modelo matemático en situaciones del mundo real.

Notas

[1] El término profesor hace referencia a la persona que desempeña la función de enseñar con independencia de su género. Cuando se trate de un profesor o profesora concretos, sí que se especificará su género.

Bibliografía

Balderas, R., Block D. y Guerra, M.T. (2014). Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestro de secundaria. *Educación Matemática*, *26*(2), 7-32. SciELO. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1665-58262014000200001&lng=es&nrm=iso

De la Fuente, A., Deulofeu, J., and Rowland, T. (2016). Conectar lenguajes para resolver ecuaciones. *UNO*, *74*, 68-73.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(1), 129-142. Repositorio Institucional de la Ciudad de Alicante. Recuperado de http://hdl.handle.net/10045/35829

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework. En F. K. Lester, jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). National Council of Teachers Mathematics-Information Age Publishing.

Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Vol.1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp.273-298). Sense Publishers.

Rowland, T., Huckstep P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8 (3), 255-281. doi: https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. & Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. Sage. doi: http://dx.doi.org/10.4135/9781446279571

Torres, E. (2015). *El conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica: La enseñanza de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. UAB. Recuperado de https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2015/hdl_10803_290741/etm1de1.pdf

Van Dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back: The development of student's additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, *28*(3), 360-381. doi: https://doi.org/10.1080/07370008.2010.488306

Eugenia Torres Martin es profesora de enseñanza secundaria en el Instituto Serra de Miramar de Valls (Tarragona), España.

Jordi Deulofeu Piquet es profesor de didáctica de las matemáticas, en la Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Dirección de contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. **Postal Address**: Instituto Serra de Miramar de Valls (Tarragona). **Email:** eugetor@gmail.com