El Applet como un Recurso para la Reflexión en la Resolución de Problemas Geométricos

Clara Mayo Juárez[1] y Ulises Xolocotzin Eligio[2]

1) Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, México
2) Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México

Date of publication: February 24th, 2020
Edition period: February 2020-June 2020

To cite this article: Mayo Juárez, C. y Xolocotzin Eligio, U. (2020). El applet como un recurso para la reflexion en la resolución de problemas geométricos. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *9*(1), 88-115. doi: 10.17583/redimat.2020.3068

To link this article: http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2020.3068

REDIMAT, Vol. 9 No. 1 February 2020 pp. 88-115

El Applet como un Recurso para la Reflexión en la Resolución de Problemas Geométricos

Clara Mayo Juárez
Instituto Politécnico Nacional

Ulises Xolocotzin Eligio
Centro de Investigación y Estudios Avanzados

(*Received: 03 November 2017; Accepted: 09 February 2020; Published: 24 February 2020)*

Abstract

Este artículo utiliza una aproximación documental para explorar las maneras en las que un applet podría facilitar la reflexión acerca del uso de recursos matemáticos (conceptos y teoremas) durante la resolución de problemas geométricos no rutinarios. Se presenta un estudio cualitativo que investigó las maneras en que un applet diseñado en Geogebra ayudaba a que una pareja de futuros profesores de matemáticas de educación Secundaria reflexionara sobre el uso de ciertos recursos matemáticos involucrados en el problema planteado, tales como el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos, un ángulo, la bisectriz, el área de un círculo, un segmento. El estudio tuvo dos etapas: la primera consistió en resolver el problema, planteado por el investigador, en papel-y-lápiz y la segunda, en resolver el mismo problema apoyándose en un applet. La videograbación de estas etapas fue triangulada con una entrevista semi-estructurada. El análisis de estos datos mostró la presencia de los 2 procesos inmersos en la génesis documental: instrumentalización e instrumentación, en este último proceso se aprecia el surgimiento de la reflexión en los estudiantes cuando está presente el applet.

Keywords: Profesores en pre-servicio, applet, resolución de problemas, recursos, enfoque documental

2020 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.2020.3068

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

REDIMAT, Vol. 9 No. 1 Febrero 2020 pp. 88-115

The Applet as a Resource for Reflection During the Resolution of Geometric Problems

Clara Mayo Juárez
Instituto Politécnico Nacional

Ulises Xolocotzin Eligio
Centro de Investigación y Estudios Avanzados

(*Recibido: 03 Noviembre 2017; Aceptado: 09 Febrero 2020; Publicado: 24 Febrero 2020)*

Resumen

This article uses a documentational approach to explore the ways in which an applet might facilitate the reflection about the usage of mathematical resources during the resolution of non-routinary geometric problems. A qualitative study is presented that investigated the extent to what a Geogebra applet supported a couple of Secondary school student teachers for reflecting about their ways of using some mathematical resources involved in the problem posed, included the Pythagorean theorem for rectangle triangles, an angle, the bisector, the area of a circle, and a segment. The study had two stages: the first one was to solve the problem in paper-and-pencil. The second one was to solve the same problem with the support of an applet. These stages were video-taped and complemented with a semi-structured interview. The analysis of these data showed the presence of the 2 processes immersed in the documentary Genesis: instrumentalization and instrumentation, in the latter one can appreciate the emergence of the reflection when the applet is present.

Palabras clave: Preservice teachers, applet, problema solving, resources, documentation approach

2020 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.2020.3068

Desde hace tres décadas se ha documentado que los profesores de matemáticas tanto en servicio como en pre-servicio suelen tener problemas para movilizar sus conocimientos al resolver problemas matemáticos en contextos de papel-y-lápiz (Ball, Thames & Phelps, 2008; Tatto & Senk, 2011; Shulman, 1986,1987). Para contrarrestar esta problemática, diversos autores (e.g., Granberg & Olsson, 2015; Hollebrands, 2007; Hollebrands & Lee, 2016; Zulnaidi & Zakaria, 2012) han investigado la posibilidad de qué herramientas digitales matemáticas tales como calculadoras CAS (Texas instruments) o softwares de geometría dinámica (SGD, e.g., Geogebra), puedan ser utilizados como recursos para que los profesores profundicen en el análisis y la reflexión durante la resolución de problemas. Pepin, Gueudet y Trouche (2016) señalan que las herramientas digitales se están incorporando en el aula rápidamente, lo que genera la necesidad de investigar sus efectos en los procesos educativos. En particular, estos autores sugieren investigar la interacción que los profesores y futuros profesores tienen con los recursos.

El Software de Geometría Dinámica como recurso para desarrollar significados

Entre los recursos digitales más usados para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se encuentran los relacionados con la geometría y el álgebra, incluyendo los SGDs como Geogebra, Geometer's Sketchpad, y Cabri, así como los Computer Algebra Systems (CAS). Muchos de estos softwares no fueron creados con un enfoque pedagógico particular, ni todos son de libre acceso o sugeridos en los planes y programas de estudio para la enseñanza de matemáticas. Ante esto, cada profesor elige idiosincráticamente el software que utilizará en su práctica. Las representaciones visuales en entornos dinámicos tienen beneficios como su movimiento, (e.g., rotación, traslación) y su fácil manipulación, por ejemplo, el arrastre de objetos geométricos sin que estos pierdan sus propiedades de construcción (Hollebrands & Lee, 2016; Sangwin, 2007) lo que permite al estudiante observar lo que cambia o se mantiene constante (Goldenberg & Cuoco, 1998). Dadas sus características, los SGD permiten exploraciones dinámicas que mejoran la visualización y comprensión del objeto matemático en estudio (Granberg & Olsson, 2015). Geogebra es un SGD que cuenta con una diversidad de herramientas que facilitan la construcción de applets, estos son representaciones dinámicas de algún problema que muestran información gráfica y en la mayoría de los casos puede interactuar con el individuo, el applet por lo general realiza funciones específicas. Los applets suelen ser de gran ayuda para resolver problemas, pues permiten explorar distintas representaciones del problema mismo que en medios estáticos suelen ser muy tediosos y tardados (Zulnaidi & Zakaria, 2012). Por ejemplo, con un applet es menos tedioso analizar la variación de una función cuyos parámetros cambian. En el aula, el software debe ser un compañero interactivo que permita retroalimentar con el fin de dar argumentos verificativos sobre lo que funciona y lo que no, contribuyendo de esta manera en el mejoramiento del razonamiento creativo del individuo (Granberg & Olsson, 2015). Daher (2009) y Hoffkamp (2011) señalan que el applet proporciona una manipulación más sencilla del problema que no sería posible en papel y lápiz, permite una retroalimentación instantánea y correctiva, aumenta la motivación y atención de los estudiantes, y presenta representaciones múltiples del mismo concepto matemático. Es así como las distintas representaciones pueden ayudar a pensar de manera crítica y reflexiva sobre los conceptos matemáticos que están involucrados en un problema e incluso puede dar lugar a construcciones generalizadas de su solución (Duval, 1999).

