Herramienta pedagógica basada en el desarrollo de una aplicación informática para la mejora del aprendizaje en matemática avanzada*

A pedagogical tool based on the development of a computer application to improve learning in advanced mathematics

Dr. Íñigo SARRÍA MARTÍNEZ DE MENDIVIL. Profesor. Universidad Internacional de La Rioja *(inigo.sarria@unir.net).*
Dr. Rubén GONZÁLEZ CRESPO. Profesor Titular. Universidad Internacional de La Rioja *(ruben.gonzalez@unir.net).*
Alexander GONZÁLEZ-CASTAÑO. Corporación Universitaria Minuto de Dios · UNIMINUTO *(algonzalez@uniminuto.edu).*
Dr. Ángel Alberto MAGREÑÁN RUIZ. Profesor Contratado Interino. Universidad de La Rioja *(angel-alberto.magrenan@unirioja.es).*
Dra. Lara ORCOS PALMA. Profesora. Universidad Internacional de La Rioja *(lara.orcos@unir.net).*

Resumen:

El estudio dinámico de los métodos iterativos ha aumentado en las últimas décadas debido al desarrollo de los ordenadores, aspecto por el cual se ha visto la necesidad de incluir la enseñanza de estos métodos en los planes de estudio. En la actualidad, hay varios tipos de *software* cuya aplicación didáctica en las aulas es de gran utilidad, pero no se han diseñado atendiendo a las dificultades que los alumnos presentan en relación al aprendizaje de la dinámica de los métodos iterativos. Cabe, asimismo, destacar que no existe un *software* diseñado en exclusiva para la enseñanza de métodos iterativos y este hecho, junto con las dificultades encontradas por los alumnos en esta temática, ha llevado a que muchos de ellos no entiendan los conceptos

*Agradecimientos: Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el proyecto SENECA 20928/PI/18 de la Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia, el proyecto del Ministerio de Ciencia y Tecnología PGC2018-095896-B-C21 y por el proyecto “Plan Propio de Investigación, Desarrollo e Innovación [2015-2017]” grupo: Modelación matemática aplicada a la ingeniería (MOMAIN) de la Universidad Internacional de La Rioja.

Fecha de recepción de la versión definitiva de este artículo: 10-01-2019.
Cómo citar este artículo: Sarría Martínez De Mendivil, Í., González Crespo, R., González-Castaño, A., Magreñán Ruiz, Á. A. y Orcos Palma, L. (2019). Herramienta pedagógica basada en el desarrollo de una aplicación informática para la mejora del aprendizaje en matemática avanzada | *A pedagogical tool based on the development of a computer application to improve learning in advanced mathematics. Revista Española de Pedagogía, 77* (274), 457-485. doi: https://doi.org/10.22550/REP77-3-2019-06

 ISSN: 0034-9461 (Impreso), 2174-0909 (Online)

revista española de pedagogía
año 77, nº 274, septiembre-diciembre 2019, 457-485

fundamentales, ya que se trata de una materia que tiene un alto componente visual. Teniendo en cuenta todos los factores anteriores, se ha diseñado un *software* que sirve para ayudar a los alumnos en la comprensión de esta materia, permite a los profesores realizar simulaciones en el aula y a la vez evita que los alumnos puedan utilizar la herramienta, el plano de parámetros o el plano dinámico que no corresponda en cada situación a la que se enfrenten. El presente artículo aborda el desarrollo de una propuesta metodológica en la que se emplea el *software* diseñado en una muestra de alumnos de la asignatura Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos del Máster en Ingeniería Matemática y Computación de la Universidad Internacional de La Rioja, y se comparan los resultados con otra muestra de alumnos que no han dispuesto de la herramienta. El resultado que se desprende es que el grupo que siguió la nueva metodología obtiene una nota media muy superior al grupo con el que se utilizó la metodología habitual.

Descriptores: *software*, herramienta pedagógica, matemática avanzada, ecuaciones no lineales, métodos iterativos, dificultades de aprendizaje, educación superior.

