

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA DISPERSIÓN DE UN CONJUNTO DE DATOS

LEONEL AMAYA, JESÚS MEDELLÍN, ANDREA PARADA Y FEDERMÁN
ALFONSO

BOGOTÁ, NOVIEMBRE DE 2021

1. INTRODUCCIÓN

En este documento, presentamos la unidad didáctica “Interpretación gráfica de la dispersión en un conjunto de datos”, implementada por el grupo 3 de MAD 8, de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. La propuesta fue implementada con los estudiantes del grado noveno del colegio Delia Zapata Olivella IED. Debido a la pandemia, la unidad didáctica fue implementada de manera virtual. Sin embargo, el profesor la puede implementar de forma virtual o presencial. La intención de este documento es presentar y proporcionar información de apoyo a todos los colegas, para que, si lo desean puedan implementar la unidad didáctica en sus instituciones.

Los estudiantes de noveno se encuentran entre los 13 y 16 años. Ellos pertenecen, en su gran mayoría, a los barrios aledaños al colegio. Son de estrato socioeconómico uno y dos. Su economía depende, en mayor medida, de trabajos relacionados con el servicio de vigilancia, servicio doméstico y cultivo de flores. Los estudiantes mostraron, en pruebas internas y externas, que tenían un buen desempeño en el pensamiento numérico. No obstante, no sucedía lo mismo con el pensamiento aleatorio y de sistema de datos, debido a que el tiempo destinado a la enseñanza de este pensamiento ha sido limitado en grados anteriores. Esto nos motivó a plantear la unidad didáctica en este ámbito, con el fin de mejorar los procesos relacionados con el componente estadístico.

Con base en lo anterior, el tema de nuestra unidad didáctica es la interpretación gráfica de la dispersión en un conjunto de datos. Este tema se encuentra determinado para ser enseñado en el último periodo académico, según el plan de área de la institución. A su vez, este tema se ubica en el estándar básico de competencias del Ministerio de Educación Nacional (MEN), en el grupo de los grados octavo y noveno, “interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría” (MEN, 2006, p. 87). Corresponde al derecho básico de aprendizaje (DBA) No. 10 de grado noveno “propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización” (MEN, 2015, p. 72).

Con la implementación de la unidad didáctica, buscamos abordar el análisis de la dispersión de un conjunto de datos, desde dos visiones diferentes: una, por medio de los cálculos y las comparaciones pertinentes de los resultados, para llegar a una conclusión; y, la otra, por medio del análisis por inspección de los gráficos de barras. De esta forma, buscamos fortalecer la interpretación gráfica, generar hipótesis, analizar el contexto, obtener inferencias y calcular las medidas de tendencia central y de dispersión asociados con la dispersión de un conjunto de datos.

Esta unidad didáctica favorece el aprendizaje de las matemáticas mediante el desarrollo de tareas que contribuyen al aprendizaje del tema. Estas tareas constituyen una secuencia que permite determinar la simetría u homogeneidad del conjunto de datos y establecer relaciones para el análisis del gráfico de barras. Además, las tareas de aprendizaje contribuyen al trabajo en equipo, la interacción, el uso de recursos, dentro de los que se encuentran los videos y la calculadora.

2. ARTICULACIÓN DE LOS CONTENIDOS

El análisis del tema, definido para la unidad didáctica, inicia con la estructura de contenido. Para ello, determinamos la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología asociada al tema, que explicaremos en los siguientes apartados.

2.1. Estructura conceptual

Para describir la estructura conceptual del tema, primero identificamos los conceptos y procedimientos propios del tema de la unidad didáctica, luego establecemos las relaciones entre ellos y los requerimientos conceptuales que deben tener los estudiantes al abordar las tareas propuestas.

Tanto la simetría como la homogeneidad permiten establecer el comportamiento del conjunto de datos, de modo que, cuando hablamos de simetría consideramos cómo están distribuidos los datos y, cuando hablamos de homogeneidad, observamos y analizamos qué tan cerca o lejos se encuentran los datos de la media. El mapa conceptual de la estructura conceptual se encuentra en el anexo 01¹.

2.2. Sistemas de representación

Los sistemas de representación son una forma de encausar los diferentes conceptos y procedimientos referidos a la interpretación gráfica de la dispersión de un conjunto de datos con sus símbolos y signos (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018, p. 72). Una traducción entre sistemas es un procedimiento que consiste en transformar la forma de expresar un concepto (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018, p. 73).

Asociamos el sistema de representación numérico con nuestro tema, al realizar la recolección de datos. Podemos catalogar estos datos en cuantitativos discretos, si los valores son números enteros, o continuos, si los valores son números decimales. Así, los estudios que consisten en el recuento de objetos, como número de miembros de una familia y número de empleados de una empresa, entre otros, dan lugar a ser tratados con variables discretas. Mientras que, al medir magnitudes tales como el peso, el tiempo, capacidad y longitud, entre otros, se tratan con variables continuas.

Usamos el sistema de representación tabular al realizar una tabla de frecuencias. La tabla de frecuencias es una forma de organizar los datos de un estudio, en filas y columnas, que nos permite establecer, por ejemplo, qué valor de la variable es el de mayor frecuencia y como están distribuidos los datos.

Asociamos el sistema de representación gráfico al uso del plano cartesiano, como base para representar gráficos de barras. En estos gráficos, la escala en el eje horizontal (x) lleva los valores de la variable estudiada y el eje vertical (y) representa la frecuencia absoluta. No se requiere que las escalas de los ejes sean iguales y las barras deben estar separadas.

Respecto al sistema de representación ejecutable, encontramos los programas Excel y GeoGebra que nos permiten organizar los datos en tablas y obtener los valores de las medidas estadísticas.

¹ Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/23716>.

El sistema de representación simbólico está asociado a los diferentes símbolos que intervienen en las expresiones matemáticas de (a) frecuencia, (b) medidas de localización y (c) medidas de dispersión o escala (Orellana, 2001), como mostramos en la tabla 1.

Tabla 1
Sistema de representación simbólico

Nombre	Símbolos	Relaciones
Frecuencia	$fi, F, \%$	
Medidas de localización	Me, Σ, Mo, \bar{X}	$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{N} \quad Me = \frac{x_{(\frac{i+1}{2})}}{2}$ $Me = \frac{\left(\frac{x_i}{2} + \frac{x_{i+1}}{2} \right)}{2}$
Medidas de dispersión	$S, S^2, \Sigma, X, X_i, N, C_v, \sqrt{\quad}, R$	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N - 1}$ $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N - 1}}$ $C_v = \frac{S}{\bar{X}}$

En la tabla 1, observamos los símbolos que se relacionan con la dispersión de un conjunto de datos. Por ejemplo, en la primera fila, f_i, F y $\%$ significan respectivamente frecuencia, frecuencia absoluta y porcentaje. En la segunda fila, Me, Σ, Mo y \bar{X} significan la mediana, sumatoria, moda y media aritmética. En la última fila, $S, S^2, \Sigma, \bar{X}, X_i, N, C_v$ y R representan la desviación típica, la varianza, la sumatoria, la media aritmética, el valor del dato en la posición i , el número de datos, el coeficiente de variación y la raíz cuadrada. Estos símbolos muestran relaciones entre ellos cuando conforman lo que conocemos como expresiones matemáticas de las diferentes medidas. El mapa conceptual detallado de los sistemas de representación se encuentra en el anexo 02.

En relación con la traducción entre sistemas de representación (es decir, pasar de un sistema de representación a otro) notamos que los datos (sistema de representación numérico) se pueden organizar en tablas de frecuencia o en diagrama de tallos y hojas (sistema de representación tabular). La representación tabular es utilizada para la construcción de gráficos en el plano cartesiano (representación gráfica) y en los programas de Excel y GeoGebra (sistema ejecutable). Estos datos (sistema numérico) son utilizados en las diferentes expresiones matemáticas (sistema simbólico) y permiten determinar un valor que tendrá significado a la hora de realizar su interpretación.

2.3. Fenomenología

La fenomenología nos permite identificar diferentes situaciones que se encuentran en determinados contextos y que se relacionan con la clasificación de los contextos planteados en PISA (Mi-

nisterio de educación, cultura y deporte, 2012). Los fenómenos que se relacionan con nuestra unidad didáctica se encuentran de manera ilimitada en todos los aspectos en los que se mueve el ser humano. Sin embargo, consideramos aquellas situaciones del entorno escolar que tengan sentido para los estudiantes y en las que ellos puedan obtener datos por sí mismos o por fuentes de libre circulación, como publicaciones estadísticas o páginas de internet. Es el caso de, por ejemplo, la pandemia del Covid-19, los salarios mínimos de los países (contexto social), la estatura y el peso de un grupo de estudiantes (contexto personal), los resultados de las pruebas Saber 11 de la institución educativa (contexto profesional) y la meteorología de una ciudad (contexto científico). El mapa conceptual detallado de fenomenología se encuentra en el anexo 03.

En la figura 1 presentamos el mapa conceptual de nuestro tema. En esta figura, resumimos el análisis de contenido del tema al incluir y relacionar los conceptos, las formas de representarlos y los contextos que le dan sentido al tema.

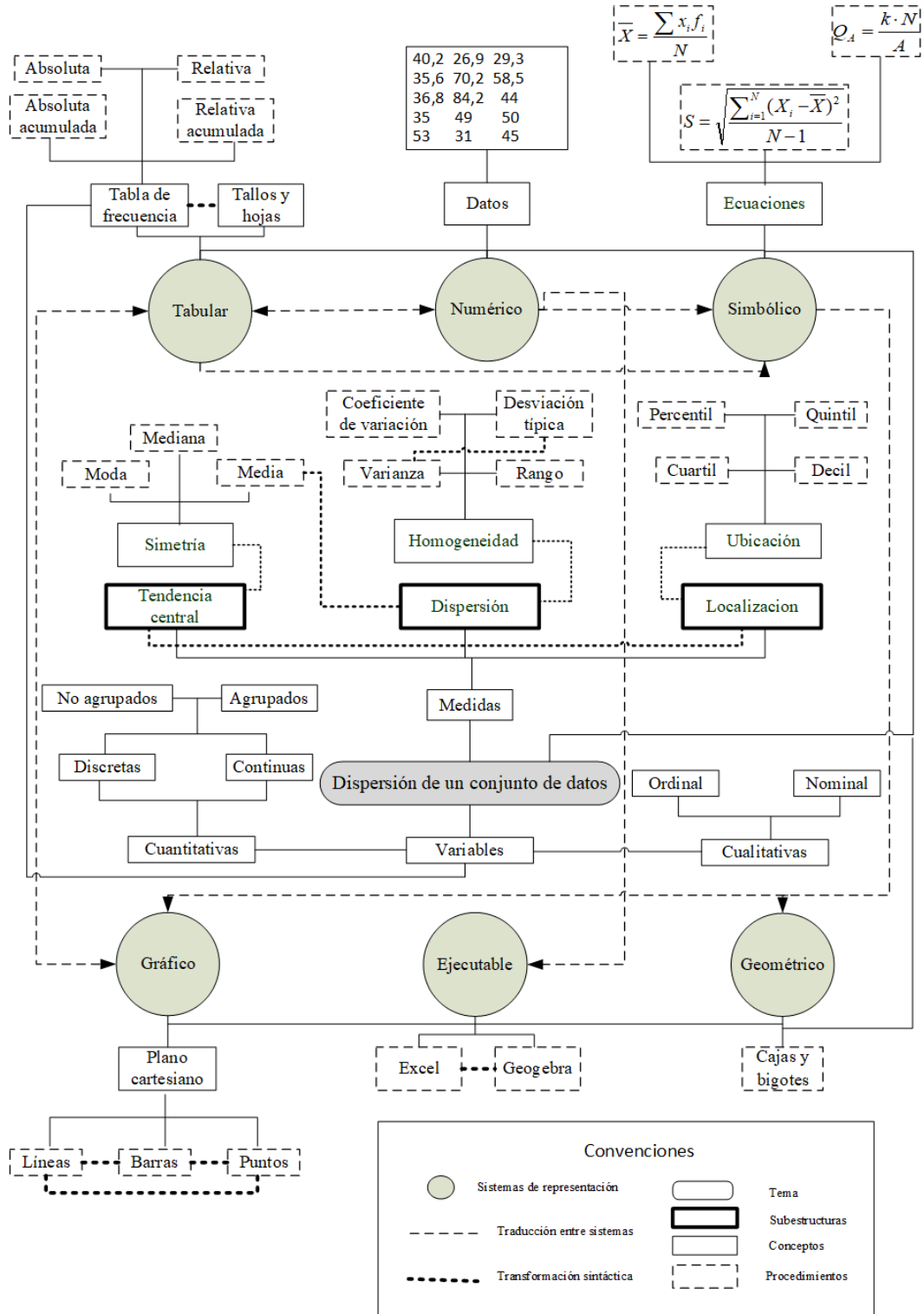


Figura 1. Mapa conceptual de la interpretación gráfica de la dispersión de un conjunto de datos

En el mapa conceptual, presentamos como tema central la dispersión de un conjunto de datos. El tema incluye las medidas estadísticas que involucran el manejo de variables cuantitativas discretas o continuas. Definimos tres subestructuras: medidas de tendencia central, medidas de dispersión y medidas de localización. Estas subestructuras están asociadas a fenómenos que le dan sentido a la dispersión de un conjunto de datos como la simetría, homogeneidad y ubicación, respectivamente. Sin embargo, el fenómeno de ubicación y la subestructura de las medidas de localización no serán desarrollados en la unidad didáctica, debido a la extensión y el tiempo que implica abordarlo. Consideramos que podemos abordar nuestro tema desde los sistemas de representación numérico, tabular, simbólico, gráfico y ejecutable.

Además, evidenciamos tres contextos fenomenológicos (simetría, homogeneidad y ubicación) que se relacionan de forma biunívoca con las subestructuras medidas de tendencia central, medidas de dispersión y medidas de localización. Como se mencionó antes, solamente trabajaremos dos contextos fenomenológicos (simetría y homogeneidad), de forma que, al encontrar la relación entre las medidas de tendencia central (media, moda y mediana), analizamos los valores. Si estos son iguales, el conjunto de datos es simétrico. De lo contrario, son asimétricos. Al determinar las medidas de dispersión (varianza, desviación estándar y el coeficiente de variación), si el coeficiente de variación está entre 0 y 0.1, los datos son homogéneos. De lo contrario, son heterogéneos.

3. ASPECTOS COGNITIVOS

Al hablar de los aspectos cognitivos, nos referimos a lo que esperamos que el estudiante aprenda sobre la interpretación gráfica de la dispersión de un conjunto de datos y el modo en que se desarrolla el aprendizaje. Esto nos lleva a formular las expectativas que definen el aprendizaje de nuestros estudiantes, sin dejar de lado, la existencia de algunas dificultades y errores. A su vez, analizamos las posibles estrategias que podrían emplear los estudiantes en su aprendizaje del tema y las dificultades que tendrían en dicho proceso.

3.1. Expectativas de aprendizaje

Las expectativas de aprendizaje se basan en los lineamientos del marco PISA 2012 (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2013) que sugieren el desarrollo de capacidades matemáticas fundamentales y de procesos matemáticos que permiten que un estudiante logre ser matemáticamente competente. Las expectativas de aprendizaje se refieren a lo que esperamos desarrollar en los estudiantes durante la enseñanza de un tema matemático.