Las investigaciones de Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon, y Reed (2012) y Hoffkamp (2011) encontraron que los applets pueden llevar a los estudiantes a mayores niveles de comprensión de conceptos relacionados con el cálculo. Por su parte, Pea (1985) menciona que la tecnología digital debe funcionar como un amplificador y reorganizador del pensamiento, y no sólo ser usada como facilitador de operaciones. En este sentido, los SGDs pueden actuar como mediadores semióticos útiles para facilitar la comprensión de significados matemáticos (Bussi & Mariotti, 2008). Ruthven (2012) señala que, en una tarea dada, los artefactos (recursos) permiten al usuario permear en los objetos matemáticos con el fin de ayudar a dar sentido a sus significados. De esta manera, un recurso sea digital o no, es considerado un mediador semiótico (Mariotti & Maracci, 2012). Dar sentido y significado a los objetos matemáticos no es algo que ocurra espontáneamente en los sujetos. Al respecto, Schön (1983, 1987) considera que las reflexiones que los sujetos hagan de sus acciones, sobre lo que hacen y piensan, serán el medio para que puedan movilizar su conocimiento y de esta manera continuar reconstruyéndolo, pues es a través de las acciones que la estructura cognitiva del individuo está en continuo desarrollo. Este autor considera que las reflexiones no nacen por si solas en los sujetos, sino que tiene que existir algo que las genere, por el ejemplo a partir del asombro al observar algo inesperado y de lo cual quieren saber más, o al encontrar que lo que se tenía previsto no ocurre. Por su parte, Schoenfeld (1985) señala que la resolución de problemas requiere de procesos metacognitivos (monitoreo, regulación y control) que el sujeto efectúa sobre su propia actividad cognitiva. La actividad metacognitiva desarrollada por el sujeto durante la resolución es un camino que puede permitir plantear interrogantes como ¿de que otra manera podría resolverlo? la cual podría llevarlos a generar reflexiones. En este estudio consideramos que el applet puede potenciar acciones que originen procesos de reflexión en los profesores en pre-servicio por lo que nuestro interés está en investigar cómo un applet construido en Geogebra puede generar reflexiones sobre el uso de recursos matemáticos tales como teoremas y conceptos durante la resolución de problemas, y como estás dan lugar a la movilización de su conocimiento matemático. Para tales fines, nos hemos basado en la aproximación documental (Gueudet & Trouche, 2009), pues esta nos da guía para analizar y documentar los beneficios que el applet de Geogebra puede brindar. Con este estudio pretendemos responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cómo son las reflexiones en torno al uso de recursos matemáticos que promueve el applet de Geogebra?
- ¿De qué manera estas reflexiones apoyan la solución de un problema no rutinario en papel y lápiz?

Recursos y génesis documental en la actividad matemática

El enfoque teórico utilizado en la presente investigación es la *Aproximación Documental de lo Didáctico* (ADD), desarrollada por Gueudet & Trouche (2009, 2010, 2012), la cual resalta dos constructos importantes: *recursos* y *documentos*. Adler (2000) analiza el concepto de recurso a partir de su descomposición, señalando que un recurso (re-source) puede ser visto como algo material, es decir un objeto (sustantivo), pero también como el origen de algo nuevo o diferente en el sentido que puede ser una acción (verbo). De acuerdo con Gueudet y Trouche (2009), los recursos que el profesor usa en la enseñanza son de dos tipos: recursos físicos o materiales (libro, calculadora, papel, lápiz, etc.) y recursos no físicos como son las acciones (discusión entre colegas, conocimiento del estudiante, etc.). Para Adler

(2012) los recursos del conocimiento son recursos no físicos, refiriéndose a los objetos matemáticos, los procesos y a las prácticas que usa. Los recursos del conocimiento son reclutados por el individuo a medida que desarrolla la actividad, así la selección de los dominios matemáticos, su uso, su transformación y su resultado es lo que da lugar al conocimiento matemático.

El *documento* visto desde la ADD es producto de la combinación de dos procesos: la instrumentación y la instrumentalización, los cuales forman a su vez parte de un proceso más grande llamado *génesis documental* (Véase Fig. 1). La instrumentación y la instrumentalización son procesos dinámicos anidados en esta génesis, y es a través de estos que el usuario de los recursos interactúa con ellos, los conoce, explora y se apropia de ellos. Durante estos dos procesos dinámicos el usuario moviliza sus conocimientos para darle uso y sentido a los recursos, en ocasiones producido por las características propias que ofrece el recurso y en otras por las que el usuario descubre durante la exploración.

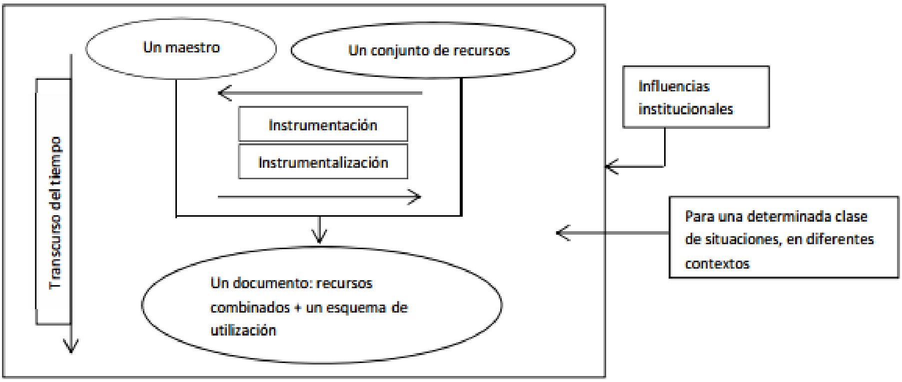


Figura 1. Representación esquemática de la génesis documental. (Tomada de Gueudet & Trouche, 2009, p. 206)

Para ejemplificar los procesos de instrumentación e instrumentalización, usemos el ejemplo del recurso físico *cuchara* (utensilio para comer). El usuario de ésta le dará el uso de acuerdo con lo que él conoce de ella y para el fin que cree que fue construida, este fenómeno es interpretado como un proceso de instrumentalización. Por otro lado, puede explorar las propiedades de la cuchara y descubrir otras potencialidades, por ejemplo, podría usar su concavidad para cavar un hoyo con ella, para destapar una botella, etc., es decir se le da un uso no esperado por el diseñador, este fenómeno se interpreta como proceso de *instrumentación*. Esta característica del recurso puede potencializar la actividad del sujeto. Cuando los entes matemáticos son utilizados como recursos en la resolución de problemas, su uso dependerá de los fines que se tengan y lo que se conozca de ellos, dando lugar al proceso de *instrumentalización*. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras puede ser usado para calcular el área de un triángulo rectángulo, lo que a su vez puede ser un requerimiento de un problema matemático más complejo, incluso aplicado a una necesidad práctica. Si se quiere calcular el área de una parcela de forma triangular con las longitudes de sus lados conocidas, se podría recurrir a este recurso (teorema de Pitágoras) a partir de lo que se sepa del tipo de parcela triangular que se tenga. Si la parcela tiene características de un triángulo escaleno, el recurso matemático (teorema de Pitágoras) limitaría la actividad, pero si es un triángulo rectángulo potencia la actividad para calcular el área. Cuando el recurso es capaz de instrumentar al sujeto para llevar a cabo su actividad se da el proceso de instrumentación. Estos dos procesos dinámicos que nacen del usuario son los que dan origen al llamado *documento*, éste se construye por un *recurso* y por el *esquema de utilización* (Vergnaud, 1990) que el individuo construye de él. Durante la génesis documental el usuario construye sus propios esquemas. La construcción de los esquemas dependerá de la interacción que tenga el sujeto con el objeto y de la exploración que haga sobre él con el fin de conocerlo. El trabajo que el sujeto hace para asignarle significado al recurso a partir de su uso para una determinada tarea y dar lugar al documento se le denomina *trabajo documental*. El documento elaborado durante dicho trabajo puede ser considerado como un nuevo recurso, por lo que éste no es algo aislado, sino que pertenece a un conjunto de recursos (véase figura 2).

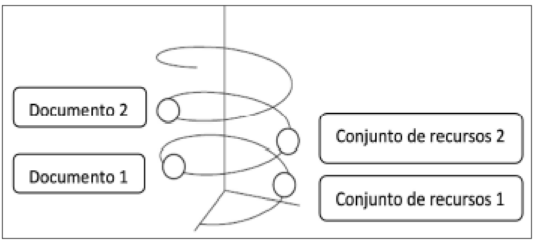


Figura 2. Documentos y recursos (Tomado de Gueudet & Trouche, 2009, p. 206)

Método

El estudio es cualitativo y por lo tanto el análisis es descriptivo. Esta metodología nos permitió acercarnos a los profesores en pre-servicio para observar sus acciones dentro del escenario de estudio propuesto (Cohen, Manion & Morrison, 2007). Para llevar a cabo el estudio se aplicaron actividades matemáticas a profesores en pre-servicio de educación secundaria. Los participantes contestaron un cuestionario diagnóstico días antes de que se les aplicara las actividades del estudio. Posteriormente realizaron 3 actividades, cada una consistió en resolver un problema geométrico-algebraico en dos etapas: la primera en papel-y-lápiz y la segunda con ayuda de un applet en Geogebra.