Abstract:

Dynamic study of iterative methods has become more common in recent decades thanks to the development of computers, something that illustrates the importance of including these methods in curricula. There are several types of software whose didactic application in the classroom is very useful, but they have not been designed in response to students' difficulties related to learning of the dynamics of iterative methods. It should also be noted that there is no software exclusively designed for teaching iterative methods, and this, along with the difficulties students encounter in this area, has caused many students problems with understanding fundamental concepts as it is a subject with a large visual component. Taking into account all the above factors, we have designed a software program to help students understand this subject and allow teachers to perform simulations in the classroom while preventing students from using the tool or the parametric plane or dynamic plane that is appropriate for the particular situation they face. This article considers the development of a methodological proposal in which the software we designed is used with a sample of students from the Discrete and Continuous Dynamic Systems module on the Master's degree in Mathematical Engineering and Computing at the Universidad Internacional de La Rioja, and their results are compared with another sample of students who did not have access to this mathematical tool. The result that emerges is that the group that followed the new methodology obtained much higher average score than the groups taught with the previous methodology.

Keywords: software, pedagogical tool, advanced mathematics, nonlinear equations, iterative methods, learning difficulties, higher education.

1. Introducción

A mediados de los años ochenta surge en España la necesidad de conocer los motivos de la problemática del aprendizaje de las matemáticas en términos de adquisición de competencias y habilidades, intentado dejar atrás el hecho de valorar únicamente los aspectos meramente cognitivos (Azcárate y Camacho, 2003). Centrándonos en la relación entre el pensamiento matemático avanzado y los contenidos matemáticos universitarios, con el fin de poder desarrollar metodologías de enseñanza y aprendizaje que fomenten el aprendizaje significativo de los alumnos, esta investigación se centra en la inclusión de procesos de definición, prueba y demostración, de forma que se puedan establecer modelos para comprender los procesos cognitivos de los estudiantes.

Algunos de los problemas que se observan en relación con el pensamiento matemático avanzado tienen que ver con el papel que pueden jugar los conceptos en los propios procesos u objetos matemáticos. Por tal motivo, se distinguen dos tipos de concepciones para un mismo concepto matemático: las operacionales y las estructurales (Sfard, 1991). Mientras las primeras tratan los conceptos desde una perspectiva dinámica, como algoritmos, las segundas los tratan desde un punto de vista estático, como objetos abstractos.

Vinner (1991) señala que otro de los aspectos sobre los que se observan problemas en los alumnos para adquirir un pensamiento matemático avanzado tiene que ver con las definiciones, pues generan un conflicto entre las concepciones estructurales concebidas por los matemáticos y los procesos cognitivos que usan los alumnos a la hora de adquirir los conceptos, ya que tiende a pensarse que son tales definiciones las que permiten que los alumnos sean capaces de resolver los problemas. Por otro lado, Azcárate y Camacho (2003) indican que las definiciones juegan un papel muy importante cuando los alumnos tienen que realizar sus tareas cognitivas para desarrollar los esquemas conceptuales. Por tales motivos, es necesario educar a los alumnos en el uso de estas definiciones para la elaboración de los esquemas conceptuales, empleando para ello situaciones didácticas adecuadas.

Tal y como comenta Rodríguez-Vásquez (2010), en relación al pensamiento matemático avanzado, las investigaciones se centran principalmente en: el estudio de la relevancia que los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las matemáticas van tomando a medida que avanzamos a cursos posteriores; el estudio epistemológico de los conceptos fundamentales de análisis; y el papel de las herramientas tecnológicas en el aprendizaje de estos conceptos.

En relación a la construcción de conceptos matemáticos, desde el punto de vista del constructivismo, resulta necesaria la interacción del sujeto con todas las representaciones posibles del objeto. En este sentido, desde la perspectiva epistemológica, la visualización es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, ya que se basa en una técnica que permite a los alumnos generar ideas para llegar a un fin, que es el aprendizaje de los conceptos, por lo que no ha de ser solo considerada desde su acepción de «ver u observar». Vásquez (2003) propone una clasificación de la visualización basada en lo que supone en relación con la adquisición del pensamiento matemático avanzado. En ella habla de:

– La visualización como medio que sirve de enlace entre la intuición y el razonamiento.

– La visualización como la capacidad de articular las distintas representaciones de un objeto para obtener imágenes mentales de él y, por lo tanto, darle significación.

– La visualización como la acción que lleva a cabo el ser humano para conectar las diferentes representaciones del objeto.

– La visualización como proceso mental que nos ayuda a representar, transformar, etc., la información visual.