En la unidad didáctica, podemos evidenciar la activación de los procesos matemáticos de formular, emplear e interpretar y evaluar, que se apoyan en las siete capacidades matemáticas fundamentales de la siguiente forma. La comunicación se refleja cuando los estudiantes leen e interpretan la situación problema que se presenta de manera verbal o gráfica; generan una estrategia que involucra los procedimientos matemáticos para el cálculo de las medidas de tendencia central y de dispersión; y presentan los resultados y sus argumentos a las respuestas al tener en cuenta el contexto. Encontramos la matematización cuando los estudiantes identifican las variables y plantean una hipótesis basada en el contexto que le permita obtener un resultado a partir de un modelo

matemático. La representación se presenta cuando el estudiante establece la relación entre las medidas de tendencia central con la simetría y las de medidas dispersión con la homogeneidad, además de relacionar los diferentes sistemas de representación para la situación presentada. Encontramos el razonamiento y la argumentación, cuando el estudiante valida los procedimientos y procesos realizados, además de estar acordes con lo solicitado en el problema, de forma que le permita argumentar y defender las respuestas dadas. Encontramos el diseño de estrategias para resolver problemas, cuando el estudiante puede determinar cuáles son los procesos y procedimientos que requiere para determinar tanto la simetría como la homogeneidad de los datos en la situación planteada. Los estudiantes utilizan operaciones y lenguaje simbólico, formal y técnico, cuando efectúan la transcripción entre las diferentes representaciones simbólicas, al tener en cuenta la intencionalidad y el contexto del problema. Ellos utilizan herramientas matemáticas, cuando determinan los cálculos con las expresiones matemáticas requeridas que los llevan a validar las respuestas obtenidas en la solución del problema.

Objetivos de aprendizaje

Con el fin de alcanzar las capacidades y procesos anteriormente mencionados, planteamos los siguientes objetivos de aprendizaje que enfocan los propósitos de la unidad didáctica.

1. Identificar los conceptos de simetría y homogeneidad de un conjunto de datos en una situación problema
2. Analizar la simetría y homogeneidad de un conjunto de datos, a partir de su representación gráfica, para generar inferencias de acuerdo con el contexto presentado

Conocimientos previos

Los conocimientos previos delimitan el punto de partida de lo que consideramos rutinario para los estudiantes (González y Gómez, 2018, p. 137). En la tabla 2, presentamos el listado de los conocimientos previos para nuestro tema.

Tabla 2

Listado de conocimientos previos

CP	Descripción
1	Diferencia si una variable cuantitativa es discreta o continua
2	Identifica, en los ejes coordenados, las escalas
3	Identifica las variables, en los ejes del plano cartesiano
4	Identifica qué datos se enuncian en el encabezado y ejes de la gráfica
5	Interpreta las coordenadas ubicadas en el plano cartesiano, de acuerdo con el contexto
6	Identifica la frecuencia absoluta en una tabla de frecuencias
7	Construye una tabla de frecuencias
8	Reconoce los elementos de un diagrama de barras

Tabla 2
Listado de conocimientos previos

CP	Descripción
9	Sustituye valores en una expresión matemática
10	Despeja una variable de una ecuación
11	Interpreta información en el sistema tabular y lo transforma al sistema gráfico

Nota. CP: Conocimientos previos

Con el listado de la tabla 2, precisamos los conocimientos esenciales que el estudiante requiere para iniciar el trabajo con los objetivos mencionados anteriormente. A su vez, queremos establecer un plan de acción para superar las debilidades, que puedan afectar el desempeño de los estudiantes, al desarrollar las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica.

3.2. Limitaciones de aprendizaje

Las limitaciones de aprendizaje se manifiestan en dificultades y errores. Las dificultades hacen referencia a un obstáculo presentado por los estudiantes en su aprendizaje, que se evidencia por medio de un conjunto de errores relacionados con un concepto, procedimiento, interpretación o por mala aplicación de las propiedades aritméticas. Para realizar esta clasificación, nos basamos en algunas dificultades y errores que identificamos en la literatura respecto del origen de los gráficos estadísticos, Batanero y Godino (1994).

Para la lectura del enunciado, Koechiln y Zwann (2006) plantean lo importante que es realizar las traducciones de las situaciones problema, debido a que en ellos podemos encontrar información explícita en el texto, encontrar información escondida tras el texto, para lo que el lector necesita hacer algunas inferencias basadas en la información dada. De igual manera, respecto de los gráficos estadísticos, Friel, Curcio y Bright (2001) afirman que se deben identificar los siguientes elementos estructurales de un gráfico estadístico.

- ◆ El título y las etiquetas indican el contenido contextual del gráfico y cuáles son las variables en él representadas.
- ◆ El marco del gráfico incluye los ejes, escalas y marcas de referencia en cada eje.
- ◆ Los especificadores del gráfico son los elementos usados para representar los datos, como los rectángulos (en el histograma) o los puntos (en el diagrama de puntos).

En referencia en el contenido matemático Hegarty y Col (1995) plantean que, en el proceso de resolución de una situación problema con un gráfico, existen al menos 3 niveles que pueden presentar obstáculos para los estudiantes: (a) la comprensión de la situación descrita en el gráfico con sus entidades, sus relaciones y sus atributos a un nivel concreto, no abstracto; (b) la traducción de la situación del lenguaje natural al matemático y viceversa; y (c) el manejo de las herramientas matemáticas necesarias para llegar al resultado, asociado con un conocimiento procedimental de los esquemas aritméticos, algebraicos y ecuaciones matemáticas.

Para el uso de ecuaciones matemáticas, Socas et al. (1998) plantean tres etapas en la interpretación de los errores relacionados con el pensamiento variacional. En primer lugar, se encuentran

los errores que tienen su origen en la aritmética, en los que los estudiantes, no solo incurren en errores netamente de álgebra, sino también en errores en aritmética que no fueron corregidos previamente. En segundo lugar, se encuentran los errores de procedimiento, que se dan por el uso inadecuado de fórmulas o reglas de procedimiento. De estos, se derivan los errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, errores relativos al mal uso de recíproco y errores de cancelación. En tercer lugar, se producen errores con motivo de la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes que se dan en el desarrollo de algoritmos incorrectos y estrategias inadecuadas para la solución de problemas matemáticos.

Al considerar la interpretación de resultados y gráficos, Pfannkuch y Wild (2000) plantean la existencia de cuatro elementos para el razonamiento estadístico. El primer elemento es la toma en consideración de la variación. El segundo consiste en transformar la información al usar conocimientos básicos de aritmética para facilitar la comprensión. El tercero es la construcción y el razonamiento a partir de modelos. Y el cuarto es la integración o síntesis del problema en contextos particulares y la comprensión estadística.

Basados en el análisis anterior, consideramos el listado de dificultades y errores en que los estudiantes pueden incurrir en el desarrollo de la unidad didáctica. Este listado se organiza en cinco dificultades con sus respectivos errores. En la tabla 3, presentamos como ejemplo, algunos errores asociados con la dificultad 5. El listado de dificultades y errores se encuentra en el anexo 04.

Tabla 3

Listado de dificultades y errores

E	Descripción
	D5. Dificultad para la interpretación de resultados y gráficos que implican considerar el contexto
39	Presenta un resultado alejado de los datos del problema
40	Considera que una conclusión es válida para diferentes situaciones
41	Concluye cuando las medidas de tendencia central son iguales, que los datos son asimétricos
42	Interpreta cuando el valor del coeficiente de variación es menor a 0.1, los datos son heterogéneos
43	Interpreta cuando el valor del coeficiente de variación es mayor a 0.1, los datos son homogéneos

Nota: D: Dificultad, E: error

En la tabla 3, mostramos algunos errores asociados a la dificultad de la interpretación de los resultados que implican considerar el contexto. El estudiante puede incurrir en alguno de ellos como, por ejemplo, presentar un resultado alejado de los datos del problema o llegar a concluir que el conjunto de datos es asimétrico cuando las medidas de tendencia central son iguales. Para cada

error previsto, hemos diseñado una ayuda que contribuye a que los estudiantes superen sus dificultades como se puede consultar en los anexos correspondientes a las fichas de las tareas.

3.3. Caracterización de los objetivos

En este apartado, describimos y caracterizamos nuestros objetivos en términos de las estrategias y procedimientos que los estudiantes emplean para resolver una tarea. Denominamos las estrategias, caminos de aprendizaje y los procedimientos, criterios de logro. Las estrategias están conformadas por procedimientos que dan cuenta de las actuaciones de los estudiantes. Para caracterizar los objetivos de aprendizaje, los procedimientos fueron agrupados en procesos y operaciones denominados capacidades. El lector puede consultar el listado de capacidades en el anexo 05 y el listado de criterios de logro en el anexo 06.

Los siguientes, son algunos ejemplos de procedimientos para el primer objetivo. En la codificación, el primer número indica el objetivo y el segundo el orden del procedimiento, que llamamos criterio de logro.

- ◆ CdL1.1 Reconozco la información la información presentada en el enunciado del problema.
- ◆ CdL1.6 Determino los valores de las medidas de tendencia central.
- ◆ CdL1.7 Determino la simetría o asimetría de los datos al comparar los resultados.
- ◆ CdL1.14 Valido el resultado obtenido.

En la figura 2, presentamos esquemáticamente las posibles estrategias de solución de las tareas propuestas para el primero objetivo, compuestas por los procedimientos necesarios su logro.

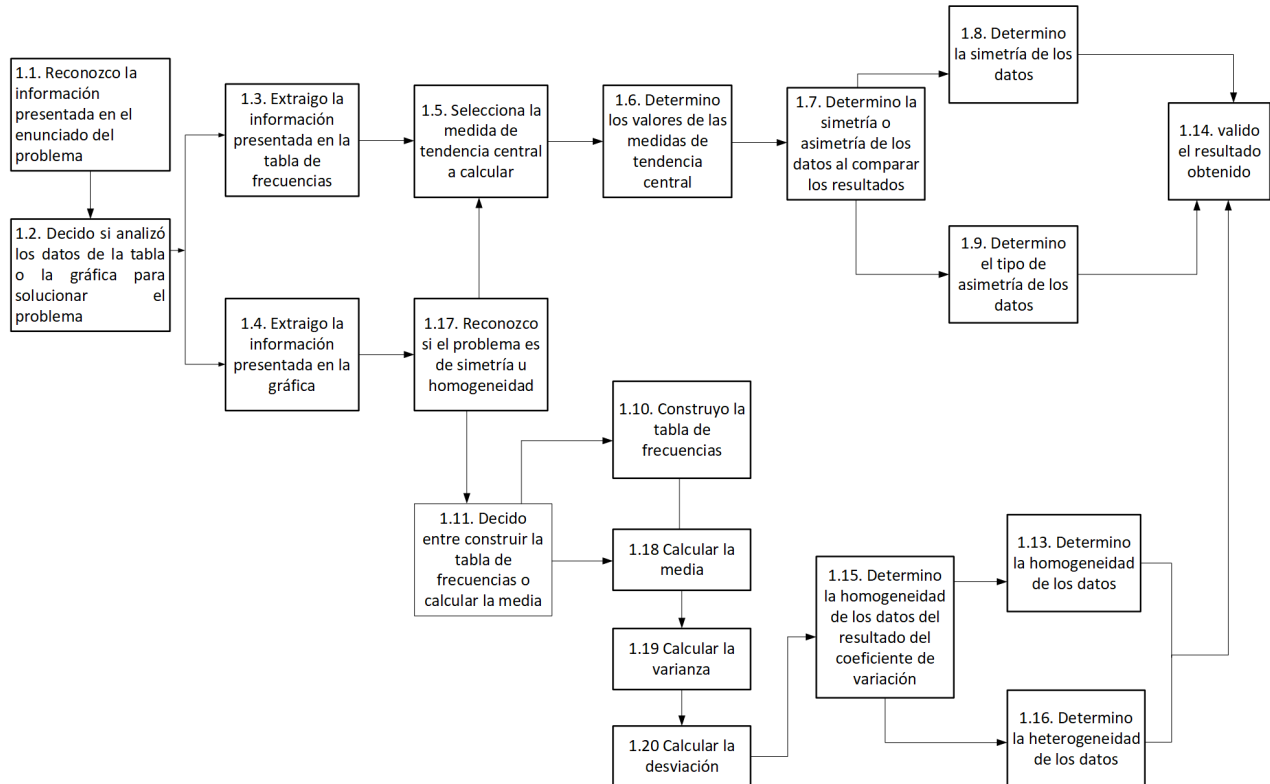


Figura 2. Caracterización del primer objetivo

En el esquema de la figura 2, las estrategias están compuestas por 19 criterios de logro y dos bifurcaciones. En general, los procedimientos que el estudiante debe realizar para lograr el primer objetivo, son los siguientes. Inicialmente, el estudiante debe leer el enunciado de la situación problema y decidir entre el sistema de representación gráfico o tabular para dar solución al problema. Al considerar la parte superior, el estudiante puede optar por un sistema de representación para extraer los datos, para dar paso a calcular las medidas de tendencia central. Los resultados de las medidas de tendencia central se comparan entre sí. Con la comparación de los resultados, el estudiante tiene dos posibilidades. Si los resultados son iguales, entonces los datos son simétricos. Si los resultados son diferentes, entonces los datos son asimétricos. Por otro lado, al comparar los resultados de la media y la mediana, el estudiante determina el tipo de asimetría. Por último, el estudiante está en la capacidad de validar los resultados obtenidos.

Al optar por la parte inferior del esquema, el estudiante inicia con la lectura del enunciado de la situación problema. Esta lectura implica que el estudiante reconozca el conjunto de datos con el que trabaja. Luego, hará la lectura y extracción de los datos del gráfico. Él decide si realiza los cálculos o analiza directamente la gráfica. Si decide realizar los cálculos, puede construir la tabla de datos o calcular la media directamente. Después, el estudiante calcula las medidas de dispersión para llegar al cálculo del coeficiente de variación. Luego de realizar los cálculos, el estudiante analiza el resultado del coeficiente de variación para determinar la homogeneidad del conjunto de datos. Finalmente, él valida los resultados de los datos obtenidos.

Para el segundo objetivo, mostramos las estrategias de solución de las tareas, en el esquema de la figura 3.

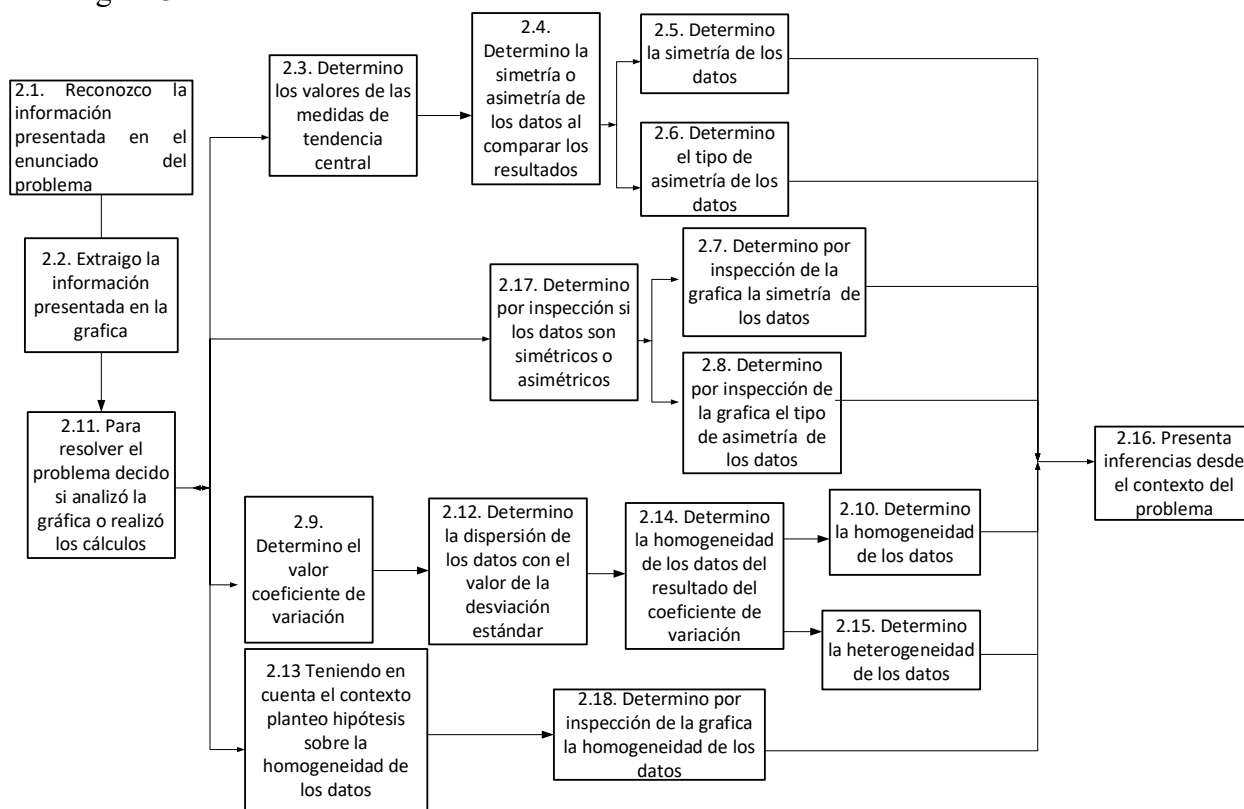


Figura 3. Caracterización del segundo objetivo

Para los procedimientos del segundo objetivo, las estrategias de la parte superior del esquema, permiten determinar la simetría y, las de la parte inferior, determinar la homogeneidad de un conjunto de datos, de manera que los estudiantes puedan generar inferencias desde la representación gráfica en el contexto planteado. En este esquema, encontramos 18 criterios de logro y cuatro bifurcaciones. Una característica esencial es que los dos objetivos son complementarios. Por consiguiente, los estudiantes, al abordar las tareas, pueden optar por efectuar las acciones descritas para el primer objetivo o pueden optar por las otras dos bifurcaciones. Para el caso de la simetría, ellos pueden analizar directamente la gráfica y determinar el comportamiento del conjunto de datos. Al establecer que los datos, con respecto al centro, tienen una dispersión equitativa a ambos lados de este, pueden decidir que la distribución es simétrica. Si la dispersión es diferente a ambos lados, la distribución es asimétrica. De forma similar, al contemplar la homogeneidad, el estudiante puede analizar directamente la gráfica. Al observar la altura de las barras, puede determinar si son equivalentes o muy similares entre sí. Si ese es el caso, entonces es homogénea. En caso contrario, es heterogénea. Por último, independientemente de la estrategia que el estudiante siga para la solución de la tarea, él debe realizar inferencias basadas en la gráfica y el contexto presentado.