Participantes

Se trabajo inicialmente con un grupo de 20 profesores en pre-servicio, que en ese momento cursaban el sexto de ocho semestres en la Escuela Normal Superior de México. Primero se aplicó a todos los estudiantes un cuestionario diagnóstico en una sola sesión de hora y media. El único criterio de selección de los estudiantes fue que estuvieran cursando los últimos semestres de su formación y que quisieran participar en el estudio. Una vez aplicado el cuestionario se pidió al profesor encargado que nos permitiera trabajar las actividades del estudio con los 20 estudiantes. El profesor accedió a que trabajáramos con 6 de sus mejores estudiantes y sólo en su hora de clase. Se invitó a los demás estudiantes a trabajar fuera de su hora de clase, pero declinaron. Así, trabajamos con los 6 estudiantes elegidos por el profesor.

Cuestionario diagnóstico

El objetivo de este cuestionario fue verificar que los participantes conocían los temas contenidos en los problemas matemáticos de las actividades. Se procuró que los contenidos matemáticos del cuestionario fueran parte del currículo de formación de los participantes. El cuestionario tenía 14 ítems de contenido geométrico y algebraico, de las cuales seis eran problemas y ocho eran preguntas conceptuales. De los problemas, dos estaban relacionados con la pendiente de una recta, tres con encontrar el área de un triángulo y uno con razones trigonométricas. Las ocho preguntas cubrían los siguientes temas:

Teorema de Tales, teorema de Herón (ambas para triángulos), rectas paralelas y perpendiculares, semejanza de triángulos, bisectrices, ley de senos y cosenos, área del círculo y teorema de Pitágoras. El cuestionario diagnóstico sirvió para determinar el nivel de conocimientos respecto a los temas presentados. Principalmente, se buscó determinar si los participantes podían elaborar argumentos acerca de sus conocimientos matemáticos. La Tabla 1 describe los criterios utilizados para el análisis de las respuestas al cuestionario diagnóstico.

Tabla 1
Criterios de clasificación de las respuestas del cuestionario

Tipo de respuesta	Descripción
I. Respuesta incorrecta o no contestada	Ideas intuitivas sueltas [sin relacionar] o ideas semi-relacionadas, pero alejadas de la respuesta correcta, carecen de justificación, sobre el uso de los recursos, no llevan a la respuesta correcta.
II. Respuesta con criterios cercanos de la respuesta correcta	Ideas intuitivas semi-relacionadas, no fundamentadas sobre el uso de recursos, cercanos de la respuesta correcta; sin embargo, no permiten completar la respuesta correctamente.
III. Repuesta correcta sin fundamentar	Ideas intuitivas y razonadas [relacionadas entre sí] sobre el uso de recursos que llevan a la respuesta correcta, pero no son justificadas.
IV. Respuesta correcta y fundamentada	Ideas intuitivas, razonadas, relacionadas entre sí y justificadas sobre el uso de recursos que llevan a la respuesta correcta.

Los resultados del cuestionario diagnóstico indicaron que la mayoría de los estudiantes recuerdan la fórmula para calcular el área de un círculo, así como el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos, y aunque no definen el concepto de bisectriz saben a qué se refiere. La mayoría presenta dificultades para explicar el primer y segundo teorema de Thales, pero la mayoría puede identificar cuando dos triángulos son semejantes sin dificultad. Presentaron dificultad para calcular el área del triángulo sabiendo sólo sus lados, así como para describir el teorema de Herón para triángulos. Pocos recuerdan la ley de senos y cosenos, y tienen dificultades en lo referente al cálculo de las pendientes de una recta. La mayoría recuerda las razones trigonométricas. Estos resultados sugieren que el nivel de conocimiento matemático de los estudiantes tiende a ser homogéneo, denotando dificultades con los conceptos mencionados.

Actividades e implementación

Con los 6 estudiantes participantes se formaron 3 parejas al azar, las cuales trabajaron en 3 actividades de resolución de problemas no rutinarios. Entendemos como problemas no rutinarios a aquellos que no tienen un algoritmo o una solución inmediata, sino que requieren detenerse a pensar con cautela (Selden, Selden, & Mason, 1994). Con el applet se buscó sólo dar movimiento a la representación estática de papel-y-lápiz con el fin de permitirle al estudiante una exploración dinámica que lo llevara a promover la reflexión. Desde el enfoque constructivista social, el desarrollo del nuevo conocimiento matemático se deriva del diálogo y las negociaciones interpersonales. Tanto el conocimiento subjetivo (el que construye el individuo) como el conocimiento objetivo (conocimiento matemático) están en constante dinamismo en el que uno contribuye a la renovación del otro (Ernest, 1991). Las 3 actividades fueron implementadas en el siguiente orden a cada una de las parejas: Primero, en papel-y-lápiz y con el apoyo de una calculadora CASIO fx-82MS para facilitar las operaciones; segundo, en el applet de Geogebra. Se decidió esta forma de trabajo debido a que con este estudio se quiere observar el impacto que tiene el applet en Geogebra sobre las reflexiones antes efectuadas por los estudiantes en papel-y-lápiz. Este estudio no propone que se cambie dicha forma sino enriquecerla con la exploración en Geogebra. Es importante mencionar que, aunque los participantes no habían trabajado con applets su uso en este estudio sólo se limitó a mover un deslizador y a observar lo que ocurría. Se videograbó la resolución de problemas de las 3 parejas de estudiantes. También se recopilaron las producciones plasmadas en sus hojas de trabajo (trazos, cálculos matemáticos, gráficos, etc.). Durante la resolución de los problemas, la primera autora de este estudio intervino ocasionalmente con preguntas para entender las acciones de los sujetos, mismas que tuvieron el formato de una entrevista semi-estructurada (Harrell & Bradley, 2009).

Análisis y Discusión de Resultados de la Resolución de Problemas en Pares

Se reporta una de las 3 actividades de una de las parejas. Se eligió a esta pareja porque sus datos nos permiten observar, a partir de categorías de análisis, dos procesos clave en la génesis documental descrita en la ADD: instrumentación e instrumentalización. En las otras dos parejas estos dos procesos no se observaron tan claramente en los datos recopilados. De la pareja seleccionada se eligió sólo una actividad de resolución de problemas porque los datos fueron consistentes en las tres actividades, por tanto, se tomó la decisión de hacer un análisis profundo, pero no repetitivo. Con el análisis se trató de identificar si applet ayudaba a los estudiantes a reflexionar sobre el uso que les daban a los recursos matemáticos y cómo estás reflexiones difieren a las logradas en papel-y-lápiz. Las entrevistas fueron transcritas y analizadas con ayuda de tres categorías de análisis planteadas a partir de la ADD, descritas a continuación.

> *Recursos previos*: Son conocimientos matemáticos previos (conceptos y teoremas), que se usan y que permiten plantear las primeras ideas generalmente intuitivas de cómo resolver el problema.
>
> *Acciones Epistémicas*: Reflexiones conscientes que los estudiantes logran hacer sobre los conceptos y teoremas matemáticos y que guían a la solución del problema.
>
> *Generación de documentos*: Son los nuevos usos que se logran ver a los recursos previos debido a las acciones epistémicas efectuadas.