En este contexto, las aplicaciones tecnológicas suponen una gran ventaja a fin de que los alumnos sean capaces de aprender los conceptos a partir de la visualización, siempre y cuando sean usadas de forma adecuada, como un medio de enseñanza que favorezca el aprendizaje significativo a partir de metodologías novedosas y no como un fin en sí mismas, meros dispositivos técnicos empleados en el aula.

Tal y como comentan Martins, Fracchia, Allan y Parra (2010), el uso de las nuevas tecnologías en las aulas hace necesario que se aborde el diseño de nuevas actividades de aprendizaje a fin de que los alumnos desarrollen capacidades que les permitan afrontar las situaciones que se presentan en la sociedad. Por tal motivo, resulta crucial el desarrollo de escenarios que favorezcan el procesamiento y la modelización de la información.

Estudios, como el realizado por De Faria (2001), concluyen que los dispositivos tecnológicos aplicados a la enseñanza de las matemáticas son un factor que determina el alcance y la limitación que puede haber a la hora de tratar un concepto matemático. Los programas de ordenador proporcionan imágenes visuales que evocan nociones matemáticas, facilitan la organización, el análisis de los datos, la representación gráfica y el cálculo de manera eficiente y precisa (Godino, 2004). Esto fomenta en los alumnos la capacidad de análisis, de abstracción y de desarrollo del pensamiento lógico.

En la actualidad es muy común el uso de *softwares,* en particular los CAS (Computer Algebra Systems), los cuales son de gran utilidad en las aulas, ya que permiten al alumno explorar los conceptos matemáticos fomentando la toma de decisiones en el control de las estrategias a desarrollar para resolver los problemas relacionados con esos conceptos.

Se puede decir, por lo tanto, que las herramientas tecnológicas ayudan a la tarea de visualización y, por lo tanto, a conectar contenidos y significados. Este aspecto es crucial, tal y como comenta Santos (2003), ya que permite que los alumnos establezcan conexiones de los conceptos matemáticos no solo entre ellos, sino también en relación con otras áreas. Como indica Santos (2003), el uso de *softwares* dinámicos en las aulas establece grandes oportunidades didácticas para los alumnos, permitiéndoles explorar concepciones matemáticas a través de la interactuación con las construcciones.

Sin embargo, se deben también establecer otros modelos pedagógicos que tengan al estudiante como epicentro de la actividad de aprendizaje (Fernández, 2017).

El modelado y la simulación de sistemas resultan muy adecuados, ya que permiten la creación de ambientes virtuales que imitan el comportamiento de cualquier tipo de sistema. En la actualidad, hay varios tipos de *softwares* cuya aplicación didáctica en las aulas es de gran utilidad. El uso de estos *softwares* les permite interpretar métodos numéricos y adaptarlos a otras situaciones que podrían resultarles de utilidad en su futuro profesional, ya que les confiere la capacidad de afianzar sus conocimientos en programación (Ascheri y Pizarro, 2006). En este sentido, el rol del docente juega un papel muy importante, ya que debe fomentar que los alumnos vean la tecnología como una herramienta a partir de la cual puedan ampliar sus capacidades cognitivas, lo que implica hacer un uso reflexivo de la misma (Hitt, 2003).

Algunos de estos *softwares* son: SAGE (empleado en álgebra, cálculo, teoría de grupos, criptografía, etc.), Genius (permite trabajar muchos conceptos y su lenguaje está diseñado para parecerse a la sintaxis matemática normal) o Scilab (para simulaciones matemáticas, visualizaciones 2D y 3D, optimización, diseño de sistemas control, procesamiento de señales, etc.).

Son muchas las situaciones prácticas en las que se ven involucradas soluciones a través de métodos numéricos de ecuaciones no lineales (Amat, Busquier, Legaz y Ruiz, 2015; Arís y Orcos, 2015; Jiménez, Mediavilla, Portús, López y San Vicente, 2015). Por tal motivo, el trabajo de esta investigación está relacionado con el concepto de ecuaciones no lineales y el empleo de métodos iterativos para la resolución de las mismas.

Los métodos iterativos fueron desarrollados por los griegos, babilonios y árabes, pero no fue hasta el siglo XVII cuando se desarrollaron en Europa. Importantes investigadores de esa época como Leonardo da Vinci, Galileo, Descartes, Newton y Leibniz mostraron interés por el estudio de las ecuaciones diferenciales, término acuñado por Leibniz, para lo cual consideraron necesario el desarrollo de nuevos métodos.