3.4. Expectativas afectivas

En la unidad didáctica, consideramos a los estudiantes de manera integral. Esto requiere considerar aspectos afectivos como la motivación, la confianza, la perseverancia, el interés, la disposición, la curiosidad y el respeto. Buscamos que el estudiante se sienta en óptimas condiciones emocionales que lo lleven a desarrollar las actividades propuestas con mayor destreza y disposición. En la tabla 4, concretamos las cuatro expectativas de tipo afectivo, que forman parte del desarrollo de cada una de las actividades propuestas.

Tabla 4

Expectativas afectivas de la interpretación gráfica de la dispersión de un conjunto de datos

EA	Descripción
1	Respeto las opiniones de los demás y argumenta con criterios matemáticos válidos, los resultados obtenidos.
2	Es perseverante en la solución de situaciones relacionadas con los gráficos estadísticos.
3	Desarrolla el gusto por el orden y la claridad en el tratamiento y representación de datos relativos a un estudio estadístico.
4	Demuestra interés en interpretar las representaciones estadísticas, en la solución de las tareas propuestas.

Nota. EA: expectativa afectiva.

Con las expectativas de tipo afectivo, pretendemos favorecer en los estudiantes la interacción y la comunicación al referirse a las estrategias aplicadas para solucionar las tareas propuestas, tanto en su descripción como en las de sus compañeros. De igual manera, buscamos promover el desarrollo matemático y la interpretación de los gráficos estadísticos que le permitan efectuar inferencias con los valores obtenidos y el contexto presentado; promover el orden en el manejo de los datos que le brinden claridad al desarrollar los cálculos que requieren las diferentes tareas presentadas; y estimular el interés por efectuar interpretaciones asociadas al contexto de cada situación.

3.5. Estructura general de la unidad didáctica

La unidad didáctica está diseñada para ser implementada en siete sesiones, de 100 minutos cada una. En la tabla 5, presentamos el desarrollo de cada sesión.

Tabla 5

Elementos y tiempos de aplicación de la unidad didáctica

Sesión	Actividad	Intencionalidad	Duración (min)
1	Presentación de la unidad didáctica	Conocer la estructura general de la unidad didáctica a los estudiantes, los objetivos y los tiempos de cada una de las sesiones	40

Tabla 5
Elementos y tiempos de aplicación de la unidad didáctica

Sesión	Actividad	Intencionalidad	Duración (min)
1	Prueba diagnóstica	Verificar si los estudiantes tienen apropiados los conocimientos previos, que les permitan dar solución a las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica	60
2	Retroalimentación	Esclarecer los errores en que incurrieron los estudiantes, evidenciados al revisar la solución de la tarea diagnóstica	15
2	Presentación de la Tarea 1.1	Conocer la meta de la tarea, la intencionalidad de la misma, los recursos y la temporalidad para su desarrollo	10
2	Tarea 1.1 Sueldo de las compañías	Acercar a los estudiantes al concepto de simetría, al aplicar los algoritmos relacionados con las medidas de tendencia central y la interpretación de los resultados obtenidos en ellas	60
2	Socialización	Generar entre los estudiantes un debate, que permita unificar criterios sobre las respuestas obtenidas y consolidar los conceptos asociados a la simetría.	15
3	Retroalimentación	Resolver las dudas que presentaron los estudiantes en la tarea 1.1, para subsanar y clarificar lo relacionado con el concepto de simetría	15
3	Presentación de la Tarea 1.2	Conocer de qué trata la tarea, que aporta al logro del primer objetivo, la forma de trabajo y el tiempo que tienen para su desarrollo.	10
3	Tarea 1.2 Número de hijos	Aplicar los algoritmos relacionados con las medidas de dispersión y su correspondiente interpretación para abordar el concepto de homogeneidad	60
3	Socialización	Presentar las estrategias y soluciones de la tarea, para unificar criterios y definir los conceptos asociados a la homogeneidad.	15

Tabla 5
Elementos y tiempos de aplicación de la unidad didáctica

Sesión	Actividad	Intencionalidad	Duración (min)
4	Retroalimentación	Indicar a los estudiantes las dificultades presentadas en la tarea 1.2, para subsanar y clarificar lo relacionado con el concepto de homogeneidad	15
4	Presentación de la Tarea 2.1	Presentar a los estudiantes lo que se pretende abordar en el desarrollo la tarea, con la finalidad de que los estudiantes conozcan la meta de la tarea y su aporte a la consecución del segundo objetivo	10
4	Tarea 2.1 Seguimiento covid-19	Analizar la representación gráfica de algunos datos públicos referentes al SARS-CoV-2 que les permita determinar la simetría y hacer inferencias a partir de ellas	60
4	Socialización	Generar una discusión entre los estudiantes al presentar las estrategias, los resultados y las conclusiones de la solución de la tarea	15
5	Retroalimentación	Aclarar las dudas presentadas en la tarea 2.1, respecto de la simetría de los datos, y asociar las posibles interpretaciones que surgen de la representación gráfica	15
5	Presentación de la Tarea 2.2	Presentar la tarea a los estudiantes y lo que se pretende abordar en el desarrollo de ella. Conocer la meta de la tarea y su aporte a la consecución del segundo objetivo.	10
5	Tarea 2.2 Calificaciones de un examen	Analizar la representación gráfica para determinar la homogeneidad de los datos y con ella presentar las interpretaciones e inferencias acerca del contexto	60
5	Socialización	Generar una discusión con la mediación del profesor, cuando los grupos presentan a sus compañeros la solución de la tarea. Lo anterior permitirá construir la definición de conceptos de la homogeneidad por inspección de la gráfica.	15

Tabla 5
Elementos y tiempos de aplicación de la unidad didáctica

Sesión	Actividad	Intencionalidad	Duración (min)
6	Retroalimentación	Aclarar las dudas presentadas en la tarea 2.2, respecto de la homogeneidad de los datos, asociar las posibles interpretaciones que surgen de la representación gráfica y un resumen de lo trabajado en las tareas de la unidad didáctica como preparación para el examen final	40
6	Examen final	Determinar en qué medida se lograron los objetivos propuestos en la unidad didáctica	60
7	Sesión final	Compartir los resultados del examen final	25
7	Sesión final	Al compartir el resultado de la unidad didáctica, evidenciamos en qué medida se lograron los objetivos propuestos	40
7	Sesión final	Reconocer las fortalezas y debilidades. Además, se proponen las actividades de refuerzo para los estudiantes que tuvieron desempeño bajo.	35

La tabla 5 muestra la propuesta de implementación de las siete sesiones. La primera sesión corresponde a la aplicación de la prueba diagnóstica y la presentación de la unidad didáctica (sus propósitos, el diligenciamiento de los formatos y la dinámica que se llevará a cabo, entre otros). En las siguientes cuatro sesiones, se implementan las tareas de aprendizaje. Al inicio de cada sesión, se realiza la retroalimentación, como preparación para la siguiente tarea de aprendizaje. Luego, en la siguiente sesión, se realiza el examen final. En la última sesión, se realiza la retroalimentación del examen final y se sacan conclusiones del proceso llevado a cabo, para determinar el cierre de la unidad didáctica. Se explican los planes de mejoramiento para los estudiantes que no alcanzaron el desempeño básico.

4. TAREA DIAGNÓSTICA

Con la tarea diagnóstica, el profesor indaga sobre los conocimientos previos de los estudiantes antes de aplicar la unidad didáctica. Con ella, recopilamos información acerca de las habilidades y acciones que presentan los estudiantes, de manera que podamos efectuar adaptaciones a la enseñanza (Romero y Gómez, 2018, p. 286). Entre los conocimientos previos que requiere la interpretación gráfica de la dispersión de un conjunto de datos, encontramos la clasificación de variables en continuas o discretas, la elaboración de tablas de frecuencia, el cambio de información al pasar

de un gráfico a una tabla o viceversa, la lectura de números en la calculadora al diferenciar entre el separador de miles y el decimal, la sustitución de valores en una fórmula y la extracción de información en una situación problema.

Otra de las intenciones de la tarea diagnóstica es identificar las posibles dificultades y errores en los que incurren los estudiantes y el diseño de ayudas para que ellos logren superarlas. Por ejemplo, omitir datos al construir una tabla de frecuencias, totalizar erróneamente la frecuencia absoluta, confundir las variables de los ejes u omitir la jerarquía de las operaciones. El listado de dificultades y errores asociados a los conocimientos previos se encuentra en el anexo 07. Los conocimientos previos son el punto de partida para la solución de las tareas de aprendizaje. Por ello, los estudiantes desarrollan la tarea diagnóstica de forma individual y durante su desarrollo no hay interacción entre el profesor y el estudiante.

La tarea diagnóstica de nuestra unidad didáctica consta de 10 preguntas. Las preguntas 1 y 2 nos permiten identificar la clasificación de las variables en continuas o discretas. Las preguntas 3, 4, 5 y 6 nos permiten evidenciar si sustituyen los valores en una fórmula matemática. La pregunta 7 nos permite observar si extraen la información de una situación problema y hacen uso de ella para sustituirla en una expresión matemática. Con la pregunta 8, verificamos la elaboración de las tablas de valores. Con la pregunta 9, indagamos sobre la transformación del sistema de representación gráfico al tabular. Por último, la pregunta 10 nos permite verificar el uso de la calculadora y la lectura de números, además de distinguir entre separador de miles y el decimal. A continuación, presentamos la tarea diagnóstica.

Clasifica las siguientes preguntas, según el carácter de la variable asociada: cualitativa o cuantitativa.

Si es cuantitativa, determina si es discreta o continua.

Pregunta	Cualitativa o cuantitativa	Discreta o continua
¿Usted fuma?		
¿Cuál es su fuente principal de noticias?		
¿Cuál es su estatura en metros?		
¿Cuál es su estado civil?		
¿Está usted satisfecho de su rendimiento académico?		
¿Cuál fue el valor del recibo del agua del mes pasado?		
¿Cuántos años cumple en el 2021?		

Indica si la variable cuantitativa es discreta o continua:

Longitud de 150 tornillos producidos en una fábrica. _____

Número de pétalos que tiene una flor. _____

Tiempo requerido para responder las llamadas en un centro de atención telefónica.

Número de páginas de una serie de libros de estadística. _____

Lugar que ocupa un nadador en una competencia. _____

Si $A = 3$, $B = 8$ y $C = 5$, ¿cuál es el valor de $C[(A \times B) + (-C)]$?

Dada la expresión $2a^2b^3c - 7a$, calcula su valor numérico si $a=2$, $b=3$ y $c=5$.

Si $-5g + (-15) = 55$, ¿cuál debe ser el valor de g para que se cumpla la anterior igualdad?

Halla el valor la variable m de la siguiente formula: $m = \frac{a-g}{p}$, con $a=5,3$ $g=2.34$ y $p=1.15$.

A partir de los estudios de la caída de los cuerpos, la física establece que es posible calcular la altura desde donde se deja caer un cuerpo, con la expresión $y = 5t^2$. Si Orlando Duque tarda en uno de sus clavados 2,23s, ¿a qué altura se encontraba al momento de realizar el clavado?

Se preguntó a 100 trabajadores sobre el sindicato al que pertenecen. Los resultados fueron los siguientes:

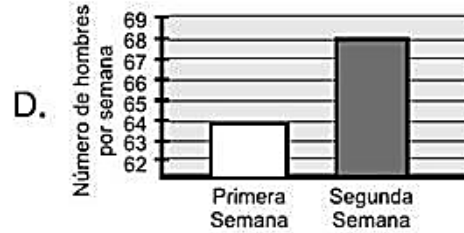
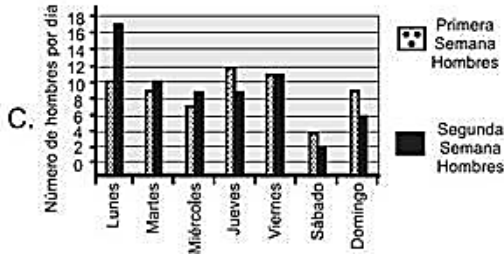
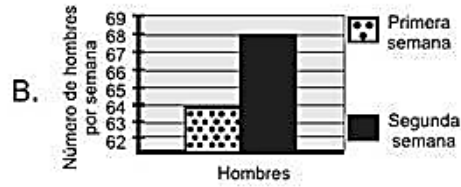
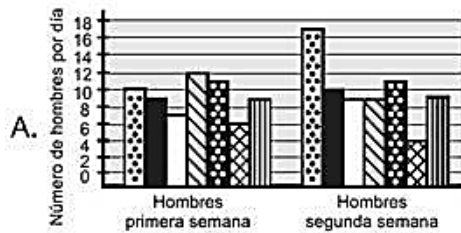
CUT	FECODE	Otro	ADE	CUT	FECODE	Ninguno	ADE	CUT	Ninguno
FECODE	FECODE	Otro	ADE	FECODE	ADE	ADE	Otro	Otro	ADE
Ninguno	Otro	Ninguno	Ninguno	ADE	Otro	Ninguno	Ninguno	Otro	FECODE
CUT	Ninguno	Ninguno	FECODE	Otro	Ninguno	FECODE	FECODE	Ninguno	ADE
CUT	Ninguno	Ninguno	CUT	CUT	Ninguno	Otro	Otro	ADE	Otro
ADE	ADE	FECODE	CUT	ADE	Ninguno	CUT	CUT	Ninguno	CUT
Otro	ADE	FECODE	CUT	Otro	ADE	Ninguno	CUT	ADE	Otro
Otro	Ninguno	CUT	Ninguno	Ninguno	Ninguno	Ninguno	Ninguno	Ninguno	Ninguno
Ninguno	FECODE	CUT	ADE	Ninguno	Otro	ADE	Ninguno	FECODE	CUT
FECODE	CUT	Ninguno	FECODE	CUT	ADE	CUT	FECODE	ADE	CUT

Elabora la tabla de frecuencias con la información suministrada.

Algunos estudiantes de una universidad recogieron información acerca del número de hombres y mujeres que nacieron en un hospital durante 2 semanas. Registraron la información en las siguientes tablas:

Nacimientos en la primera semana			Nacimientos en la segunda semana		
DÍA	HOMBRES	MUJERES	DÍA	#TOTAL DE NACIMIENTOS	HOMBRES
Lunes	10	8	Lunes	20	17
Martes	9	13	Martes	22	10
Miércoles	7	9	Miércoles	20	9
Jueves	12	11	Jueves	18	9
Viernes	11	8	Viernes	22	11
Sábado	6	8	Sábado	16	4
Domingo	9	8	Domingo	17	8

Con los datos que registraron, los estudiantes desean hacer una comparación entre la cantidad de hombres nacidos durante las 2 semanas. Señala con una X las gráficas que representan mejor esta comparación.