A continuación, se describe el análisis de la actividad en papel-y-lápiz, después se presenta el análisis de la exploración en Geogebra. En ambos casos se hacen descripciones por episodios seguidos de su correspondiente análisis. Llamamos episodio a una parte de entrevista que muestra los sucesos que se quieren resaltar de acuerdo con cada categoría de análisis. Un episodio, enlazado con otros, muestra de manera general el proceso de resolución. Cada episodio se segmentó en pequeños extractos de entrevista, los cuales son diálogos cortos segmentados con la intención de resaltar, de acuerdo con categorías de análisis, las acciones más representativas de los estudiantes. Dichas categorías se establecieron a criterio de los dos autores de este artículo y de acuerdo con el marco teórico.

Actividad en Papel-y-Lápiz

En la Figura 3 se muestra el problema matemático no rutinario presentado en papel-y-lápiz. Los recursos matemáticos relevantes de este problema que permiten encontrar una solución al problema son: teorema de Pitágoras, identificación de las alturas de un triángulo, bisectriz del ángulo recto, y fórmula para calcular el área de un triángulo cuando se conoce su base y su altura. Los estudiantes analizados mostraron un buen dominio de estos temas en el cuestionario diagnóstico. Dada su naturaleza geométrica, este problema es susceptible de ser llevado a un contexto de exploración dinámica. En el applet se implementaron elementos como un deslizador para implementar movimiento dinámico y dos botones que al ser activados hacían visibles dos segmentos de recta. Estos elementos tenían la finalidad de ayudar a que los estudiantes encontraran una estrategia de solución del problema.

Problema 1

Ambiente de papel-y-lápiz: el cuadrado y sus triángulos

En el cuadrado de vértices *ABCD* de lado 1 *cm* (como se muestra en la Figura 1), la diagonal *BD* se divide en cuatro partes iguales. ¿Cuál es el área del triángulo *DFC*? Ahora divide la diagonal *BD* en cinco partes iguales y luego en 6 partes iguales, ¿cuál es el área del triángulo *DFC* que se forma con la quinta y sexta parte de la diagonal *BD*?

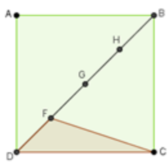


Figura 3. El cuadrado (tomado y modificado de Mason, Burton y Stacey, 1989).

En la siguiente transcripción, los estudiantes son nombrados S1 y S2, mientras que al entrevistador se le nombra E.

Episodio Ia. Recursos previos

En este extracto de entrevista se pueden observar dos estrategias empleadas por los estudiantes para resolver el problema. Estas estrategias dan evidencia del uso que los estudiantes dan a los recursos explícitos como la longitud de los lados del cuadrado, y a los implícitos como los triángulos, segmentos, etc. También se observa cómo estos recursos junto con los que logran encontrar con ayuda de sus conocimientos previos les permiten plantear las primeras ideas, generalmente intuitivas, de cómo resolver el problema. Para Fischbein (1994) lo intuitivo se refiere a una forma primitiva e inmediata del conocimiento que no se limita por un conocimiento sensorial, es decir, son declaraciones personales que rebasan lo observable. Es una teoría que va más allá de la información accesible, pero donde está presente un conocimiento matemático a priori.

Primera estrategia de resolución

L1 S1: […] Piden que calculemos el área DCF [...]. Sabemos que cada lado mide un centímetro [señala los lados del cuadrado] y la diagonal, entonces, mide […], por el simple hecho de ser un triángulo rectángulo [señala el triángulo BCD] y si aplicamos el teorema de Pitágoras […] [véase Figura 4.a].

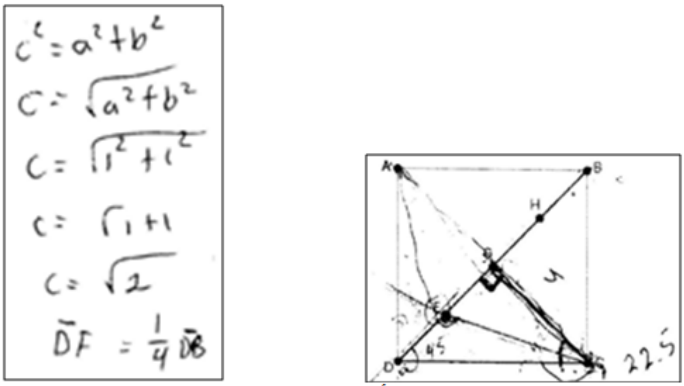
L2 S1: […] Nos piden calcular el área, entonces, creo que hay cinco formas de calcular el área de un triángulo. La más común es base por altura sobre dos, pero no tenemos la altura. ¡No recuerdo la del perímetro! Sí la del semi-perímetro […] Ahora si lo hacemos por ángulos, ya sé que éste mide 45 [señala el vértice D, en la Figura 4b].

L3 S1: […] Si yo trazo esta línea de acá a acá [señala del punto C al punto G en la Figura 4.b] puedo tener otro triángulo rectángulo de 90 grados [se refiere al triángulo CGF de la Figura 4.b] […] Supóngase que mide la mitad, pero la mitad de 45 es 22.5, este ángulo mediría 22.5 [traza el ángulo, véase Figura 4.b] […] No recuerdo [silencio prolongado].

L4 E: ¿Qué requieren o qué les hace falta?

L5 S1: Pues nos hace falta la medida del segmento FC [véase el segmento en la Figura 4.b].

Se muestra en este episodio que los estudiantes hacen uso de sus recursos previos (el triángulo rectángulo BCD y el teorema de Pitágoras) para encontrar el segmento DB. Su conocimiento los guía a usar estos recursos que los llevaron a encontrar otros. Ellos formulan varias estrategias de cómo podrían calcular el área del triángulo DFC, pero éstas no están del todo consolidadas, pues dicen no recordarlas por completo. La falta de conocimiento de los estudiantes obstaculiza su uso de recursos. Aunque logran encontrar algunos ángulos, estos recursos matemáticos no fueron suficientes para resolver el problema, lo que los llevó a abandonar esta idea. Segunda estrategia de resolución.



a. El Teorema de Pitágoras. b. Ángulos internos del triángulo DGB.

Figura 4. Conocimientos previos: Algebraicos y geométricos.

L6 S1: ¡Ah! Vamos hacer lo siguiente: Si calculamos el área del triángulo ABC [escribe] es igual a base por altura sobre dos, entonces, la base sería uno, por la altura que sería uno, entre dos […]. Entonces, se supone que éste [señala el triángulo BCG, véase Figura 4.b] sería dos sobre cuatro que esto es igual a […], ¿no son cuatro?

L7 S2: No, sería igual a un cuarto […], porque sería 1 por 1 [véase Figura 5].

L8 S1: ¡Así! uno por uno, perdón. Un cuarto. Entonces, se supone que éste [señala triángulo BCG, véase Figura 4.b] es un cuarto del área total [véase Figura 5], área del cuadrado ABCD […].

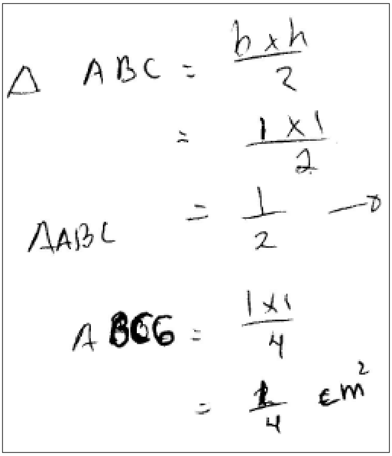


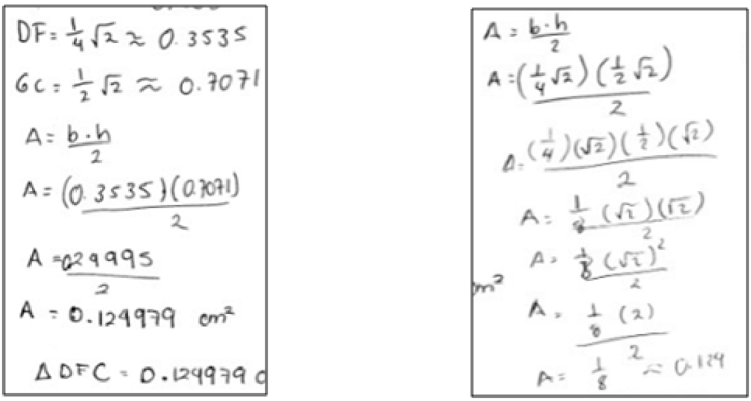
Figura 5. Fórmula para el área del triángulo