El motivo de este estudio se debe a las dificultades cognitivas que se observan en los alumnos universitarios en relación con este concepto que es tan necesario dominar en el ámbito tanto de la matemática aplicada como de la ingeniería, ya que la inmensa mayoría de problemas a los que van a tener que enfrentarse serán resueltos de forma numérica mediante procesos iterativos.

Basado en todo lo anterior, nuestro objetivo principal será: diseñar una metodología basada en la aplicación de una herramienta para tratar de paliar los problemas detectados y aplicarla a diferentes grupos de estudiantes. Este objetivo principal puede ser disgregado en tres objetivos parciales:

Objetivo 1: diseñar y poner en marcha la modificación de la temporalización y la impartición de las clases en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos.

Objetivo 2: diseñar una herramienta, que será desarrollada en lenguaje MATLAB y aplicarla en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos.

Objetivo 3: mejorar los resultados a nivel cuantitativo en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos utilizando la herramienta y la nueva forma de impartir la asignatura.

Otro objetivo, en última instancia, será responder a la pregunta: ¿se ha resuelto el problema del alto nivel de abstención en las entregas y se han mejorado los resultados obtenidos por los estudiantes?

2. Conceptos básicos de métodos iterativos

Dentro de la Matemática Aplicada existen diferentes ramas, pero una de las más estudiadas es la que trata de encontrar las soluciones de una ecuación o sistema de ecuaciones no lineales. En este contexto, aparecen los métodos iterativos, ya que son unos métodos que, partiendo de un punto inicial y bajo unas ciertas condiciones, van a generar una sucesión que va a converger en la solución buscada.

A partir del uso de métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales se puede aplicar el concepto de deflación para la obtención de todas las raíces de un polinomio aplicando la división sintética del método de Horner. En concreto, cuando se trata de ecuaciones no lineales, los métodos de Newton, de la Secante, de Raphson o de Müller solo permiten obtener una raíz a la vez.

Es interesante observar como queda de manifiesto que la técnica de la función reducida puede utilizarse para cualquier tipo de función, sin importar si es una función polinómica o no, y permite hallar todas y cada una de las raíces de las ecuaciones no lineales. Algunos de los problemas que aparecen en el proceso son la determinación de raíces múltiples, las indeterminaciones o si las funciones presentan discontinuidades. A pesar de que este razonamiento resulta trivial, en la revisión bibliográfica no se ha encontrado mencionado este caso. En este sentido, varios autores han escrito sobre el potencial de aplicar este concepto, pero, sin embargo, no profundizaron en la puesta en práctica de la misma. En el caso que aquí nos atañe, sí que se ha hecho hincapié en ello y se ha enseñado a los alumnos cómo funciona el algoritmo, así como todas las hipótesis que se deben cumplir para llegar a ponerlo en práctica. De hecho, una de las tareas propias de la materia es la elaboración de algoritmos eficientes que sirvan en la búsqueda de soluciones de ecuaciones no lineales.

Existen muchos métodos iterativos famosos, como, por ejemplo:

- Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Método de Halley

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2 * f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

- Método de Chebyshev

$$x_{n+1} = x_n + \left(1 - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2 * f'(x_n)^2}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Como vemos, estos métodos iterativos llevan el nombre de sus descubridores. Durante las últimas décadas, los esfuerzos de los investigadores en el área se han centrado en el diseño de nuevos métodos con diferentes características (órdenes de convergencia altos, libres de derivadas, etc.) y en suavizar las condiciones que garantizan la convergencia de la sucesión generada en la solución buscada.

Por otro lado, en los últimos años, y debido a la irrupción de los ordenadores, se ha comenzado a estudiar el comportamiento dinámico de estos métodos iterativos, ya que, si estudiamos dicho comportamiento, podemos conocer de primera mano qué va a suceder cuando lo apliquemos a diferentes funciones de las cuales queremos calcular sus raíces.

Si nos centramos en el método de Newton, debido a su relevancia y sus buenas características, podemos decir que el estudio de la dinámica de este método en el plano complejo tiene una importancia histórica desde que, primero, E. Schöder en 1870 y, nueve años más tarde, A. Cayley propusieran utilizar dicho método para resolver ecuaciones definidas en el plano complejo.