En la siguiente tabla, realiza las operaciones con la calculadora y escribe el resultado de forma numérica y de forma verbal.

OPERACIÓN	NUMÉRICA	VERBAL
$3,63 + 2.304 - 605$		
542		
3.540×2.583		
$24,56 \times 46$		

5. TAREAS DE APRENDIZAJE

Una tarea de aprendizaje es “una demanda estructurada de actuación, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje, que el profesor propone a los estudiantes con carácter intencional” (Gómez, Mora y Velasco 2018, p. 203). Diseñamos dos tareas de aprendizaje para cada uno de los objetivos propuestos para la unidad didáctica: para el primer objetivo, la tarea 1.1 (Sueldo de las compañías) y la tarea 1.2 (Número de hijos); y, para el segundo objetivo, la tarea 2.1 (Seguimiento Covid-19) y la tarea 2.2 (Calificaciones de un examen).

5.1. Tarea 1.1. Sueldo de las compañías

En la tarea 1.1 “Sueldo de las compañías”, presentamos las tablas y gráficos con los sueldos que ganan los empleados de dos compañías. Indicamos la cantidad de trabajadores que ganan cada uno de los sueldos. La tarea es importante, en la unidad didáctica, porque ayuda a superar la dificultad que presentan algunos estudiantes al momento de interpretar, matematizar y argumentar la simetría de un conjunto de datos.

La tarea contribuye al logro del primer objetivo, al brindar a los estudiantes la oportunidad de analizar las medidas de tendencia central, relacionar sus resultados con el concepto de simetría y

traducir entre sistemas de representación. En el anexo 08 se encuentra la ficha de la tarea con todos sus elementos.

Requisitos de la tarea

Para abordar la tarea, el estudiante debe identificar el tipo de variable, los elementos de un diagrama de barras, el significado de la frecuencia absoluta, las relaciones de orden de los números y sustituir valores en una expresión matemática.

Formulación de la tarea

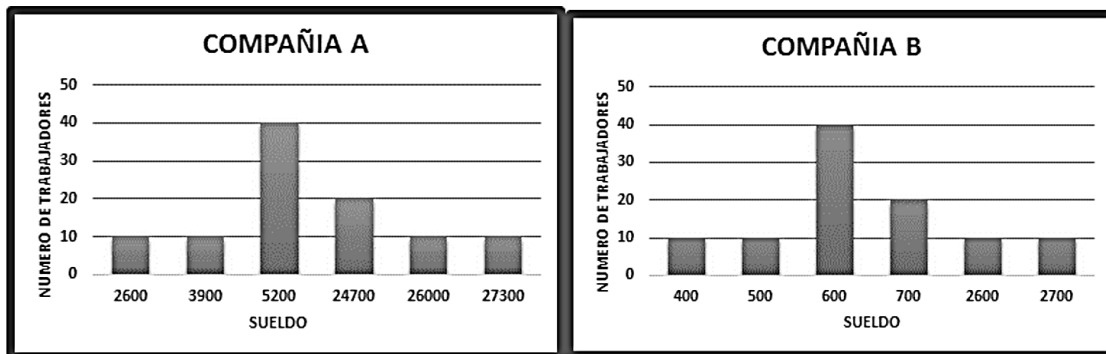
Para solucionar la tarea, los estudiantes observan dos videos. El primero, se refiere al cálculo de las medidas de tendencia central y el segundo presenta las características para determinar la simetría o asimetría de los datos a partir del gráfico de barras. Los estudiantes tendrán a su disposición una diapositiva con las fórmulas de las medidas de tendencia central y unos gráficos relacionados con la simetría y asimetría de los datos. Después de observar los videos, ellos trabajarán en el diseño de las estrategias, que les permitirá dar solución a la tarea. A continuación, presentamos la formulación de la tarea.

Dos compañías de venta de autos tienen maneras diferentes de pagar a sus trabajadores. La compañía A lo hace mediante un sueldo fijo mensual y la compañía B mediante un porcentaje sobre las ventas efectuadas. La distribución de los sueldos por categoría es la siguiente:

COMPAÑÍA A	
Sueldo (miles de pesos)	Número de trabajadores
2600	10
3900	10
5200	40
24700	20
26000	10
27300	10

COMPAÑÍA B	
Sueldo (miles de pesos)	Número de trabajadores
400	10
500	10
600	40
700	20
2600	10
2700	10

Tablas de sueldos vs número de trabajadores



Gráficas de sueldos vs trabajadores

Basados en las tablas y gráficas de la distribución de los sueldos en las dos compañías, ¿es posible afirmar que los sueldos de las compañías se distribuyen de la misma forma independientemente de cómo se hacen los pagos? Justifica tu respuesta.

Conceptos y procedimientos

Al abordar esta tarea, consideramos que el estudiante emplea conceptos relacionados con las medidas de tendencia central: moda, mediana y media. También, emplea el concepto de simetría de un conjunto de datos. En relación con los procedimientos, usa fórmulas para calcular la media y la mediana. Otro procedimiento que aplica es la comparación de los resultados de las medidas de tendencia central encontradas.

Sistemas de representación

El desarrollo de esta tarea implica que los estudiantes usen cuatro sistemas de representación. Los sistemas de representación tabular y gráfico, para mostrar los datos del problema. El sistema de representación simbólico, al reemplazar en las fórmulas de la mediana y la media. Y el sistema de representación numérico, al calcular las medidas de tendencia central.

Contexto PISA

La situación presentada en la tarea, según los contextos de PISA, se ubica en el contexto profesional, al pertenecer al ámbito laboral, porque se habla de los sueldos de los empleados de dos compañías.

Materiales y recursos

Para la implementación de la tarea, se requiere de un televisor, un video beam, celulares o tabletas que permitan visualizar los videos, las diapositivas con los gráficos de datos simétricos y asimétricos, el mapa conceptual con las fórmulas de las medidas de tendencia central, la calculadora científica y la tarea impresa.

Agrupamiento

Inicialmente los estudiantes estarán reunidos en el gran grupo para observar los videos y escuchar las instrucciones del profesor. Luego, se organizan en cuartetos. En los cuartetos, el profesor aclara que es un trabajo colaborativo y se asignan roles a cada integrante (moderador, relator, utilero y consultor) para desarrollar la tarea. Una vez realizada la tarea, se da paso a la compartir el trabajo ante el gran grupo. El profesor dará la palabra al relator de algunos cuartetos, quien expondrá la estrategia utilizada por el grupo, y presentará los resultados y las conclusiones que obtuvieron.

Comunicación e interacción de clase

Dividimos la sesión de clase para el desarrollo de la tarea en cuatro momentos. En el primer momento, la interacción es entre el profesor y el gran grupo, al retroalimentar los resultados de la tarea diagnóstica y mencionar los errores en que incurrieron los estudiantes con las aclaraciones pertinentes. En el segundo momento, la interacción se da entre el profesor y el gran grupo, al presentar los videos, el mapa conceptual relativo a la simetría, la presentación de la tarea, la instrucción de la forma como se abordará el trabajo y la meta de la tarea. En el tercer momento, la interacción se da entre estudiantes, organizados en cuartetos, para la solución de la tarea. En este

momento, el profesor estará dispuesto a colaborar en la solución de las dudas que surjan al realizar la tarea y brindar las ayudas previamente diseñadas. El profesor generará preguntas relacionadas con las estrategias utilizadas, los resultados obtenidos, las dificultades encontradas y la forma como llegan a los acuerdos. En el cuarto momento, la interacción es entre el profesor y el gran grupo, con la participación de los diferentes cuartetos, al presentar los resultados, de tal forma que, a partir de la discusión, se obtienen conclusiones relacionadas con el tema trabajado.

Temporalidad

Sugerimos que la tarea se desarrolle en 100 minutos. El tiempo se distribuye en cuatro momentos de la siguiente forma: 15 minutos para el primer momento, 15 minutos para el segundo momento, 50 minutos para el tercer momento y 20 minutos para el cuarto momento. La distribución de los tiempos se puede observar en detalle en el anexo 08.

Errores y ayudas

Cuando los estudiantes se dispongan a diseñar la estrategia de solución de la tarea, el profesor estará pendiente y presto para activar las ayudas que se requieran para que superen los errores en los que pueden incurrir. Por ejemplo, los estudiantes pueden omitir la organización de los datos para calcular la mediana (E22). En este caso, el profesor puede preguntar: ¿cuál es el primer procedimiento por realizar, cuando se calcula la mediana? (A16). Los estudiantes pueden calcular la mediana sin considerar si la muestra es par o impar (E24). Para este error, el profesor puede preguntar: ¿qué cantidad de datos tiene el problema? (A18). El listado de errores y ayudas para la tarea 1.1 se encuentra en el anexo 08 de la ficha de la tarea.

Grafo de criterios de logro

En la figura 4, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea. La parte resaltada, corresponde a las posibles estrategias que los estudiantes pueden usar para la solución de la tarea.

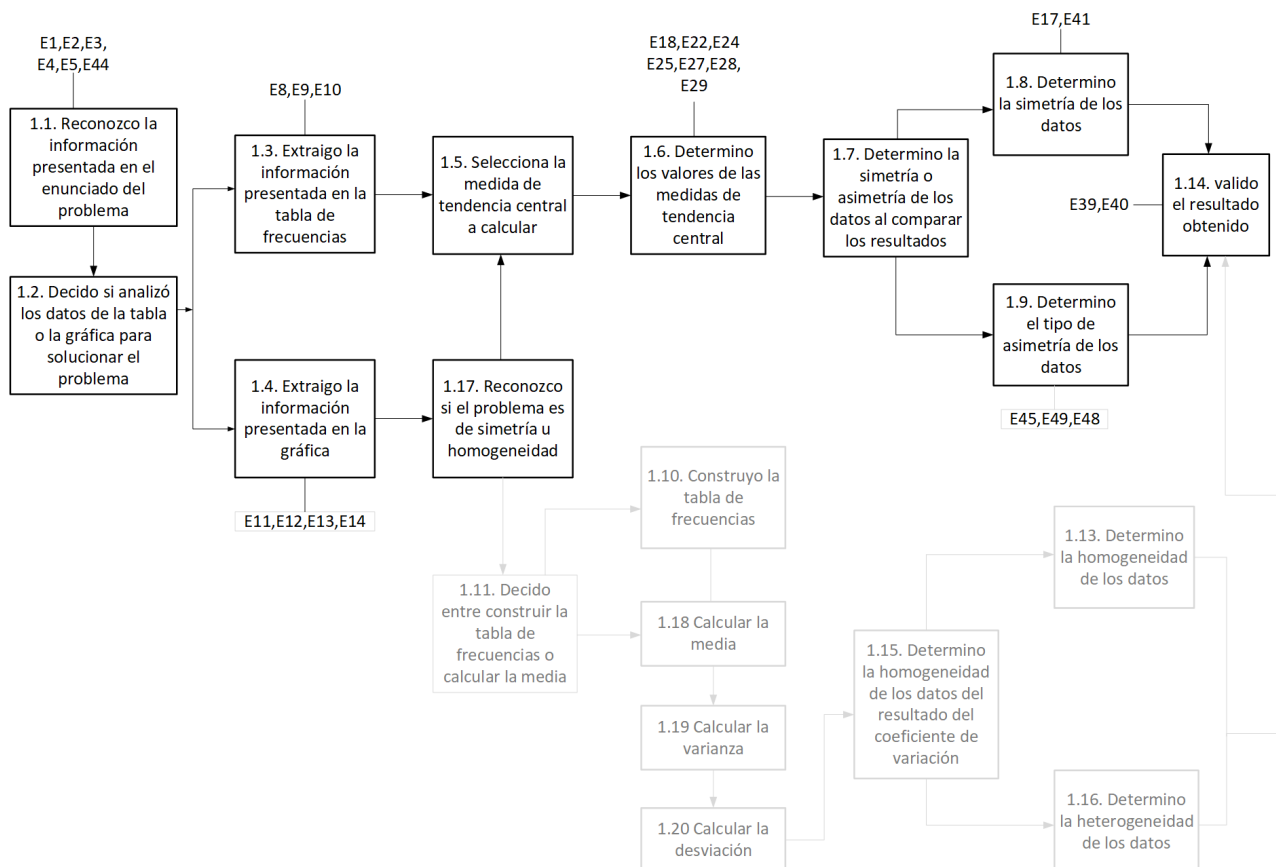


Figura 4. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.1

Al iniciar la tarea, el estudiante efectúa la lectura del enunciado de la situación problema. Puede incurrir en los errores E1, E2, E3, E4 y E44, relacionados con la lectura y la extracción de datos del enunciado. Decide entre el sistema de representación gráfico o tabular para dar solución a la tarea. Al seleccionar el sistema tabular, extrae los datos de la tabla de frecuencias. Al elegir el sistema gráfico extrae los datos que el sistema tiene. Puede incurrir en el error E13, que se relaciona con la altura del rectángulo en el gráfico de barras. Con la información obtenida, en cualquiera de los dos sistemas de representación, el estudiante decide qué medida de tendencia central calcular. Al tener los resultados de las medidas de tendencia central, los compara entre sí. El estudiante tiene dos posibilidades: primero, si los resultados son iguales, entonces los datos son simétricos y puede incurrir en el error de concluir que no son simétricos (E41); y segundo, si los resultados son diferentes, entonces los datos son asimétricos y puede incurrir en el error de indicar que los datos son simétricos (E45). Por último, el estudiante valida los argumentos de acuerdo con el análisis de los datos. El listado de errores se encuentra en el anexo 04.

Actuación del profesor

El profesor debe ser el guía del proceso de aprendizaje de los estudiantes en el desarrollo de la tarea. Para ello, siempre está presto a activar la ayuda que se requiera. El profesor debe ser el

mediador en el debate, para la construcción colectiva de los conceptos. El profesor realiza la retroalimentación y la evaluación de la tarea.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

El profesor solicita a los estudiantes leer la tarea de forma individual. Luego, un estudiante lee en voz alta al grupo de clase y se pide a algunos estudiantes que expongan lo que entendieron, a fin de asegurarse de que han comprendido las instrucciones. El profesor motiva a los estudiantes a desarrollar la tarea y observa el desempeño en el manejo del material para la solución y el registro de las actividades. En la discusión en gran grupo, el profesor solicita la participación del relator de cada cuarteto y facilita la discusión reflexiva para reconocer los procedimientos efectuados durante la solución de la tarea que lleven a la construcción del concepto de simetría. El profesor puede adaptar la tarea para ajustarla al contexto de sus estudiantes; por ejemplo, al presentar solo las gráficas o las tablas y realizar el análisis. Si el profesor no cuenta con las herramientas tecnológicas para presentar los videos, puede resumirlos y presentarlos a los estudiantes.

Evaluación

El profesor debe estar atento a las intervenciones de los estudiantes en la solución de la tarea, en la justificación de la solución y en la presentación de los resultados, realizada por el representante del cada grupo. El profesor debe promover el respeto que se tiene frente a las opiniones de los compañeros y la fluidez del vocabulario propio del tema. El profesor debe revisar las respuestas en la tarea impresa, analizar las estrategias seguidas y los cálculos de las medidas de tendencia central para determinar la simetría del conjunto de datos. A la vez, el profesor debe identificar los errores en los que incurrieron los estudiantes para, luego, retroalimentar la tarea de tal manera que se subsanen los errores y se aclare el concepto de simetría antes de la implementación de la siguiente tarea.

El profesor debe evidenciar la activación de las expectativas afectivas en la interacción generada entre los estudiantes en cada uno de los momentos de la tarea, sea en cuartetos o el gran grupo. Por ejemplo, él puede hacerlo en el momento en el que el estudiante presenta las estrategias de solución y presenta las conjeturas o inferencias (EA1); cuando el estudiante realiza el análisis de los gráficos o las tablas presentadas y pone a consideración sus conclusiones frente a los demás compañeros (EA2); cuando el estudiante organiza los datos, aplica los procedimientos para obtener los resultados y presenta las conclusiones (EA3); y cuando realiza traducciones entre diferentes sistemas de representación, al partir del sistema gráfico, pasar al simbólico y llegar al sistema numérico (EA4).