Debido al fracaso de la búsqueda de ángulos, como nueva estrategia se centran en buscar áreas de triángulos que los orillen a encontrar el área del triángulo DFC. Los estudiantes usan el segmento CG para dividir el triángulo BCD en dos triángulos (BCG y CDG). Ellos son conscientes de que estos dos triángulos son congruentes, pero no dan una justificación matemática que lo respalde. Sin saber cómo puede ayudar a la resolución ellos deciden encontrar el área del triángulo ABC y determinan que el área del triángulo BCG es la mitad del área de ABC. Con esta información logran descubrir que el área del triángulo BCG es un cuarto del área del cuadrado ABCD. En la L7 se observa la intervención de S2 con el único fin de corregir los razonamientos de su compañero. A partir de esta intervención S1 reflexiona acerca de sus acciones efectuadas en L6. En esta estrategia los estudiantes dirigen el uso de los recursos de acuerdo con lo que ellos saben y creen que pueden servir para resolver el problema; sin embargo, no están seguros de que los pueda llevar a la solución del problema.

Episodio IIa. Acciones epistémicas y generación del documento

En este episodio se muestra cómo a partir del fracaso de las estrategias anteriores, se produce la reorganización y surgimiento de nuevas ideas o estrategias de resolución, así como acciones conscientes que efectúan los estudiantes producto de su reflexión acerca de los distintos usos que se le pueden dar a los recursos.

> L9 S1: Es que si éste lo vemos así [voltea la hoja y señala el triángulo DFC, véase Figura 4.b] es un triángulo escaleno y la altura es exactamente este lado [señala el segmento CG] y ya tenemos la base que equivale a un cuarto del segmento BD […]. Entonces, CG sería igual a un medio de raíz de dos […].
>
> L10 S2: Cero, punto setenta, setenta y uno [se refiere a 0.7071].
>
> L11 S1: Entonces, la fórmula más básica para saber el área de un triángulo es base por altura sobre dos [véase Figura 6.b] […]. Podemos hacerlo de dos formas. [S2 opera en la calculadora y escribe en el papel A=0.124979, véase Figura 6.a].
>
> L12 S1: No recuerdo [realiza operaciones en el papel, véase Figura 6.b]. Entonces, el área sería ¿un octavo? Y ¿cuánto sería un octavo?
>
> L13 S2: Cero, punto ciento veinte y cinco, y sí es eso [señala en el papel 0.124979].



a. Procedimiento de estudiante S2. b. Procedimiento de estudiante S1.

Figura 6. Área del triángulo DFC.

Las limitaciones de las estrategias anteriores llevan a los estudiantes a repensar el uso que antes ya había dado al segmento CG y descubrir nuevos. Ahora logran ver este segmento como una de las tres alturas del triángulo DFC. A partir de esta idea y con los recursos antes deducidos logran darle solución al problema. Desde el sentido teórico este nuevo uso que se le da a este recurso y que lo lleva a la solución del problema y que además es aceptado como correcto por los estudiantes es el llamado *documento*.

Actividad con Geogebra

Para la exploración en Geogebra el entrevistador pidió a los estudiantes que movieran el deslizador y que observaran lo que pasaba **(***véase Figura 7***)**. La función del deslizador consistió en dividir la diagonal DB del cuadrado en "n" partes iguales, es decir, en 2, 3, 4, etc., con la finalidad de ir formando dos triángulos: BCD y DFC, de distintas áreas por cada división que se hiciera. El valor numérico de estas áreas se iba registrando dinámicamente en la pantalla de Geogebra conforme el deslizador se movía. Lo que se quería con este movimiento es que los estudiantes lograran tres cosas: Visualizar la solución, encontrar una estrategia matemática que la respaldara, y generalizar la solución al problema. Después de un rato de exploración con ayuda del deslizador, se aplicó la entrevista semi-estructurada. En el diálogo resultante se distinguieron dos episodios, uno en el que se movilizaron los recursos previos y otro en el que se dieron las acciones epistémicas y generación del documento.

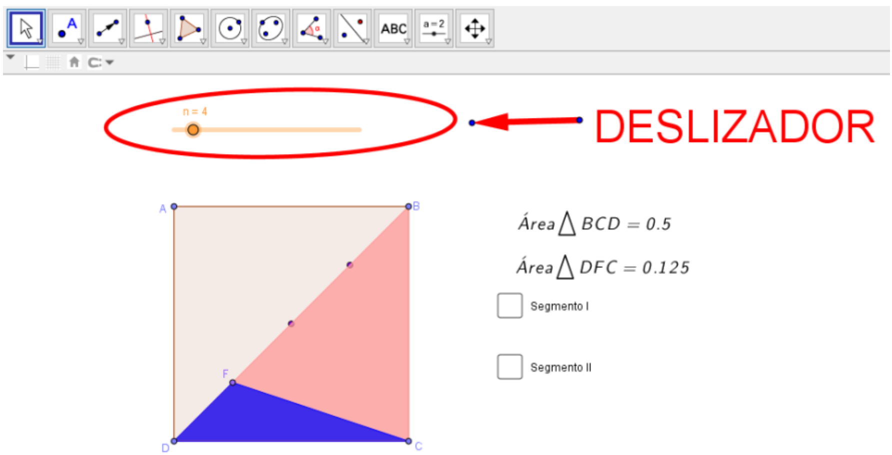


Figura 7. Exploración en Geogebra

Episodio Ib. Recursos previos

En las siguientes dos exploraciones con el applet, observamos que algunos recursos eran novedosos para los estudiantes y otros no. En la primera exploración, comparan los resultados encontrados en papel-y-lápiz con lo que se muestra en Geogebra y llegan a la conclusión de que obtienen los mismos. En la segunda, descubren recursos nuevos los cuales les permitieron darles un uso y encontrar un camino diferente de resolver el problema.

Primera exploración

> L14 E: ¿Es similar lo que encontraron en papel-y-lápiz con lo que observan en Geogebra?
> L15 S1: Sí, es básicamente lo mismo, sólo que lo que hicimos con papel-y-lápiz lo basamos todo en torno al cuadrado y ahorita, si lo basamos sólo al triángulo, sería exactamente lo mismo, el área. Cuando N es dividida en 10 partes, el área del triángulo que se forma [se refiere al triángulo DFC] es un décimo del área del triángulo mayor [se refiere al triángulo BCD, véase Figura 7] […].
> L16 E: ¿Se les ocurre otra forma de resolver el problema?
> L17 S1: Es que no hay otra forma.

En este episodio S1 logra darse cuenta de que también pudieron resolver el problema en torno al triángulo y no sólo en torno al cuadrado, como ellos lo hicieron en papel-y-lápiz. Esta primera exploración con el deslizador sólo les sirvió a los estudiantes para corroborar la solución que antes habían encontrado con papel-y-lápiz, pero no les generó otra idea diferente para resolver el problema.

Segunda Exploración

> L18 E: Con el cursor presiona dentro de la pantalla donde dice segmento uno [véase Figura 8].
> L19 S1: Sí, es lo que había dicho. Que todos los triángulos comparten la misma altura.
> L20 E: ¿Cuál sería la altura?
> L21 S1: El segmento CH.