En este sentido, uno de los problemas más famosos es el conocido como *problema de Cayley,* que consiste en estudiar las cuencas de atracción (es decir, aquellos puntos que al iterar el método convergen en la solución) de cada una de las raíces del polinomio complejo al cual aplicamos el método de Newton (ver Magreñán, 2013 para entender mejor el problema). En un principio, para polinomios de la forma

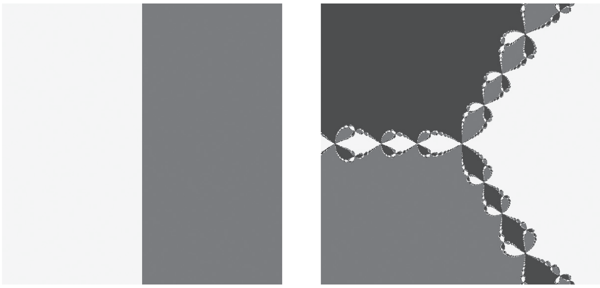
$$p(z) = z^2 - a, \tag{1}$$

siendo a un número complejo cualquiera, el problema resultó ser sencillo, ya que las cuencas de atracción se corresponden con cada uno de los semiplanos separados por la mediatriz del segmento que une ambas raíces. Sin embargo, cuando dio el paso a polinomios de la forma

$$p(z) = z^3 - a, \tag{2}$$

se encontró con que no era capaz de resolverlo. Hoy en día, y con la ayuda de los potentes ordenadores, podemos entender la razón por la que no fue capaz. En el Gráfico 1 vemos la diferencia existente entre la caracterización de cada zona para polinomios de grado 2 y 3.

Gráfico 1. Caracterización de las cuencas de atracción asociadas al método de Newton aplicado al polinomio (1) (izquierda) y (2) (derecha).



Fuente: Magreñán Ruiz, 2013.

Es fácil ver cómo en la parte derecha, sin la presencia de ordenadores, sería imposible caracterizar cada zona, más aún sabiendo que su comportamiento es fractal. En 1977, el famoso matemático Benoit Mandelbrot, en su libro *The fractal nature of geometry* (Mandelbrot, 1983) presentó numerosas aplicaciones de este tipo de estructuras en la naturaleza. Además, en 2012 (Fisher, McGuire, Voss, Barnsley y Devaney, 2012), recapituló su definición intuitiva de lo que significaba para él el término *conjunto fractal* —un conjunto en el que las partes son similares al total, en algún sentido— y dio aplicaciones del estudio de las imágenes fractales. De forma coloquial, entendemos que un objeto es fractal si cumple alguna de las siguientes condiciones (hemos omitido las más técnicas):

- Tiene detalles a todas las escalas.
- Es autosemejante.

Si hiciéramos zoom en las intersecciones que se producen en la parte derecha del Gráfico 1, veríamos cómo, efectivamente, vuelven a aparecer las mismas estructuras y es por esta razón por lo que sin ordenador es imposible caracterizar las cuencas de atracción de un polinomio cúbico.

Por otro lado, los matemáticos están centrando esfuerzos en el diseño de familias de métodos iterativos que dependan de uno o más parámetros, ya que estas familias van a permitir tener una infinidad de nuevos métodos iterativos o incluso observar el comportamiento de varios métodos a la vez. Algunos de los métodos o familias uniparamétricos más conocidos y que dependen de un parámetro son:

- Método de Newton amortiguado

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Familia de Chebyshev-Halley

$$x_{n+1} = x_n - \frac{L_f(x_n)}{2 * \left(1 - \alpha\, L_f(x_n)\right)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

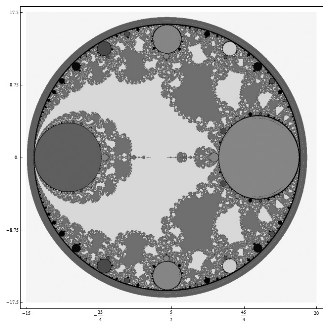
Es evidente que el método de Newton queda englobado dentro del método de Newton amortiguado si $\lambda = 1$ y la familia de Chebyshev-Halley engloba a Halley ($\alpha = ½$), Chebyshev ($\alpha = 0$) y Newton Halley ($\alpha = \pm\infty$).