5.2. Tarea 1.2. Número de hijos

En la tarea 1.2, solicitamos a los estudiantes analizar el conjunto de datos con la gráfica de barras, para determinar la dispersión del conjunto de datos e identificar las características de la homogeneidad. Para el análisis, el estudiante registra la información de la gráfica en la tabla de frecuencias y emplea las fórmulas para calcular la varianza, desviación estándar y el coeficiente de variación; establecer el valor del coeficiente de variación, y determinar la homogeneidad o no del conjunto de datos. La tarea contribuye al primer objetivo porque brinda a los estudiantes la oportunidad de

estudiar las medidas de dispersión, en particular, el resultado del coeficiente de variación que se relaciona con el concepto de homogeneidad.

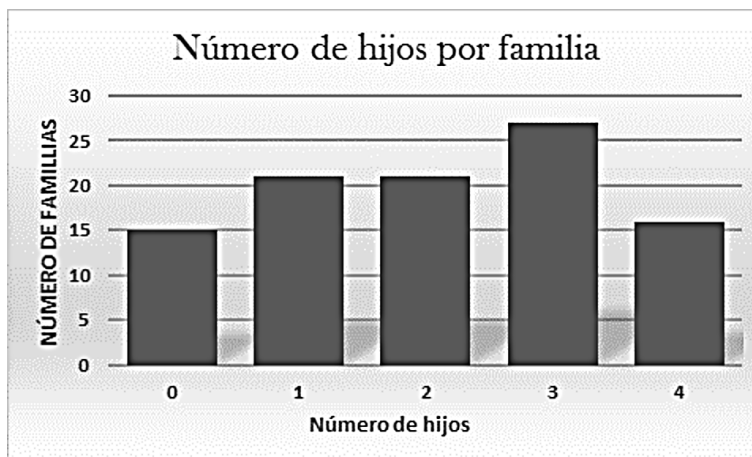
Requisitos de la tarea

Para abordar la tarea, el estudiante debe saber construir una tabla de frecuencias, identificar el tipo de variable, los elementos de un diagrama de barras (ejes, altura de las barras, etiquetas y título) y determinar el valor de la media del conjunto de datos.

Formulación de la tarea

Al inicio de la sesión, los estudiantes observan dos videos relacionados con el tema: el primero presenta estrategias para el cálculo de las medidas de dispersión y el segundo presenta ejemplos para determinar la homogeneidad o heterogeneidad del conjunto de datos. A continuación, presentamos la formulación de la tarea. En el anexo 09, se encuentra con detalle la formulación de la tarea con todos sus elementos.

Imaginen que ustedes forman parte de un grupo de expertos en economía y estadística a quienes se les muestra los resultados obtenidos de un estudio realizado a cien familias con respecto a la cantidad de hijos. ¿Es dispersa la cantidad de hijos en las familias? Justifique su respuesta.



Número de hijos por familia

Conceptos y procedimientos

Al abordar esta tarea, el estudiante usa los conceptos de la media, la varianza, la desviación estándar, el coeficiente de variación y la homogeneidad del conjunto de datos. Usa procedimientos como el cálculo de la media y de las medidas de dispersión (varianza, desviación estándar y coeficiente de variación) y compara el valor del coeficiente de variación con el valor 0,1. Este valor está establecido en la teoría para determinar la homogeneidad o no del conjunto de datos.

Sistemas de representación

Para la solución de esta tarea, se emplean los sistemas de representación gráfico, tabular, simbólico y numérico. El estudiante realiza la traducción entre el sistema de representación gráfico y el sistema tabular, al elaborar la tabla de frecuencias correspondiente con el gráfico de barras. La traducción entre el sistema tabular y el numérico se presenta al extraer los datos de la tabla de frecuencias para finalmente hacer la traducción al sistema simbólico, al emplear las fórmulas de las medidas de dispersión y realizar los cálculos. El estudiante activa el sistema de representación gráfico al formular hipótesis relacionadas con la forma en que están distribuidos los datos en la gráfica de barras y determinar la homogeneidad o no del conjunto de datos.

Contexto PISA

La situación problema presentada en la tarea se ubica, según los contextos PISA, en el contexto personal porque se relaciona con el número de hijos que tiene una familia.

Materiales y recursos

Para el desarrollo de la tarea, se requiere de un dispositivo que permita visualizar los videos mencionados en la formulación, la tarea impresa, la calculadora científica, una cartelera o diapositiva del mapa conceptual con las fórmulas de la media, la varianza, la desviación y el coeficiente de variación, y una diapositiva con ejemplos de gráficos de barras con datos homogéneos y heterogéneos.

Agrupamiento

Al inicio de la sesión de clase, los estudiantes escuchan las instrucciones del profesor y observan los videos propuestos organizados en el gran grupo. Luego, los estudiantes se organizan en parejas para iniciar el trabajo de solución de la tarea. En este momento, dialogan entre ellos para llegar a acuerdos sobre la estrategia de solución. Luego, se reúnen con otra pareja, para escuchar y analizar las estrategias utilizadas y llegar a un acuerdo sobre ellas. Posteriormente, seleccionan un representante que exponga la solución de la tarea al gran grupo.

Comunicación e interacción de clase

La tarea se desarrolla en cuatro momentos. En el primer momento, la interacción es entre el profesor y el gran grupo al retroalimentar la tarea 1.1. El profesor realiza la presentación de la tarea y proporciona la dirección electrónica de los videos expuestos en la formulación. En el segundo momento, la interacción se da entre estudiantes organizados en parejas. Las parejas observan los videos en el dispositivo electrónico que tengan a su disposición, para proponer la o las estrategias de solución para la tarea. En el tercer momento, la interacción se da con otra pareja para formar cuartetos. En este momento, el profesor estará en disposición de orientar en la solución de las dudas que surgen y activar las ayudas. El grupo y el profesor generan preguntas relacionadas con las estrategias utilizadas, los resultados obtenidos, las dificultades encontradas y la forma como llegan a los acuerdos. En el cuarto momento, la interacción es entre el profesor y el gran grupo con la participación de algunos grupos al presentar los resultados, de tal forma que, a partir de la discusión, se obtengan conclusiones relacionadas con la homogeneidad del conjunto de datos.

Temporalidad

El tiempo destinado para desarrollar la tarea es de 100 minutos que se distribuye en los cuatro momentos de la siguiente forma: 15 minutos para el primer momento, 15 minutos para el segundo momento, 50 minutos para el tercer momento y 20 minutos para el cuarto momento. La distribución de los tiempos se puede observar en detalle en el anexo 09.

Errores y ayudas

Es posible que los estudiantes incurran en errores al enfrentarse a la solución de la tarea. Estos errores pueden impedir que ellos realicen algún procedimiento de manera adecuada o no logren terminar la tarea. Para superar los errores, el profesor interviene, al efectuar contra preguntas y activar las ayudas. El listado de ayudas para la tarea se encuentra en el anexo 09.

Consideramos, que los estudiantes pueden incurrir en errores como multiplicar la media y la desviación estándar al determinar el coeficiente de variación (E30). Para superar este error, el profesor invita a los estudiantes a revisar la fórmula del coeficiente de variación (A19). Otro error en el que los estudiantes pueden incurrir es efectuar el cálculo del coeficiente de variación al dividir por la varianza (E31). El profesor indica que pueden revisar en el mapa conceptual la definición del coeficiente de variación (A20). El listado de dificultades y errores se encuentra en el anexo 04.

Grafo de criterios de logro

A continuación, en la figura 5, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea y resaltamos las posibles estrategias que pueden seguir los estudiantes para la solución de la tarea. En el grafo, se presentan los criterios de logro y los posibles errores en los que incurren los estudiantes en cada uno de ellos.

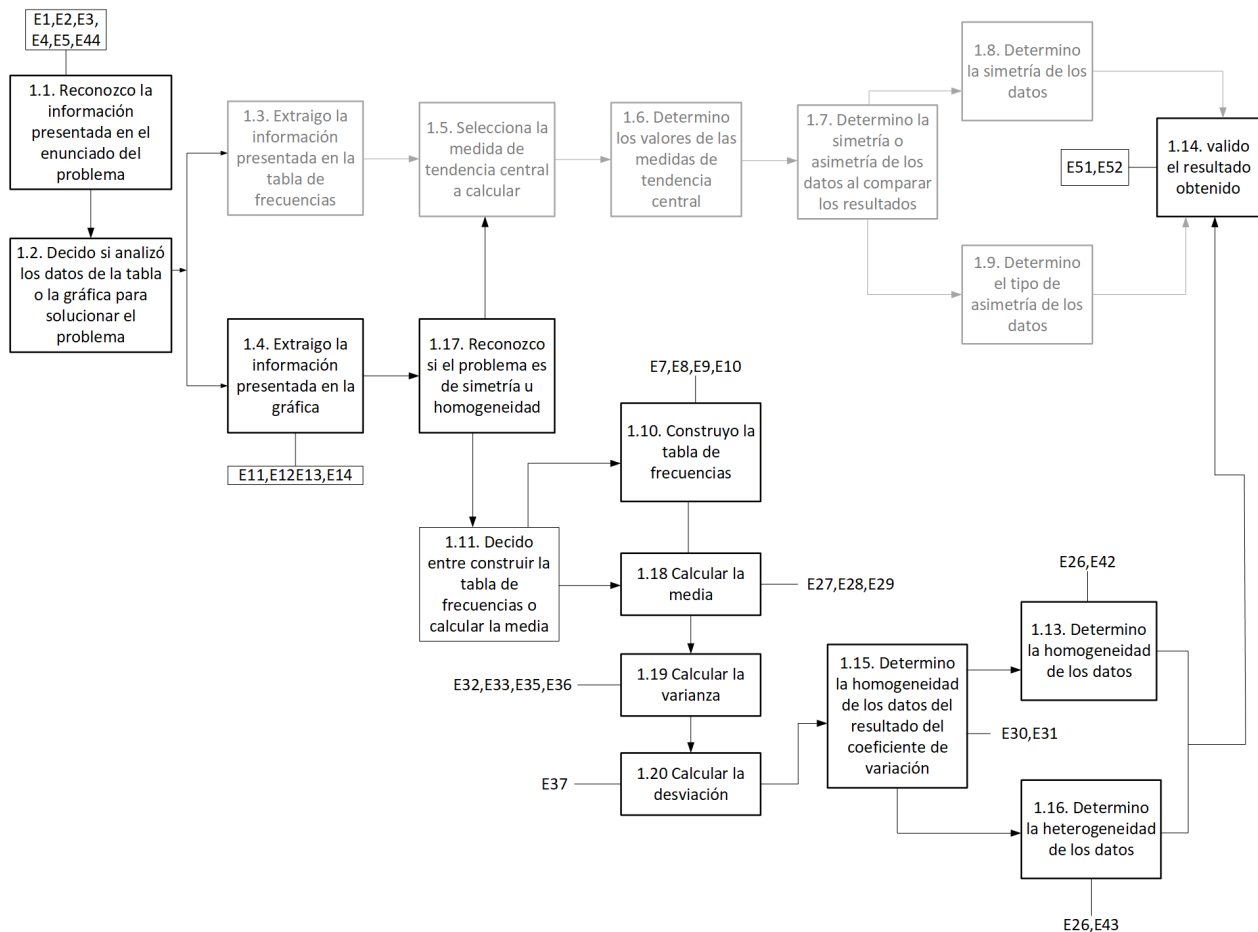


Figura 5. Grafo de criterios de logro tarea 1.2

La solución de la tarea inicia con la lectura del enunciado de la situación problema. Esta lectura implica que el estudiante reconozca el conjunto de datos con el que trabaja. Él puede incurrir en los errores E1, E2, E3, E4 y E44 relacionados con la lectura y extracción de datos del enunciado. Luego, el estudiante lee y extrae los datos del gráfico. Él puede incurrir en el error de indicar que la altura del rectángulo no es la frecuencia absoluta (E13). Con la información obtenida anteriormente, el estudiante decide si construye la tabla de frecuencias o realiza el cálculo de la media. Si construye la tabla de frecuencias, puede incurrir en el error de repetir los valores de la variable en la tabla (E7). Con la tabla realizada, el estudiante calcula la media. Con el valor anterior, calcula la varianza para luego determinar el valor de la desviación estándar. Él puede incurrir en el error de dividir entre dos, al hallar la raíz cuadrada de la varianza (E37). Después, el estudiante calcula el coeficiente de variación. Esto implica superar errores relacionados con los procedimientos de las expresiones matemáticas (E30, E31). Luego de realizar los cálculos, analiza el resultado del coeficiente de variación para determinar la homogeneidad o la heterogeneidad del conjunto de datos. Finalmente, el estudiante valida los resultados con el análisis de los datos.

Actuación del profesor

El profesor presenta las especificaciones de la tarea, la agrupación, la finalidad, el tiempo y los recursos. Solicita a algunos estudiantes exponer lo que entendieron, a fin de asegurarse que han comprendido las instrucciones de la tarea. El profesor verifica que, en las parejas, se asigne un rol (moderador y relator). Brinda las ayudas respectivas, cuando identifique que los estudiantes han incurrido en algún error en el desarrollo de la tarea, en la puesta en común o en el diálogo con las parejas. En la puesta en común, el profesor promueve la participación del relator de cada grupo para facilitar el debate que permita formalizar el concepto de homogeneidad y evidencie las estrategias de solución activadas por los cuartetos durante la solución de la tarea.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

Durante la implementación de la tarea, sugerimos que el profesor presente a los estudiantes la meta de la tarea, la forma en que se agruparán, los recursos que tienen a su disposición, los enlaces para la visualización de los videos y la tarea impresa. El profesor puede hacer las adecuaciones que considere necesarias para la implementación de la tarea, de acuerdo con los recursos que tenga a su disposición; por ejemplo, para la falta de dispositivos para presentar los videos, el profesor puede presentar un resumen o una guía teórica con los conceptos referentes a la homogeneidad.

Evaluación de la tarea 1.2

El profesor, en cada momento del desarrollo de la tarea, realiza la valoración del trabajo de cada estudiante, con las actuaciones que ellos realizan en el trabajo por parejas, por cuartetos y en la puesta en común al gran grupo. Tiene en cuenta los argumentos y justificación que presenten de la solución de la tarea. Revisa el material diligenciado por los estudiantes y verifica en qué medida se ha alcanzado la meta propuesta. Para ello, el profesor tiene en cuenta los procedimientos y respuestas presentadas en el material impreso y analiza las estrategias seguidas y los cálculos de las medidas de dispersión para determinar la homogeneidad del conjunto de datos. Con la revisión del material, el profesor identifica los errores en los que incurrieron los estudiantes. Con la identificación de errores, realiza la retroalimentación de la tarea antes de la implementación de la tarea 2.1 en la siguiente sesión de clase.

El profesor, aparte de evaluar cuantitativamente procedimientos, resultados y conclusiones, también realiza una evaluación cualitativa, al verificar la activación de las expectativas afectivas. Por ejemplo, los estudiantes, al efectuar la lectura de la tarea y traducir entre el sistema de representación gráfico y el tabular, despiertan el interés por la interpretación de las diferentes situaciones (EA4) y la importancia de ser ordenado al trabajar con los datos (EA3). Al calcular las medidas de dispersión, comparar los resultados para determinar si los datos son homogéneos o no y presentar la solución de la tarea, se genera la interacción entre los estudiantes y se observa si se respetan las opiniones de los compañeros (EA1). Además de estimular la argumentación con criterios matemáticos los resultados obtenidos, se observa la perseverancia en la obtención de los resultados (EA2).

5.3. Tarea 2.1. Seguimiento Covid-19

La tarea 2.1 corresponde a la primera tarea que contribuye al logro del segundo objetivo. En esta tarea, presentamos una serie de gráficos relacionados con datos de la pandemia Covid-19. Con esta

tarea, buscamos que los estudiantes reconozcan diferentes comportamientos del virus, desde las representaciones gráficas de los datos recolectados e interpreten las variaciones que tienen los gráficos de barras, respecto de la simetría, en un contexto determinado.