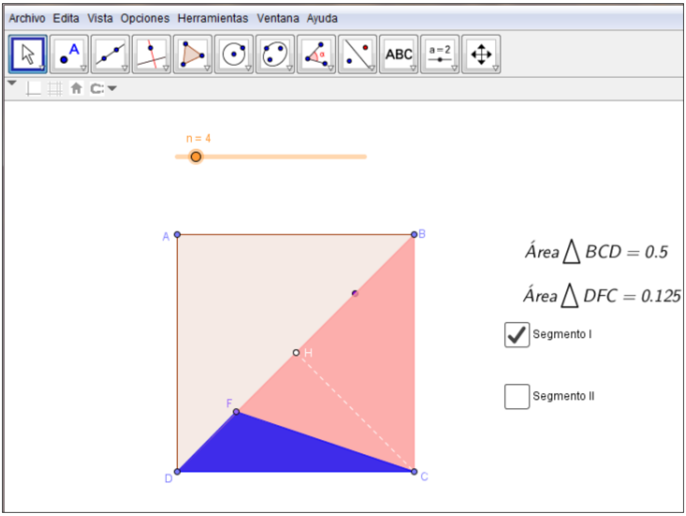


Figura 8. Segmento I (CH)

L22 E: Ahora presiona el segmento dos con el cursor [véase Figura 9].

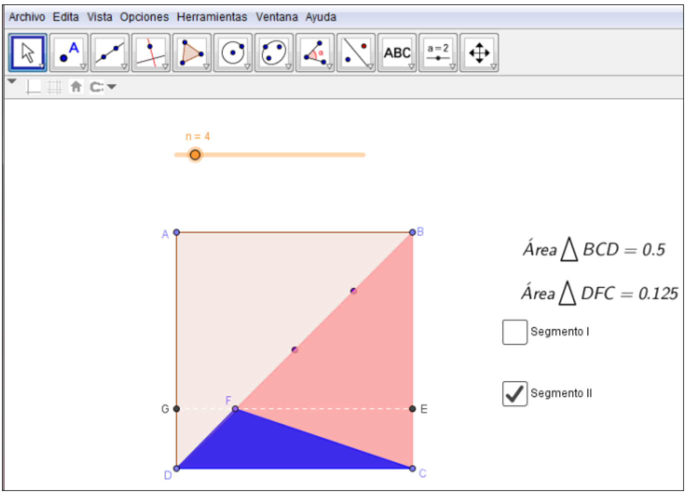


Figura 9. Segmento II (GE).

L23 S1: ¡Ah! ¡Ya sé que es esto! se supone que esto está en razón [se refiere en proporción a] de esto [señala segmentos DG y BE] […] DC está en razón de EC y FE está en razón de BC […] ¡Sí ahí está, es el teorema de los catetos! […][Véase Figura 10].
L24 E: ¿Podrían resolver, con lo que acaban de observar, el problema?
L25 S1: […] No recuerdo.

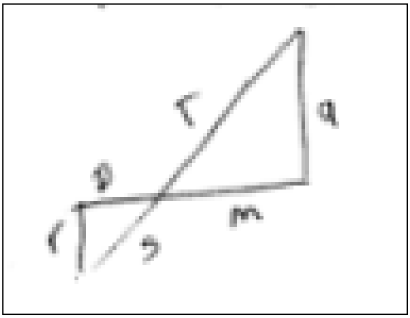
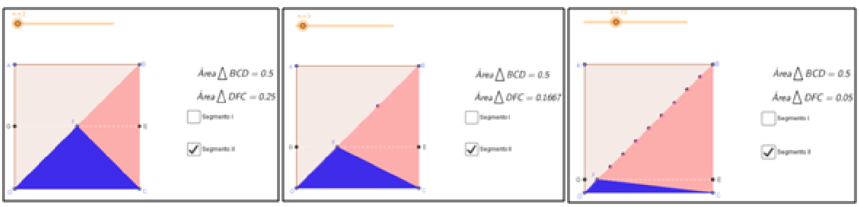


Figura 10. Proporcionalidad entre triángulos

L26 E: ¿Se les ocurre alguna otra idea?
L27 S1: ¡Ah ya! Sí, la diagonal [señala segmento DB] se divide en cuatro partes se supone que ésta, también, se divide en cuatro partes [señala segmento BC]. Entonces, si yo lo divido en dos [véase Figura 11.a], se supone que es la mitad, si lo divido en 3 [Figura 11.b] […] y si lo divido en 10 [Figura 11.c] este cachito es un décimo de uno [se refiere al segmento EC].



a. N=2 b. N=3 c. N=10

Figura 11. Partición del segmento DB en 2, 3 y 10 partes iguales.

Al inicio de este extracto se muestra que el segmento CH que aparece al activar el segmento I en el applet no causó ninguna sorpresa a los estudiantes pues ya lo habían usado, por lo que no le dieron algún otro uso. Sin embargo, lo que si les causó sorpresa fue el segmento II, al verlo se les ocurrió la idea de usarlo como medio para comparar los dos triángulos DGF y BEF y buscar proporciones idea que no funcionó. Más adelante en L27 se observa que los estudiantes encuentran la relación entre el número de particiones del segmento DB y el segmento EC, no obstante, este descubrimiento no les fue suficiente para resolver el problema.

Episodio IIb. Acciones epistémicas y generación del documento

En este episodio se muestra las acciones que dan lugar al cambio en el uso de los recursos. Las acciones no son efectuadas de manera automática debido a un uso mecanizado o memorizado, sino que requieren de una reflexión generada por la interacción con el recurso.

> L28 E: ¿Ven alguna relación entre el segmento GD y el triángulo DFC?
>
> L29 S1: FD es la hipotenusa del triángulo DGF y al mismo tiempo este DGF debería de estar en proporción [interrumpe S2].
>
> L30 S2: Simplemente, GD es la altura del triángulo rectángulo DFC. Entonces, para sacar el área es base por altura. Sabemos que la base es uno y la altura es un cuarto de uno, punto veinte y cinco […] y así se puede sacar el área […].

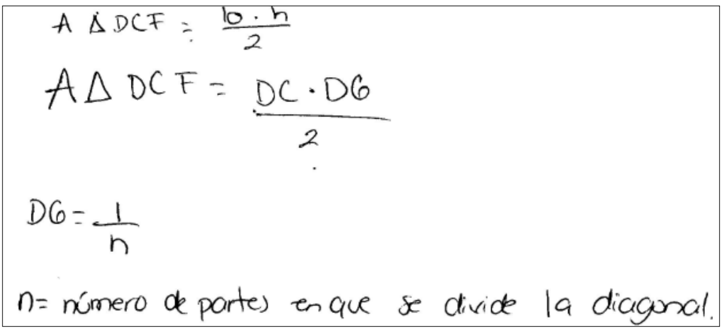


Figura 12. Solución parcial del problema.

L31 S1: Ahora dice, si dividiéramos la diagonal en cinco partes iguales. A ver vamos a hacerlo rápido, dijimos que la altura es un medio de raíz de dos y la base es un quinto de raíz de dos […]

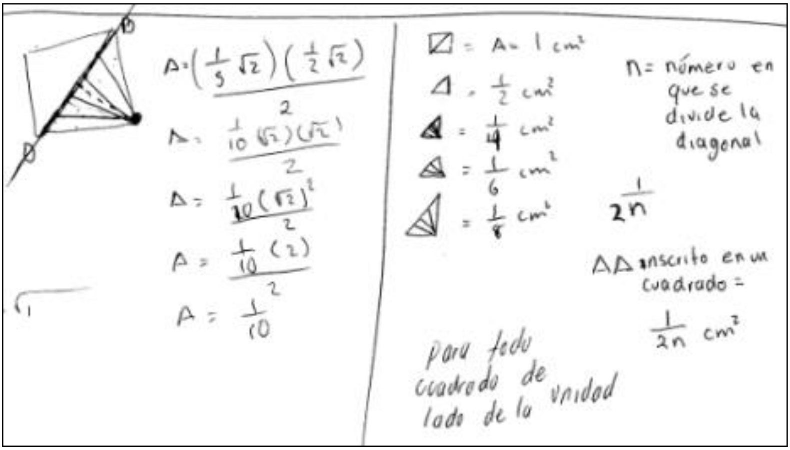


Figura 13. Solución generalizada del problema

En este extracto se observa que S2 logra visualizar que el segmento GD puede ser usado como una de las alturas del triángulo DFC. Este descubrimiento le permite encontrar una solución parcial al problema. Más adelante en L31 se observa que S1 logra generalizar la solución para cualquier número de divisiones del segmento DB. Este uso que los estudiantes dan al segmento GD con la exploración en Geogebra, no lograron visualizarlo en papel-y-lápiz ni tampoco pudieron visualizar esta estrategia de resolución del problema.