Para proceder al estudio dinámico de este tipo de familias, lo primero que se hace es el estudio de los planos de parámetros (ver Gráfico 2) para determinar qué valores del parámetro van a tener un comportamiento dinámico que nos interese y cuáles no, con el fin de obtener una información más detallada de cada uno de los conceptos involucrados (Cordero, Magreñán, Quemada y Torregrosa 2016; Behl, Amat, Magreñán y Motsa, 2018; Magreñán, Argyros, Rainer y Sicilia, 2018).

Cuando trabajamos sobre familias uniparamétricas, una herramienta esencial es el plano de parámetros. Esta representación gráfica relaciona de forma directa cada punto del plano complejo con su correspondiente valor del parámetro que particulariza cada miembro de la familia. Dado un punto crítico libre del método, el plano de parámetros nos indica sobre qué punto fijo atractor va a converger la órbita del punto crítico. Para ello, es necesario el análisis previo de los puntos fijos y críticos del sistema. Un punto crítico libre no es más que un punto que anula la derivada, pero no es solución de la ecuación. El análisis del comportamiento de estos puntos críticos libres da lugar al plano de parámetros.

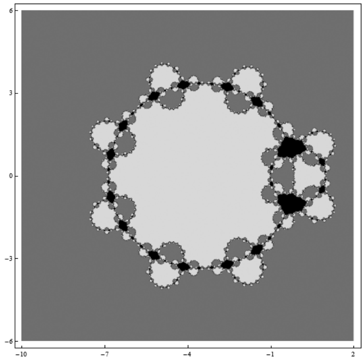
Una vez detectados los valores del parámetro para los que existen anomalías, dibujaremos las cuencas de atracción (también conocido su gráfico como plano dinámico) para corroborar dichas anomalías y caracterizarlas. La cuenca de atracción de un punto fijo es la componente conexa que contiene el punto fijo. Es decir, llamamos cuenca de atracción de un punto fijo al conjunto de puntos del plano cuyas iteraciones convergen hacia el punto fijo. Luego, para calcular el plano dinámico, no tenemos más que dibujar el estado final de la órbita de cada punto, caracterizado por colores, al iterarlo mediante el método. Por supuesto, la situación ideal sería que nos encontráramos con un plano de parámetros sin anomalías, ya que en tal caso tendríamos una familia de métodos iterativos que se comporta, en términos de convergencia, de forma perfecta para cada miembro.

Gráfico 2. Plano de parámetros en el que existen diferentes anomalías (todos los colores diferentes). Método multipaso de orden 5 libre de segunda derivada aplicado a un polinomio cuadrático con dos raíces diferentes.



Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

GRÁFICO 3. Cuencas de atracción asociadas al valor del parámetro ($\alpha = 2.5$) en el que hemos detectado anomalías.



Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

3. Principales dificultades encontradas en los alumnos de la muestra de este estudio en relación a los métodos iterativos

Para este estudio hemos seleccionado un total de 34 alumnos de la asignatura Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos del Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación impartido en la Universidad Internacional de La Rioja. Estos alumnos se corresponden con las dos primeras promociones que han accedido a dicha asignatura y es la primera vez que se enfrentan al estudio dinámico de métodos y familias de métodos iterativos. En este sentido, se ha llevado a cabo una investigación tanto cuantitativa como cualitativa, incluyendo entrevistas personales con los alumnos, y teniendo en cuenta sus resultados en los trabajos entregados. En la Tabla 1, se puede observar el porcentaje de alumnos que presentó alguno de los trabajos vinculados con el estudio dinámico de métodos iterativos. Otros 10 estudiantes no presentaron ninguno de los trabajos, por lo que hemos omitido esa información en la tabla para mayor claridad.

De manera general, se puede decir que los alumnos presentan dificultades a la hora de distinguir qué tipo de gráfico, de plano dinámico o paramétricos tienen que usar. Los planos dinámicos se obtienen a partir de la aplicación de métodos simples, mientras que los métodos paramétricos requieren que se fije el valor del parámetro mediante el uso del plano paramétrico para poder, una vez fijado el valor, dibujar el plano dinámico. De esta manera, cuando hay que trabajar con familias de métodos paramétricos, primero hay que ir al plano de parámetros para ver qué valores del parámetro son «buenos», en términos de convergencia, y una vez que el parámetro ha sido seleccionado, se dibuja el plano dinámico para comprobar que el método funciona correctamente.