Con la tarea, contribuimos al logro del objetivo porque brinda a los estudiantes la oportunidad de analizar las gráficas por su forma o por los resultados de las medidas de tendencia central. El estudiante determina la simetría, realiza traducciones entre sistemas de representación y presenta inferencias a partir de la distribución de los datos y el contexto. En el anexo 10, se encuentra la ficha de la tarea con todos sus elementos.

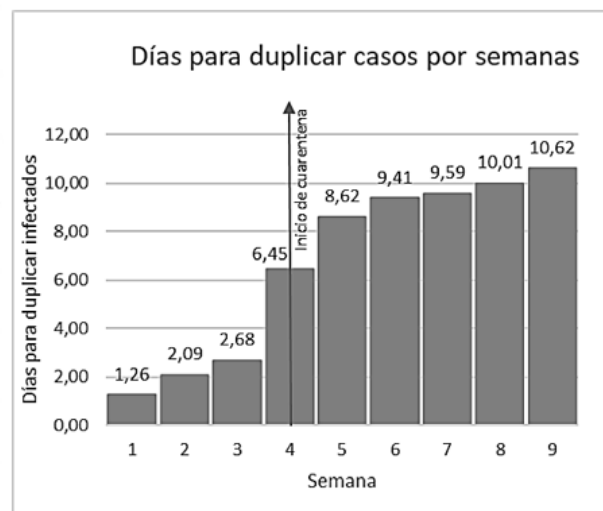
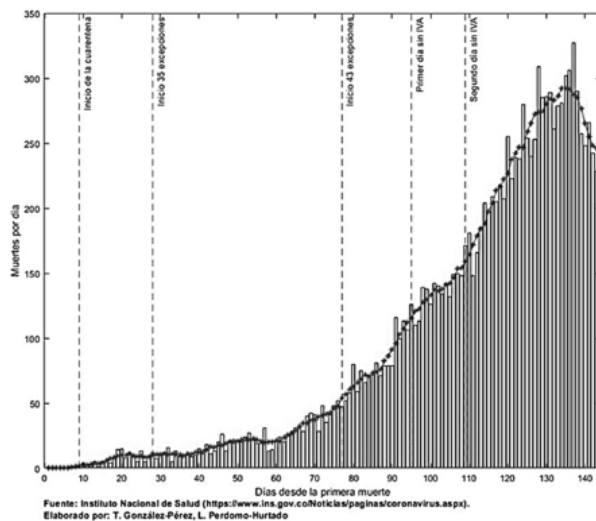
Requisitos de la tarea

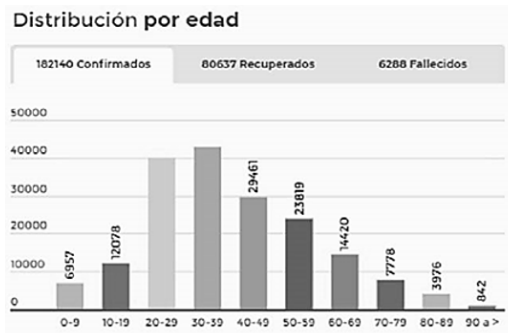
Antes de abordar la tarea, el estudiante debe conocer los elementos de un diagrama de barras, organizar los datos en una tabla de frecuencias, y establecer las medidas de tendencia central, las relaciones de orden entre los números y el concepto de simetría con su interpretación.

Formulación de la tarea

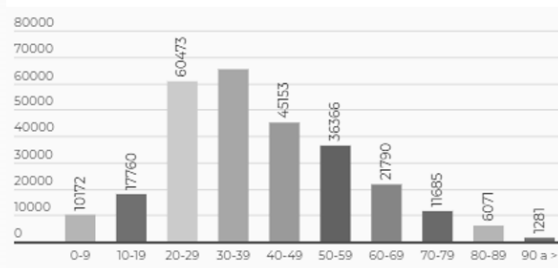
En la formulación de la tarea, presentamos seis gráficos relacionados con el comportamiento de la pandemia generada por el virus SARS-CoV-2. Los estudiantes deben analizar la simetría de los datos relacionados en cada uno de ellos y clasificarlos en simétricos o asimétricos. A continuación, presentamos la formulación de la tarea.

Las siguientes gráficas nos presentan el comportamiento de la Covid-19 en diferentes aspectos, como, por ejemplo, muertes por día, evolución de contagios por rango de edad, casos confirmados de contagio, entre otras.

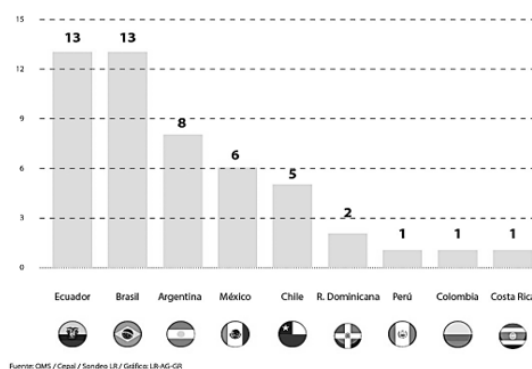




Distribución por edad de contagios



CASOS DE COVID-19 CONFIRMADOS EN AMÉRICA LATINA



Comorbilidad más común en los fallecidos por covid-19



Mediciones Covid-19

Señala con una “X” las gráficas que representan datos simétricos y dibuja un círculo para las gráficas que representan datos asimétricos. Escoge una de ellas y determina el impacto que tiene el comportamiento de los datos presentados en la gráfica para el comportamiento del virus SARS-CoV-2.

Conceptos y procedimientos

Al abordar la tarea, los estudiantes emplean e interpretan los conceptos de la moda, la mediana, la media y la simetría. Aplican los procedimientos del cálculo y comparación de las medidas de tendencia central. Además, los estudiantes analizan e interpretan el gráfico de barras.

Sistemas de representación

En el desarrollo de la tarea, los estudiantes utilizan el sistema de representación gráfico para mostrar los datos del problema; el sistema de representación simbólico, al reemplazar los valores en las fórmulas de la mediana y la media; el sistema de representación numérico, para calcular las medidas de tendencia central; y el sistema de representación gráfico, al determinar la simetría por inspección.

Contexto PISA

La situación problema que se presenta en la tarea se ubica en el contexto científico porque se habla de los resultados de las mediciones de la pandemia producto del SARS-CoV-2, y en el contexto social porque la pandemia impacta en el comportamiento de las personas, sus hábitos y rutinas.

Materiales y recursos

Para la implementación de la tarea, se requiere de un televisor, un video Beam, celulares o tabletas que permitan visualizar los videos <https://www.youtube.com/watch?v=881pvX0YEso> y <https://www.youtube.com/watch?v=wSyMXUiU-Nk>, las diapositivas con los gráficos de datos simétricos y asimétricos, la calculadora científica y la tarea impresa.

Agrupamiento

Al comienzo, los estudiantes trabajan individualmente para clasificar cada una de las gráficas presentadas en la formulación de la tarea en simétricas o asimétricas. Luego, los estudiantes trabajan en cuartetos para comparar y describir la clasificación de las gráficas realizada en el trabajo individual. Para finalizar la tarea, el profesor dirige la discusión en la que se comparte la solución de la tarea ante el gran grupo.

Comunicación e interacción de clase

Dividimos la sesión de clase en cuatro momentos para el desarrollo de la tarea. En el primer momento, la interacción es entre el profesor y el gran grupo, al retroalimentar los resultados de la tarea 1.2. El profesor realiza las aclaraciones pertinentes que surgen de los errores en los que incurrieron los estudiantes. Además, el profesor menciona las instrucciones de cómo se abordará el trabajo, la distribución de los estudiantes y la meta de la tarea 2.1. En el segundo momento, el trabajo es individual al observar los videos y marcar la simetría o asimetría de los gráficos. En el tercer momento, la interacción se da entre estudiantes, organizados en cuartetos, para la solución de la tarea. En el cuarto momento, la interacción se da entre el profesor y el gran grupo con la participación de las diferentes ternas al presentar los resultados, de tal forma que, a partir de la discusión, se obtienen conclusiones relacionadas con el tema trabajado y el contexto presentado.

Temporalidad

Los estudiantes desarrollan la tarea en una sesión de clase con un tiempo de 100 minutos. El tiempo se debe distribuir en los cuatro momentos de la siguiente forma: 20 minutos para el primer momento, 25 minutos para el segundo momento, 25 minutos para el tercer momento y 30 minutos para el cuarto momento. La distribución de los tiempos se puede observar en detalle en el anexo 10.

Errores y ayudas

Para la tarea, hemos considerado una serie de errores en los que los estudiantes pueden incurrir durante la solución de la tarea y, para cada uno de ellos, diseñamos por lo menos una ayuda que contribuye a superar las dificultades que los estudiantes presenten. Por ejemplo, los estudiantes pueden dividir por un número diferente a la cantidad de datos al calcular la media (E29). En este caso, el profesor le aclara que, al calcular la media, se debe dividir por el total de la frecuencia

absoluta (A16). Los estudiantes pueden calcular la mediana sin considerar si la muestra es par o impar (E24). Para este error, el profesor puede preguntar: ¿qué cantidad de datos tiene el problema? (A12). El listado de errores y ayudas para la tarea 2.1 se encuentra en el anexo 10 de la ficha de la tarea.

Grafo de criterios de logro

En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea. La parte resaltada corresponde a las posibles estrategias que los estudiantes pueden usar para la solución.

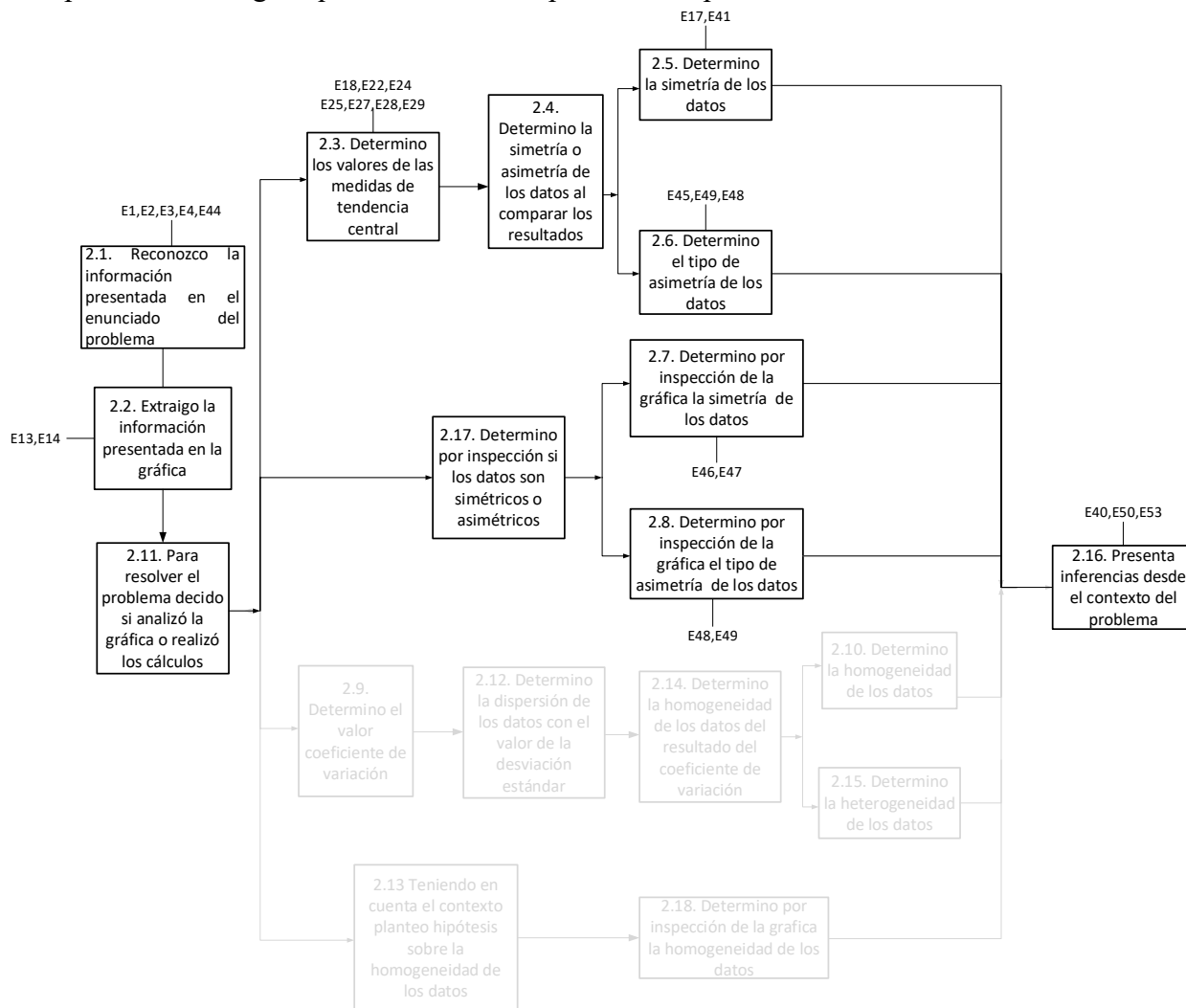


Figura 6. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.1

Al iniciar la solución de la tarea, el estudiante lee el enunciado. Es posible que incurra en errores relacionados con el tipo de variable y con la extracción de datos del enunciado (E1, E2, E3, E4 y E44). Con esta información, el estudiante leerá y extraerá los datos del gráfico. Las secuencias anteriores originan la información de entrada, para que el estudiante decida entre dos caminos para

la solución de la tarea. En el primer camino, se da paso al cálculo de las medidas de tendencia central. Es posible que incurra en errores de tipo procedimental (E18, E22, E24, E25, E27, E28, E29). Los cálculos anteriores permiten a los estudiantes comparar los resultados de las medidas de tendencia central. Con la comparación, los estudiantes tienen dos posibles resultados: si son iguales, determinan la simetría o, si son diferentes, determinan la asimetría.

En el segundo camino, el estudiante analiza directamente la gráfica y determina el comportamiento del conjunto de datos. Si en la gráfica de barras el comportamiento de los datos tiende a la derecha o izquierda, la distribución es asimétrica y los estudiantes pueden incurrir en los errores (E46, E47, E48, E49) relacionados con la distribución de los datos. Por último, se espera que, independientemente de la estrategia que sigan los estudiantes para la solución de la tarea, ellos realicen inferencias basadas en la gráfica y el contexto del problema. El listado de errores se encuentra en el anexo 04.

Actuación del profesor

El profesor aclara a los estudiantes que deben trabajar primero de forma individual y luego en cuartetos, y que tienen un tiempo de 50 minutos para realizar el trabajo. Durante la implementación de la tarea, el profesor supervisa la clasificación que los estudiantes realizan de las gráficas. El profesor explica a los estudiantes que la tarea pretende analizar el comportamiento de algunos resultados de la Covid-19, a partir de los datos presentados en los gráficos. El profesor estará dispuesto a colaborar en la solución de las dudas que surgen al realizar la tarea y generar preguntas relacionadas con las estrategias utilizadas, los resultados obtenidos y las dificultades encontradas. En la discusión de gran grupo, el profesor solicita la participación del relator de cada cuarteto, y facilita la discusión reflexiva, la generación de inferencias en el contexto y las implicaciones del comportamiento de los datos.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

El profesor entrega la tarea impresa a cada estudiante si es de forma presencial o la muestra en pantalla si es de forma virtual. Sugerimos que el profesor le solicite a un estudiante leer en voz alta, al grupo de clase, la formulación de la tarea y luego pida a algunos estudiantes exponer lo que entendieron, a fin de asegurarse de que han comprendido sus instrucciones. Sugerimos al profesor estar atento a las intervenciones que los estudiantes realizan en cada momento de la solución de la tarea, para establecer las estrategias utilizadas y los argumentos que presentan.