Discusión

Se observó que los estudiantes utilizaron recursos matemáticos similares, pero de manera distinta en cada una de las actividades, lo que nos habla de la forma en la que la naturaleza dinámica del applet aumentó los procesos de reflexión iniciados en la actividad en lápiz-y-papel. A continuación, discutimos la manera en la que los resultados del estudio responden a las preguntas de investigación.

¿Cómo son las Reflexiones en Torno al Uso de Recursos Matemáticos que Promueve el Applet de Geogebra?

En la actividad con Geogebra se observó cómo el dinamismo del applet favoreció acciones epistémicas con las que los alumnos confirmaron los recursos y soluciones producidos en la actividad en papel y lápiz, pero también descubrieron recursos matemáticos nuevos, que facilitaron reflexiones más profundas porque su uso les permitió encontrar nuevas estrategias para abordar el problema y encontrar una solución generalizada. Es importante enfatizar que la simple manipulación de los elementos dinámicos del applet fue insuficiente para generar el descubrimiento de recursos nuevos. Por ejemplo, en el Episodio 1b, la manipulación del deslizador y la consecuente división de la diagonal DB permite que los alumnos descubran que también pudieron haber resuelto el problema en torno al triángulo y no sólo en torno al cuadrado, como hicieron en la actividad papel y lápiz. Sin embargo, la estrategia subyacente en ambos casos, es el uso de las áreas como recurso matemático para resolver el problema y, por tanto, el uso del deslizador no les parece tan novedoso y no les hace ver que hay otros recursos matemáticos disponibles para resolver el problema. Es hasta que los estudiantes activan la visualización del Segmento II (GE) que descubren recursos nuevos como el teorema de los catetos (L23) y la relación entre el número de particiones de los segmentos DB y EC. Sin embargo, las acciones epistémicas clave para el descubrimiento de una nueva solución, más potente por ser generalizada, se da hasta que los estudiantes hacen una reflexión acerca del segmento GD, con la que se reutilizan recursos ya utilizados anteriormente, como las fórmulas para calcular las áreas de los triángulos. Desde el enfoque teórico el proceso de instrumentación se hizo presente en este momento por que el applet potenció la actividad de los estudiantes. La visualización del Segmento II (GE), junto con la intervención del investigador, generó en los estudiantes curiosidad e interés, llevándolos a continuar con la exploración del problema, como ha sido señalado por Daher (2009) y Hoffkamp (2011). La manipulación de las representaciones geométricas generadas por el applet fue crucial porque ayudó en la movilización de los conocimientos propios de los sujetos (p.ej., respecto a las áreas y teoremas como el de Pitágoras y el de los Catetos), en el sentido de la activación de esquemas descrita por (Vergnaud,1990). Los esquemas de uso ya alojados en el sujeto y los apropiados en el momento de la resolución se complementaron y ampliaron facilitando la movilidad de los recursos matemáticos que ya se habían activado en la actividad papel y lápiz.

¿De qué Manera Estas Reflexiones Apoyan la Solución de un Problema no Rutinario en Papel y Lápiz?

Para responder esta pregunta, primero describiremos los procesos de reflexión en la actividad lápiz-y-papel, para después discutir cómo estos procesos de reflexión aumentaron por medio de las herramientas dinámicas en la actividad en Geogebra. En la actividad papel-y-lápiz los participantes lograron identificar componentes implícitos y explícitos de la estructura matemática del problema. Los alumnos usaron sus conocimientos teóricos e intuitivos para identificar componentes tales como triángulos, ángulos, bisectrices, etc., mismos que constituyen sus recursos matemáticos puesto que detrás de ellos hay un esquema de uso que permite llevar a cabo una acción (Vergnaud,1990). El esquema detrás de un recurso muchas veces es activado y guiado por conocimientos y observaciones iniciales, en un proceso llamado *conocimiento-en-la-acción* (Schön, 1983), y no necesariamente por una reflexión consciente sobre sus usos. Al principio de la resolución los estudiantes explicaron la manera de usar los recursos de acuerdo con lo que sabían de ellos, y es aquí donde el proceso de instrumentalización (Gueudet & Trouche, 2009) entró en juego. En este proceso, los recursos matemáticos que se encontraban dentro de este ambiente de resolución estático no influyeron en el usuario, es decir, no los invitaron a ver otros usos distintos a los que ya conocían. Los usos que los estudiantes dieron a los recursos matemáticos involucrados en su primera estrategia de resolución no fueron del todo claros, carecían de convencimiento sobre si los llevasen o no a la solución del problema. Sin embargo, es importante señalar que algunos de estos usos que dieron a los recursos, a veces cargados de dudas, los llevó a encontrar algunos otros recursos (ángulos, longitudes de segmentos, áreas) que ayudaron a clarificar el posible camino a la resolución final del problema. Para la búsqueda de nuevos recursos los estudiantes se apoyaron de datos explícitos que daba el enunciado del problema, datos implícitos (segmentos, triángulos, ángulos, etc.,) trazados u observados en la figura, así como de sus conocimientos previos (el teorema de Pitágoras, la bisectriz, etc.). Durante estos primeros acercamientos con dichos recursos los estudiantes efectuaron lo que Gueudet & Trouche (2009) llaman trabajo documental, en el cual fueron dándole uso y sentido a los recursos, explorando su uso con el fin de encontrarles usos diferentes que pudieran ayudar a resolver problema. A partir de los errores cometidos con los recursos utilizados inicialmente, los estudiantes reorganizaron sus ideas y visualizaron otros, constituyendo así el proceso de instrumentación.

En la segunda etapa, que consistió en resolver el problema con ayuda del applet, la exploración inicial de los estudiantes no sólo sirvió para cerciorarse de que la solución parcial que encontraron en la etapa de papel-y-lápiz era correcta, sino que la visualización también les ayudó a darse cuenta de que pudieron haber abordado el problema en torno al triángulo ABC. La reflexión que consiguieron con la visualización se facilitó, como lo señalan Granberg y Olsson (2015), por las características dinámicas del applet. El deslizador sirvió para que los estudiantes pudieran observar y reflexionar sobre el comportamiento dinámico de las áreas de los triángulos DFC y BCD cuando la diagonal es divida en "*n*" partes iguales, así como la relación entre dichas áreas. Al identificar que las áreas que se mantienen constantes y las que cambian al mover el deslizador, facilitó a los estudiantes descubrir nuevos usos de los recursos (Hollebrands & Lee, 2016; Sangwin, 2007). Este uso del deslizador, los estudiantes descubrieron otras maneras de resolver el problema. Los resultados también indican que los recursos digitales no necesariamente facilitan procesos de reflexión, pero cuando lo hacen, se generan procesos de instrumentación e instrumentalización. Por ejemplo, la activación del "Segmento I" no causó ninguna sorpresa en los estudiantes y tampoco le vieron otro uso distinto al que ya le habían dado antes en papel-y-lápiz. En el sentido teórico el proceso de instrumentación, hasta el momento, no fue diferente al ya obtenido en papel-y-lápiz, por lo que las potencialidades y limitaciones del recurso digital no influyeron para generar nuevas acciones en los estudiantes. Sin embargo, al activar el Segmento II en el applet, este si causó sorpresa que los llevó a encontrar otra forma de resolver el problema. En el episodio IIb de la entrevista con Geogebra la intervención del entrevistador permite a uno de los estudiantes darse cuenta de que el segmento GD es la altura del triángulo DFC. El descubrimiento de este nuevo uso que se le da a este recurso fue crucial para que los estudiantes pudieran resolver el problema de forma generalizada. El segmento II del applet no sólo influyó en la actividad de los estudiantes, sino que también ayudó a reestructurar su forma de pensar para que los dos procesos dinámicos -instrumentación e instrumentalización- estuvieran presentes en la resolución del problema. Aunque las reflexiones generadas tanto en papel-y-lápiz como en el applet se complementaron para encontrar dos maneras distintas de resolver el problema, fueron las reflexiones hechas con ayuda del applet las que permitieron que los estudiantes lograran la construcción generalizada de la solución al problema, objetivo que no pudieron alcanzar con papel-y-lápiz. Con este estudio se puede observar que el medio dinámico ayudó a los estudiantes a movilizar su conocimiento, ya que pudieron visualizar otras formas de resolver el problema, distintas a las que pudieron ver con papel-y-lápiz. Si bien el trabajo en lápiz-y-papel generó que los estudiantes invocaran diversos conocimientos previos, el medio dinámico influyó para que los estudiantes invocaran un rango más amplio de ideas matemáticas.