La confusión entre los planos de parámetros con los planos dinámicos conlleva que los alumnos no puedan continuar con el estudio de la familia de métodos. Por este motivo, se hace necesaria la aplicación de vías alternativas que permitan que los alumnos palien esta confusión y logren un aprendizaje significativo de estos conceptos matemáticos. Este estudio se basa en la aplicación de un *software* que permite obtener el plano que corresponda en base a la función que se esté estudiando, ya sea paramétrico o dinámico. De esta manera, no se podrá obtener nunca un plano paramétrico a partir de la aplicación de un método dinámico y viceversa. Esto conlleva que los alumnos comprendan la fundamentación de los métodos iterativos y sepan aplicarlos, ya que, a partir del trabajo autónomo con el *software,* serán ellos los protagonistas activos de su proceso de aprendizaje y aprenderán a su ritmo y de forma autónoma, comprendiendo en todo momento la aplicabilidad de los mismos.

Tabla 1. Resultados académicos de los trabajos vinculados al estudio dinámico.

Alumno	Trabajo 1	Trabajo 2	Trabajo 3
1	NP	9.5	5
2	9	NP	NP
3	0	NP	NP
4	0	8	7
5	0	NP	NP
6	NP	5	NP
7	0	8.5	3
9	6	10	NP
12	9	9	NP
13	2	8	10
15	10	NP	NP
16	5	0	0
17	8	0	0
18	NP	0	0
20	5	9.5	7
21	NP	8	8
22	NP	5	NP
23	0	NP	NP
24	4	6	NP
25	0	NP	NP
26	10	0	0
28	NP	0	0
29	NP	NP	5
32	0	0	0

Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

Tal y como se puede observar en la Tabla 1, el número de alumnos que no han entregado los trabajos (NP, no presentado) es muy elevado, lo que lleva a pensar que no entienden la fundamentación de los métodos iterativos ni saben aplicarlos. De hecho, podemos observar cómo un tercio de los alumnos no ha llegado a entregar ninguno de los dos trabajos.

Como resumen de los datos, obtenemos que el porcentaje total de trabajos entregados es igual al 50 % en los dos primeros trabajos y, en el tercero, este porcentaje baja al 38.24 %. Por lo tanto, es evidente que existen problemas vinculados con la materia.

Tal y como se puede observar en la Tabla 2, el porcentaje de aprobados es mayor en el segundo trabajo, mientras que el porcentaje de presentados es inferior en el tercer trabajo. Por otro lado, vemos que la nota media del primer y tercer trabajo es menor de 5 puntos, lo cual deja patente que las dificultades que presentan los alumnos son importantes y deben ser tenidas en cuenta. En el segundo trabajo, la nota media apenas supera el 5, por lo que también son evidentes los problemas. En la siguiente sección se realiza una descripción pormenorizada de los trabajos en los que se han puesto de manifiesto dichos problemas.

Tabla 2. Estadísticos descriptivos de los trabajos vinculados al estudio dinámico.

	Trabajo 1	Trabajo 2	Trabajo 3
NP	17	17	21
Suspensos	9	6	7
Aprobados	8	11	6
Total	34	34	34
Total sin NP	17	17	13
% presentados con NP	50%	50%	61.76%
% aprobados con NP	23.53%	32.35%	17.65%
% aprobados sin NP	47.06%	64.71%	46.15%
Nota Media con NP	2.00	2.54	1.32
Nota Media sin NP	4.00	5.09	3.46

Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

4. Descripción de los trabajos

A continuación, describiremos los trabajos en los que se han detectado los problemas y donde los alumnos han mostrado las dificultades que han sustentado este estudio y la puesta en marcha del *software*.

En el primer trabajo, el objetivo fundamental es que comparen la dinámica compleja de un método iterativo comparado con el método de Newton y se les facilitan las pautas de dicha comparativa, al aplicarlo a un polinomio genérico de grado dos con un parámetro. Las principales dificultades existentes para los alumnos han sido problemas a la hora de calcular de forma analítica los puntos fijos y su dinámica, los puntos críticos libres y, sobre todo, problemas con los gráficos.