Evaluación

Para evaluar integralmente a los estudiantes, el profesor debe tener en cuenta los aspectos cognitivos y actitudinales. En los aspectos cognitivos, el profesor revisa la solución de la tarea en el material impreso entregado por los estudiantes. Este material contiene las estrategias, los procedimientos y resultados de la solución de la tarea. La solución está compuesta por la clasificación de las gráficas, los cálculos realizados, de ser necesario, y los argumentos para la clasificación. En la revisión, el profesor identifica los errores en los que incurren los estudiantes, para retroalimentar la tarea.

En el aspecto actitudinal, el profesor valora las actuaciones que tiene el estudiante en cada uno de los momentos del desarrollo de la tarea, la interacción con los compañeros y el aporte al funcionamiento del grupo. Para realizar esta valoración, el profesor puede tener en cuenta las expectativas afectivas planteadas para la unidad didáctica.

5.4. Tarea 2.2. Calificaciones de un examen²

Con la tarea 2.2, pretendemos que el estudiante analice el conjunto de datos desde la gráfica de barras, para determinar si son homogéneos o no. Para el análisis, el estudiante puede registrar la información de la gráfica en una tabla de frecuencias y emplear las fórmulas para calcular la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación. Al analizar el valor del coeficiente de variación, él determina la homogeneidad o no del conjunto de datos e indica qué grupo tiene mejor rendimiento. Por otro lado, el estudiante puede analizar directamente de la gráfica y presentar inferencias sobre el comportamiento de las calificaciones.

La solución de la tarea por parte de los estudiantes contribuye al logro del segundo objetivo porque brinda a los estudiantes la oportunidad de analizar, con el concepto de homogeneidad, el conjunto de datos y presentar inferencias relacionadas al contexto. En el anexo 11, se encuentra la ficha de la tarea con todos sus elementos.

Requisitos de la tarea

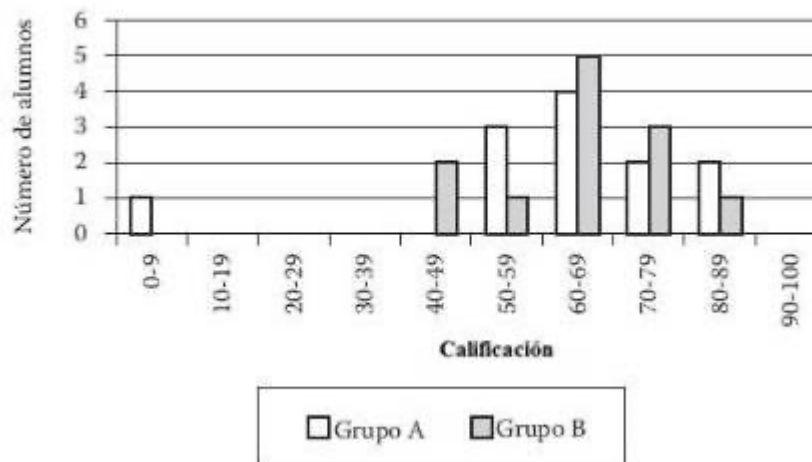
Para abordar la tarea, el estudiante debe reconocer los elementos de un diagrama de barras, calcular la media, la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación del conjunto de datos, conocer el concepto de homogeneidad y saber interpretarlo.

Formulación de la tarea

En la formulación de la tarea, presentamos un gráfico con las calificaciones de los exámenes de ciencias de dos grupos de estudiantes. Los estudiantes deben determinar qué grupo presenta mejores resultados en las calificaciones del examen y tomar una postura a favor o en contra de la afirmación presentada en la tarea. A continuación, presentamos la formulación de la tarea.

El diagrama muestra los resultados en un examen de Ciencias para dos grupos, denominados Grupo A y Grupo B. La puntuación media del Grupo A es 62,0 y la media del Grupo B es 64,5. Los alumnos aprueban este examen cuando su puntuación es 50 o más.

² Tomada de las preguntas liberadas de PISA 2003.



Calificaciones de un examen de ciencias

Al observar el diagrama, el profesor afirma que, en este examen, el Grupo B fue mejor que el Grupo A. Presente sus argumentos para estar de acuerdo o en contra de la afirmación del profesor. Utilice la información del diagrama y el contexto.

Conceptos y procedimientos

Para la solución de la tarea, los estudiantes usan e interpretan los conceptos de la media, la varianza, la desviación estándar, el coeficiente de variación y la homogeneidad del conjunto de datos. Aplican los procedimientos del cálculo de la media y las medidas de dispersión (varianza, desviación estándar y coeficiente de variación) y comparan el valor del coeficiente de variación con el valor 0.1. Además, los estudiantes analizan e interpretan el gráfico de barras.

Sistemas de representación

En la solución de la tarea, los estudiantes emplean cuatro sistemas de representación y las traducciones entre ellos. Traducen entre el sistema de representación gráfico y el sistema tabular, al elaborar la tabla de frecuencias, y, entre el sistema gráfico y el numérico, al extraer los datos de la gráfica de barras al sistema simbólico, emplear las fórmulas de las medidas de dispersión y realizar los cálculos. Y el estudiante utiliza el sistema de representación gráfico al realizar el análisis y formular hipótesis sobre la forma en que están distribuidos los datos en la gráfica de barras y la homogeneidad o no del conjunto de datos.

Contexto PISA

La situación problema presentada en la tarea se ubica en el contexto personal porque se relaciona con las calificaciones de un examen e indaga sobre qué grupo es mejor.

Materiales y recursos

Para la aplicación de la tarea, se requiere de dispositivos que permitan a los estudiantes visualizar videos y realizar consultas para interpretar la homogeneidad, desde la representación gráfica, la tarea impresa, la calculadora científica, y una cartelera con ejemplos de gráficos de barras con

datos homogéneos y heterogéneos. Además, los estudiantes cuentan con los materiales y recursos brindados en la tarea 1.2.

Agrupamiento

En el desarrollo de la tarea, los estudiantes inician organizados en el gran grupo y escuchan las instrucciones del profesor para la solución de la tarea. Luego, los estudiantes, de forma individual, analizan la tarea y toman una postura en contra o a favor de la afirmación dada. Posteriormente, los estudiantes se agrupan en ternas, según la postura que tomaron. Por último, los grupos presentan las conclusiones al gran grupo.

Comunicación e interacción de clase

Los estudiantes desarrollan la tarea en cuatro momentos. En el primer momento, la interacción es entre el profesor y el gran grupo al retroalimentar la tarea 2.1 y la presentación de la tarea 2.2. En el segundo momento, los estudiantes analizan de forma individual el enunciado, la gráfica de barras y toman una postura a favor o en contra de lo planteado en la formulación. En el tercer momento, la interacción se da entre estudiantes organizados en ternas según su postura. Las ternas observan ejemplos en el dispositivo electrónico que tengan a su disposición, para validar los argumentos dados en la solución de la tarea. En este momento, el profesor estará en disposición de solucionar las dudas que surjan. En el cuarto momento, la interacción es entre el profesor y el gran grupo, con la participación de algunos grupos al presentar las conclusiones y argumentos de la solución de la tarea. A partir de la discusión, ellos deben obtener conclusiones relacionadas con la homogeneidad del conjunto de datos en el contexto planteado en la tarea.

Temporalidad

Los estudiantes tienen, para el desarrollo de la tarea, un tiempo de 100 minutos. El tiempo se debe distribuir en los cuatro momentos de la siguiente forma: 20 minutos para el primer momento, 20 minutos para el segundo momento, 40 minutos para el tercer momento y 20 minutos para el cuarto momento. La distribución de los tiempos se puede observar en detalle en el anexo 11.

Errores y ayudas

Consideramos que los estudiantes pueden incurrir en una serie de errores al solucionar la tarea. Por tal razón, hemos diseñado por lo menos una ayuda para cada error en que el estudiante puede incurrir. Por ejemplo, ellos pueden multiplicar la media y la desviación estándar al determinar el coeficiente de variación (E30). En este caso, el profesor invita a revisar la fórmula del coeficiente de variación (A12). Otro error en el que pueden incurrir es aplicar propiedades de la suma y la multiplicación que no se cumplen al determinar la varianza (E35). La ayuda que proponemos es verificar el proceso efectuado al realizar las operaciones básicas (A17).

Grafo de criterios de logro

A continuación, en la figura 7, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea y resaltamos las posibles estrategias que pueden seguir los estudiantes para la solución de la tarea.

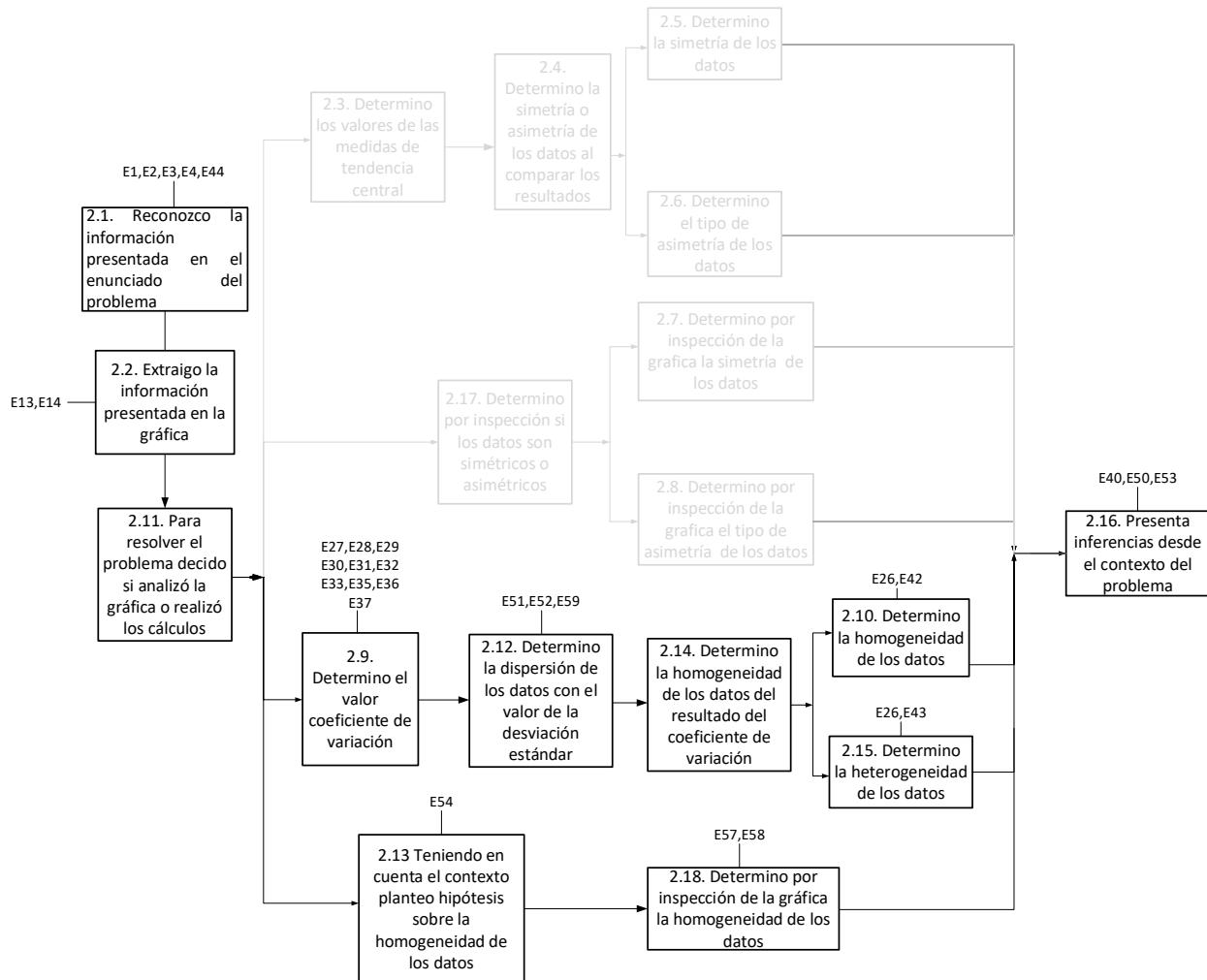


Figura 7. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.2

La solución de esta tarea inicia de forma similar a la tarea 1.2. El estudiante lee el enunciado y extrae la información que le brinda la gráfica. Luego, el estudiante decide si realiza los cálculos matemáticos o analiza la gráfica. Si decide realizar los cálculos, halla el valor del coeficiente de variación y puede incurrir en errores de las operaciones y procedimientos, por ejemplo, al multiplicar la media y la desviación estándar para determinar el coeficiente de variación (E30), o dividir entre dos, al calcular la raíz cuadrada de la varianza para obtener la desviación estándar (E37). Con los procedimientos anteriores, el estudiante compara los valores de la desviación estándar para determinar la dispersión de los conjuntos de datos. Después, el estudiante analiza el resultado del coeficiente de variación para determinar si el conjunto de dato es homogéneo o por el contrario es heterogéneo. Por último, el estudiante presenta inferencias sobre la situación problema al observar la gráfica e involucra el contexto.

Si el estudiante decide analizar directamente la gráfica, la estrategia de solución lo conduce a formular hipótesis respecto a la homogeneidad del conjunto de datos en el contexto del problema

y puede incurrir en el error (E54), al plantear hipótesis sin tener en cuenta el contexto. Seguidamente, el estudiante determina la homogeneidad de los datos, desde la gráfica, sin realizar cálculos. Luego, el estudiante realiza inferencias al observar la gráfica y las valida al relacionar el contexto presentado.

Actuación del profesor

El profesor presenta las generalidades de tarea, la distribución de los tiempos para su solución, los recursos que tienen a su disposición y su evaluación. El profesor verifica que, en las ternas, se asigne un rol a cada estudiante (moderador, relator y consultor). Brinda las ayudas respectivas cuando identifica que los estudiantes han incurrido en algún error en el desarrollo de la tarea. A su vez, motiva a los estudiantes a desarrollar la tarea y verifica el desempeño en el manejo del material, para la solución y el registro de las actividades. En la discusión, el profesor promueve la participación del relator de cada grupo para facilitar el debate y evidenciar las estrategias de solución de la tarea, las conclusiones a las que llegaron y los argumentos para defender la postura que tomaron a favor o en contra.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

Sugerimos al profesor, solicitar a algunos estudiantes exponer lo que entendieron de la formulación de la tarea, a fin de asegurarse que han comprendido las instrucciones. También, sugerimos que el profesor suministre a los estudiantes los enlaces para la visualización de los videos, si se tiene a disposición los equipos. De lo contrario, el profesor puede realizar un resumen que presenta a los estudiantes con el contenido de los videos.

Evaluación

El profesor, en cada momento del desarrollo de la tarea, realiza la valoración del trabajo de cada estudiante. Por ello, en las actuaciones que realizan en el trabajo individual, por ternas y en la puesta en común al gran grupo, tendrá en cuenta los argumentos y justificación que presenten de la solución de la tarea. Revisa el material diligenciado por los estudiantes y verifica en qué medida se ha alcanzado la meta propuesta. Para ello, el profesor tiene en cuenta las estrategias, los procedimientos y respuestas presentadas en el material impreso. El profesor, aparte de evaluar cuantitativamente los procedimientos, resultados y conclusiones, también realiza una evaluación cualitativa, al verificar la activación de las expectativas afectivas.

6. EXAMEN FINAL

Con el examen final, validamos el proceso de enseñanza realizado en el desarrollo de la unidad didáctica. El examen permite evaluar individualmente a los estudiantes en el logro de los dos objetivos de aprendizaje. El examen está compuesto por cuatro situaciones problema que involucran diferentes contextos y permiten la activación de los criterios de logro determinados para cada uno de los objetivos. El examen, relaciona la simetría u homogeneidad, de acuerdo con la forma como se distribuyen los datos en la representación gráfica, y establece su comportamiento según el contexto.

Para evaluar el logro del primer objetivo, incluimos dos tareas en el examen: cuadros gripales y tiempo de reacción. Para su solución, el estudiante debe usar uno de los sistemas de representación (gráfico, tabular o numérico) para establecer la simetría u homogeneidad del conjunto de datos. Para evaluar el logro del segundo objetivo, también incluimos dos tareas: los cuentos y el estudio de mercado. Las tareas plantean al estudiante situaciones problema de dispersión del conjunto de datos relacionadas con un contexto. Para resolverlas, el estudiante aplica los conceptos de simetría u homogeneidad para interpretar las gráficas, y presentar inferencias y conclusiones de acuerdo con el contexto.