Limitaciones y Conclusiones

En este documento sólo se reporta el análisis de una de las tres actividades presentadas a la pareja de estudiantes, estos mostraron comportamientos similares en las otras 2 actividades. En las 3 actividades se observó que fue hasta la interacción con el applet que los estudiantes pudieron ver nuevos usos a los recursos lo que ayudó a abrir nuevos caminos para resolver el problema. A pesar de la consistencia de los resultados observados en las tres actividades, es necesario reconocer que, dada la naturaleza no rutinaria de los problemas utilizados en esta investigación, es de esperarse que los procesos de reflexión se desarrollen de maneras cualitativamente diversas. En el estudio que aquí se reporta fue posible analizar estos procesos por medio de las acciones conjuntas y argumentos de los estudiantes. El estudio de procesos de reflexión en problemas no rutinarios abordados individualmente requerirá una estrategia de análisis distinta. Sin embargo, Los resultados obtenidos de las tres actividades sugieren que es posible extrapolar los beneficios que pudiera presentar el applet en problemas no rutinarios similares. Las figuras geométricas dinámicas ampliaron la visión sobre el uso de los recursos distinto al de las figuras estáticas. Las tres actividades en el applet no sólo facilitaron la observación del comportamiento de los elementos que conformaron el problema, sino que causaron asombro e interés en los estudiantes al ver lo que ocurría. La disposición de buscar nuevas formas de resolver el problema con ayuda del applet fue más vehemente al mostrado en papel-y-lápiz.

Para concluir, nos gustaría enfatizar que el estudio reportado ofrece datos empíricos que demuestran el potencial de la ADD como herramienta teórica para explicar la manera en la que las herramientas representacionales del SGD pueden estimular el desarrollo del pensamiento matemático de profesores en formación. Esto es importante porque las propuestas didácticas y tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas sólo pueden tener éxito si se sostienen en marcos teóricos que, como la ADD, tienen la capacidad de explicar la complejidad del pensamiento matemático en la práctica.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por una beca doctoral otorgada a Clara Mayo Juárez por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México, beca núm. 250516. Los autores reconocen y agradecen al Dr. José Guzmán (q.e.d.p.) por su apoyo y guía para la realización de este trabajo.

References

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 3, 205–224. doi:10.1023/A:1009903206236

Adler, J. (2012). Knowledge resources in and for school mathematics teaching. In G. Gueudet, B. Pepin, and L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources* (pp. 3–22). Netherlands: Springer.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389−407. doi: 10.1177/0022487108324554

Bussi, M. B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746–783). New York: Routledge.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. New York: Routledge.

Daher, W. (2009). Preservice teachers' perceptions of applets for solving mathematical problems: Need, difficulties and functions. *Educational Technology & Society, 12*(4), 383–395. https://www.jstor.org/stable/jeductechsoci.12.4.383

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: From repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1243–1267. doi:10.1007/s10763-012-9329-0

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis Issues for learning. In F. Hitt y M. Santos (Eds.). *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3−26). Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London, Falmer Press.

Fischbein, E. (1994). *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach*. Netherlands: Reidel Publishing Company.

Goldenberg, E. P., & Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer, & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351–367). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Granberg, C., & Olsson, J. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. *Journal of Mathematical Behavior, 37*, 48−62. doi:10.1016/j.jmathb.2014.11.001

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 199−218. doi: 10.1007/s10649-008-9159-8

Gueudet, G., & Trouche, L. (2010). Des resources aux documents travail du professeur et genèses documentaire. En G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 57−74). Rennes/Lyon: Presses Universitaires de Rennes-Institut National de Recherche Pédagogique.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2012). Teachers' Work with Resources: Documentational Geneses and Professional Geneses. En G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), From *Text to 'Lived' Resources* (pp. 23−42). Netherlands: Springer.

Harrell, M. C., & Bradley, M. A. (2009). *Data Collection Methods Semi-Structured Interviews and Focus Groups*. U.S. RAND Corporation.

Hoffkamp, A. (2011). The use of interactive visualizations to foster the understanding of concepts of calculus–design principles and empirical results. *ZDM Mathematics Education, 43*(3), 359−372. doi:10.1007/s11858-011-0322-9

Hollebrands, K. F. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(2),164−192. doi: 10.2307/30034955

Hollebrands, K. F., & Lee, H. S. (2016) Characterizing questions and their focus when pre-service teachers implement dynamic geometry tasks. *Journal of Mathematical Behavior 43*, 148−164. doi:10.1016/j.jmathb.2016.07.004

Mariotti, M., & Maracci, M. (2012). Resources for the Teacher from a Semiotic Mediation Perspective. En G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. 59−75). New York: Springer.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. Madrid: Labor.

Pea, R. D. (1985). Beyond amplification: Using the computer to reorganize mental functioning. *Educational psychologist*, *20*(4), 167–182. doi:10.1207/s15326985ep2004_2

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2016). Mathematics Teachers' Interaction with Digital Curriculum Resources: opportunities to develop teachers' mathematics-didactical design capacity. *In AERA annual meeting.*

Ruthven, K. (2012). Constituting Digital Tools and Materials as Classroom Resources: The Example of Dynamic Geometry. En G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), From *Text to 'Lived' Resources* (pp. 23−42). Netherlands: Springer.

Sangwin, C. (2007). A brief review of Geogebra: Dynamic mathematics. *MSOR Connections*, *7(2)*, 36–38.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press.

Schön, D.A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Ney York: Basic Books.
Schön, D.A. (1987). *Educating the reflective practitioner: Toward a new design for teaching and learning in the professions*. San Francisco: Jossey Bass.
Selden, J., Selden, A., & Mason, A. (1994). Even good calculus students can´t solve nonroutine problems. *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*, *33*, 19–26.
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4−14. doi:10.3102/0013189X015002004
Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1−21. doi:10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411
Tatto, M., & Senk, S. (2011). The Mathematics Education of Future Primary and Secondary Teachers: Methods and Findings from the Teacher Education and Development Study in Mathematics. *Journal of Teacher Education 62*(2), 121−137. doi:10.1177/0022487110391807
Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *10*(2, 3), 133–170.
Zulnaidi, H., & Zakaria, E. (2012). The effect of using GeoGebra on conceptual and procedural knowledge of high school mathematics students. *Asian Social Science*, *8*(11), 202−206.

Clara Mayo Juárez es profesora e investigadora en el área de postgrado del Instituto Politécnico Nacional, México.

Ulises Xolocotzin Eligio es investigador en el Departamento de Matemática Educativa en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México.

Dirección de contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. **Dirección Postal**: Luis Enrique Erro S/N Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Gustavo A. Madero, 07738 CDMX. **Email:** ulises.xolocotzin@cinvestav.mx