Para la implementación del examen final, se requiere una sesión de 100 minutos. Se recomienda verificar la legibilidad del texto e imágenes en las fotocopias de la formulación de las tareas. Cuando los estudiantes tienen preguntas, el profesor puede ofrecer ayudas al recordar alguna de las tareas desarrolladas durante la unidad didáctica. Después de la aplicación del examen, en la siguiente sesión, el profesor devuelve el examen corregido y desarrolla la retroalimentación en el orden de las tareas. En esta retroalimentación, el profesor presenta los resultados del examen, soluciona preguntas con respecto a los resultados y explica el plan de mejoramiento para los estudiantes que no alcanzaron el nivel de desempeño mínimo. A continuación, presentamos el diseño del examen final.

Cuadros gripales

En un barrio de la localidad de Suba, se realizó un estudio entre los niños menores de 3 años que presentaron un cuadro gripal en el último mes, como se observa en el siguiente diagrama.



Cantidad de niños con cuadro gripal en el último mes

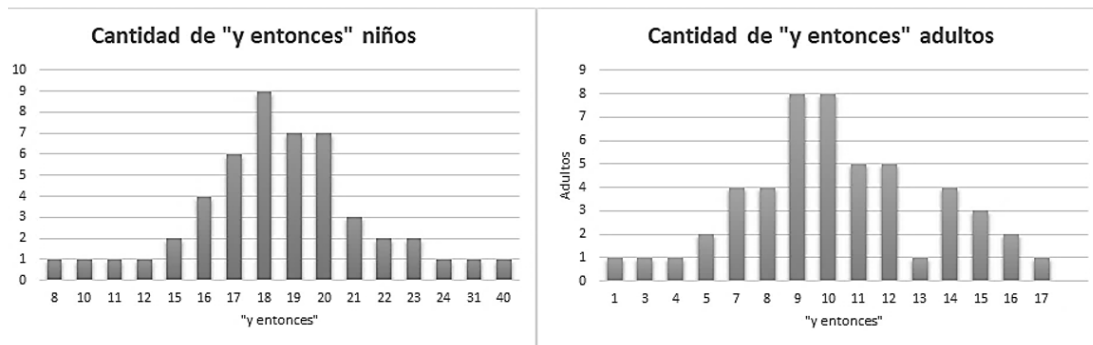
Analiza la gráfica y describe que información te proporciona.

¿En qué días del mes se presenta la mayor concentración de casos gripales? y ¿qué significado tiene para el estudio esta concentración?

¿Qué nos dice la forma de la distribución de la variable “número de casos gripales” según la gráfica? Justifica tu respuesta.

Los cuentos³

Los niños, a diferencia de los adultos, tienden a recordar las películas, cuentos e historias como una sucesión de acciones más que el argumento en forma global y de conjunto. En el relato de una película, por ejemplo, utilizan con frecuencia las palabras “y entonces...”. Una psicóloga con suprema paciencia pidió a 50 niños que le contaran una determinada película que ellos habían visto. Consideró la variable cantidad de “y entonces...” utilizados en el relato. Como parte del mismo estudio, la experimentadora obtuvo de 50 adultos el mismo tipo de datos que se registraron en las siguientes gráficas.



Cantidad de “y entonces”

Respecto de las gráficas presentadas, responde los siguientes interrogantes.

1. ¿Quiénes utilizan más el término “y entonces”?
2. De acuerdo con la respuesta anterior, ¿cuál es la razón por la que se usa el término “y entonces” en ese grupo de personas?
3. ¿Cuál de los dos grupos de datos presenta menor dispersión? Justifique su respuesta
4. Determine la simetría o asimetría de los conjuntos de datos. Justifique su respuesta

Tiempo de reacción⁴

El tiempo que transcurre entre la finalización de la presentación de un chiste y el momento en que una persona comienza a reírse se denomina tiempo de reacción. En este contexto, la presentación del chiste es un estímulo y, la aparición de la risa, la reacción. Se hizo una experiencia con un grupo determinado en el que se midió el tiempo de reacción de sus integrantes ante un chiste y se obtuvo los datos representados en la siguiente gráfica, en décimas de segundos (ds). En una experiencia previa, se tuvo, para ese chiste, un tiempo de reacción medio 29,182 ds y una varianza 11,964 ds².

³ Pregunta tomada de https://www.academia.edu/36883451/Ejercicios_de_Estad%C3%ADstica

⁴ Pregunta tomada de <https://www.coursehero.com/file/p79r2deq/Tema-9-Ejercicio-de-tiempo-de-reacci%C3%B3n-en-un-chiste-El-tiempo-que-transcurre/>

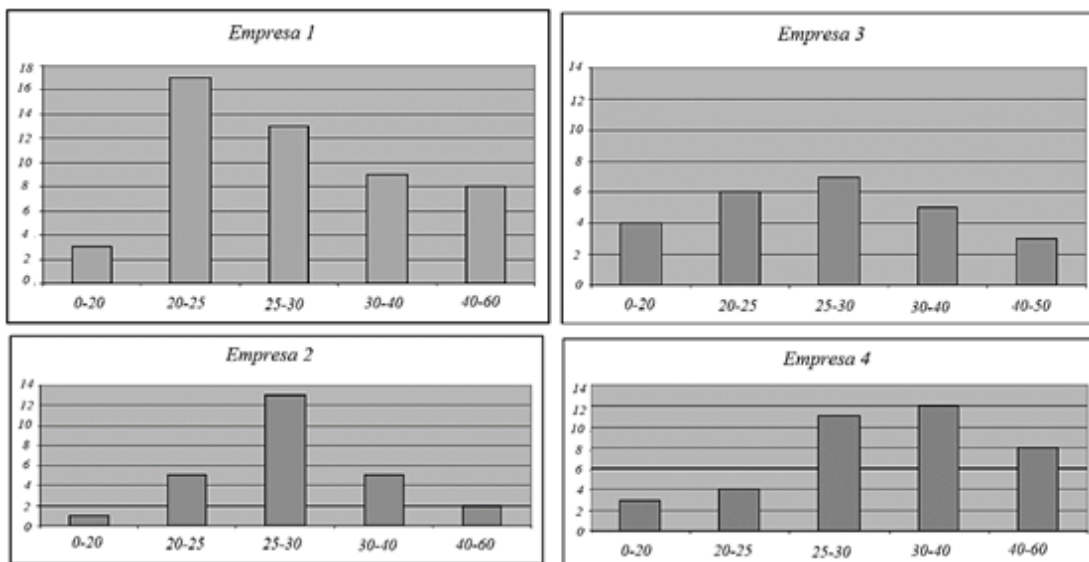


Tiempo de reacción a un chiste

1. ¿Cuál de los grupos reaccionó más rápido ante el estímulo? Justifique su respuesta.
2. Cuál de los dos grupos es más homogéneo respecto del tiempo de reacción frente a un chiste. Justifique su respuesta.

*Estudio de mercado*⁵

Se quiere lanzar al mercado un nuevo producto cerámico y la empresa que lo crea estudia el tiempo de publicidad (segundos) que otras empresas han utilizado para promocionar un producto similar. A continuación, se puede ver, para cada empresa, la duración (eje x) y la cantidad de anuncios realizados (eje y).



Comparación del estudio de mercado de las empresas

⁵ Pregunta tomada de https://issuu.com/universitatjaumei/docs/sapientia_100/64

1. Basados en los gráficos, ¿Tienen todas las distribuciones la misma forma? Argumenta tu respuesta.
2. ¿En cuál de las cuatro empresas el tiempo de publicidad presenta menor variación? Justifica la respuesta.
3. ¿Cuál de las cuatro empresas en términos de tiempo de publicidad seleccionarías para lanzar el producto cerámico? Justifica tu respuesta.

La calificación del examen se realiza mediante una rúbrica que relaciona los criterios de logro con el grado de activación que puede ser total, parcial o nulo. A su vez, la rúbrica presenta cuatro niveles de desempeño para el estudiante: superior, alto, básico y bajo. A continuación, en la tabla 6, presentamos la rúbrica para el primer objetivo. La rúbrica completa se puede consultar en el anexo 12.

Tabla 6
Rúbrica para el primer objetivo

Escala	Criterios de valoración
Superior 91-100	El estudiante responde correctamente las preguntas de las tareas y activa los criterios de logro previstos para el objetivo sin incurrir en errores
Alto 81-90	El estudiante activa los criterios de logro relacionados con la lectura y extracción de la información del enunciado, extrae información del sistema de representación, y aplica algoritmos matemáticos para determinar la simetría o la homogeneidad. Sin embargo, él puede incurrir en errores como E4 o E5 (suponer que los dos ejes tienen la misma escala u omitir la medida —escala— de los valores entre los ejes), E8 (obtener un valor diferente al totalizar la frecuencia absoluta) o E2 (omitir datos en la construcción de la tabla de frecuencias).
Básico 61-80	El estudiante responde parcialmente la tarea o incurre en errores como E1 (confundir frecuencia absoluta con frecuencia relativa), E14 (repetir el valor de una variable presentada en un diagrama de barras), E18, E22 y E24 (relacionados con el cálculo de las medidas de tendencia central), o E17, E48, E49, E39, E7, E32, E36, E37, E42 y E43 (relacionados con los algoritmos de las medidas de tendencia central o de dispersión a determinar).
Bajo 10-60	El estudiante incurre en errores que implican que las respuestas sean erradas o que no le sea posible solucionar la tarea como E25, E27, E28 y E29 (encaminados al mal uso de las fórmulas de las medidas de tendencia central), E30, E31, E33 y E35 (relacionados con el cálculo de la varianza o la desviación), E41 (concluir cuando las medidas de tendencia central son iguales, que los datos son asimétricos), E45 (concluir cuando la media y la mediana son diferentes, los datos son simétricos), E40 (considerar que una conclusión es válida para diferentes situaciones) y E26 (usar la desviación estándar para determinar la homogeneidad de los datos).

Nota: E: Error

7. CONCLUSIONES

En este documento, presentamos el diseño de la unidad didáctica para la enseñanza del tema interpretación gráfica de la dispersión de un conjunto de datos. Primero, realizamos la descripción de la unidad didáctica, con base en el modelo del análisis didáctico (en los análisis de contenido y cognitivo). Luego, presentamos la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje y el examen final, diseñadas para los dos objetivos. Además, describimos los elementos de las tareas y proporcionamos algunas ideas que el profesor puede tener en cuenta a la hora de implementarlas.

Para el logro del primer objetivo, diseñamos tareas de aprendizaje que privilegian los procesos de formular y emplear, y contribuyen al desarrollo de capacidades matemáticas fundamentales como la comunicación, la representación y la utilización de operaciones. Para el logro del segundo objetivo, diseñamos tareas que privilegian el proceso de interpretar y contribuyen al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales como la comunicación, la utilización de operaciones y el razonamiento.

Diseñamos una tarea diagnóstica, compuesta por diez ítems, en la que se espera que el estudiante demuestre que posee los conocimientos previos que consideramos pertinentes para el desarrollo de las cuatro tareas de aprendizaje. También diseñamos el examen final con cuatro tareas: dos corresponden a la evaluación del primer objetivo y las otras dos a la evaluación del segundo objetivo.

El uso de videos explicativos, como apoyo metodológico, que presentamos en la formulación de las diferentes tareas de aprendizaje, despertó interés en los estudiantes encaminándolos a la adquisición de los conceptos de simetría u homogeneidad. De igual manera, contribuyeron de manera efectiva, a la valoración de la expectativa afectiva relacionada con el interés por la interpretación de gráficas estadísticas.

Los diferentes agrupamientos de los estudiantes favorecen la interacción y permiten evaluar las expectativas afectivas relacionadas con el respeto por las opiniones de los demás. De igual manera, las diferentes puestas en común dan una percepción, acerca del nivel de desempeño, desde lo cognitivo y lo afectivo, porque requieren de un lenguaje matemático que implica la elaboración de explicaciones y argumentos en el contexto de las tareas presentadas, que fortalece la capacidad matemática fundamental de la comunicación, en el proceso de interpretar.

La presentación de diferentes situaciones, en las tareas de aprendizaje, permite a los estudiantes activar diferentes estrategias para su desarrollo. Por ejemplo, en la tarea de aprendizaje 2.1, la mayoría de los estudiantes, debido al tamaño de los datos presentados, encuentran una nueva estrategia para determinar la simetría del conjunto de datos. Esta nueva estrategia corresponde a analizar directamente, desde el comportamiento de la gráfica, y dejar de un lado los cálculos de las medidas estadísticas.

Los profesores pueden adaptar el diseño de la unidad didáctica a los diferentes contextos en que se encuentran los estudiantes, con las sugerencias metodológicas presentadas (por ejemplo, si las sesiones de clase son presenciales o virtuales, o si el profesor cuenta o no con los dispositivos tecnológicos para la presentación de los videos).

8. LISTADO DE ANEXOS

A continuación, presentamos el listado de anexos⁶ que apoyan el informe final de la unidad didáctica interpretación gráfica de la dispersión de un conjunto de datos.

01. Mapa conceptual de la estructura conceptual-procedimental
02. Mapa conceptual sistemas de representación
03. Mapa conceptual de fenomenología
04. Listado de dificultades y errores
05. Listado de capacidades
06. Listado de criterios de logro
07. Listado de dificultades y errores tarea diagnóstica
08. Ficha de la T1.1 Sueldo de las compañías
09. Ficha de la T1.2 Número de hijos
10. Ficha de la T2.1 Seguimiento Covid-19
11. Ficha de la T2.2 Calificaciones de un examen
12. Rubrica de calificación del examen final
13. Imprimibles de las tareas

9. REFERENCIAS

- Ayala, R. y Messing-Grube, H. (2013). Comprender los enunciados en un examen escrito: ¿dónde está el problema? *Educación Médica Superior*, 27(2), 211-219. Recuperado en 10 de diciembre de 2021, de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0864-21412013000200008&lng=es&tlng=es.
- Batanero, C., Godino, D., Green, D., Holmes, P., y Vallecillos, A. (1994): “*Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts*”. En *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, (25), (pp. 527-547).
- Cañadas, C., Gómez, P., Pinzón, A. (2018). *Análisis de contenido*. En P. Gómez, (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Castro, P. y Gómez, P. (2018). *Evaluación de la planificación y la implementación*. En P. Gómez. *Formación de profesores de matemáticas y prácticas de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 371-411). Bogotá, Colombia: Universidad de los andes.

⁶ Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/23716>.

- Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). *Dar sentido a los gráficos: factores críticos que influyen en la comprensión y las implicaciones educativas*. Revista de investigación en educación matemática, 32(2), 124-158.
- Gómez, P., Mora, M y Velasco C. (2018) *Análisis de instrucción*. En P. Gómez. Formación de profesores de matemáticas y prácticas de aula (pp 197-268). Bogotá, Colombia: Universidad de los andes.
- González, M. y Gómez, P. (2018). *Análisis Cognitivo*. En P. Gómez. Formación de profesores de matemáticas y prácticas de aula. (pp 113-196). Bogotá, Colombia: Universidad de los andes.
- Hegarty, M., Mayer, R. E., YMonk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: a comparison of successful and unsuccessful problems solvers, Journal o. Educational Psychology, 87,18-32.
- Marín, A, y Gómez, P. (2018). *Análisis de datos*. En P. Gómez. Formación de profesores de matemáticas y practica de aula conceptos y técnicas curriculares (pp. 303-369). Bogotá.
- MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá, Colombia.
- MEN. (2015). Derechos básicos de aprendizaje. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de educación, c. y. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Madrid. España.
- Pfannkuch, M. y Wild, C. (2000) *Statistical thinking and statistical practice: Themes gleaned from professional statisticians*. Statistical Science, 15(2), 132-152
- Romero, I. y Pedro, G. (2018). *Análisis de actuación*. En P. Gómez (Ed). Formación de profesores de matemáticas y prácticas de aula; conceptos y técnicas curriculares (pp. 269-301). Bogotá, Colombia.
- Socas, M., Hernández, J. y Camacho, M. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria. Revista Interuniversitaria de formación del profesorado (32), 73-86.