Como se puede observar en la Tabla 2, solo se han presentado 17 trabajos de 34 alumnos y, de ellos, solo 9 han aprobado —es decir, poco más del 25% de los alumnos—, por lo que es evidente que existen grandes dificultades en la resolución de los ejercicios. De hecho, en un primer momento se tuvo que ampliar el plazo y permitir el reenvío de trabajos, ya que presentaban grandes dificultades en la elaboración de los mismos. A continuación, pasamos a enumerar algunas de dichas dificultades:

- «¿Qué valor le doy al parámetro?»
- «¿Cómo calculo los puntos fijos si hay un parámetro?»
- «¿Por qué no pide que calculemos los planos de parámetros?»
- «¿Qué significa cuencas de atracción?»

Como puede observarse, todas estas dificultades están vinculadas con el hecho de tener un polinomio con un parámetro y de no saber cómo tratarlo.

En el segundo trabajo, el objetivo fundamental es que comparen la dinámica compleja de un método iterativo que depende de un parámetro, por lo que, como se ha visto con anterioridad, primero deben estudiar los planos de parámetros para determinar los valores para los que el método presenta o no problemas de convergencia, pasar después a estudiar los planos dinámicos y detectar, en su caso, dichos problemas.

Como se puede observar en la Tabla 2, solo se han presentado 17 trabajos de 34 alumnos y, de ellos, solo 11 han aprobado, es decir, menos del 33% de los alumnos, por lo que es evidente que existen grandes dificultades en la resolución de los mismos ejercicios. A continuación, enumeramos algunas de dichas dificultades:

- «No entiendo cuándo debo usar el plano dinámico y cuándo el plano de parámetros».
- «¿No es lo mismo el plano de parámetros que el dinámico?»
- «¿Qué valores del parámetro debo utilizar en los planos dinámicos?»
- «¿Qué dibujo primero, el plano de parámetros o el dinámico?»
- «¿Por qué no me grafica bien los planos dinámicos el *software* y me sale el dibujo negro?»
- «¿Con qué valor del parámetro debo dibujar el plano de parámetros?»
- «¿Cómo puedo saber si algo es periódico?»
- «¿La tolerancia influye en algo?»

Como puede observarse, todas estas dificultades están vinculadas con el hecho de no diferenciar entre el plano de parámetros y el plano dinámico, y no entender que primero deben dibujar el plano de parámetros y después, una vez dibujado, seleccionar los valores del parámetro que deben fijar para dibujar los planos dinámicos y encontrar las anomalías existentes para ese valor. Otra de las dificultades que han presentado los alumnos es el no entender qué deben exigir para obtener un comportamiento periódico y poder garantizar que algo es convergente o divergente.

Por lo tanto, estamos detectando problemas en todos y cada uno de los ejercicios de este trabajo en concreto, a pesar de ser en el que mejor nota media se ha obtenido.

En el tercer trabajo, el objetivo fundamental es, primero, que calculen los planos dinámicos de unos polinomios concretos; es decir, ellos ven un polinomio que depende de un parámetro, pero se les facilitan valores del parámetro para los que deben realizar los estudios. Haciendo este ejercicio, se pone de manifiesto si entienden la diferencia entre el plano de parámetros y el plano dinámico, y cuándo deben utilizar cada uno de ellos, ya que en este caso solo deben usar los planos dinámicos. El segundo apartado es un estudio complejo completo, es decir, primero usando el plano de parámetros y después los planos dinámicos.

Como se puede observar en la Tabla 2, solo se han presentado 13 trabajos de 34 alumnos y, de ellos, solo han aprobado 6, por lo tanto, no llegan al 18 % de los alumnos. Se observa que existen grandes dificultades en la resolución del primer apartado, ya que es en este donde se demuestra el dominio real del tema. A continuación, pasamos a enumerar algunas de dichas dificultades:

- «No entiendo por qué debo usar el plano dinámico y no el plano de parámetros en el primer ejercicio, ya que existe un parámetro.»
- «Si pinto el plano dinámico, ¿qué pasa con el parámetro? ¿se queda fijo?»
- «No entiendo la diferencia entre ambos ejercicios. ¿No son iguales? En las dos hay un parámetro.»
- «¿Qué dibujo primero: el plano de parámetros o el dinámico?»
- «¿Por qué me da error al dibujar los planos de parámetros en el primer apartado?»
- «¿Con qué valor del parámetro debo dibujar el plano de parámetros?»
- «¿Debo aplicar el método de Newton también en el segundo apartado u otro método?»

Como puede observarse, de nuevo todas las dificultades están vinculadas con el hecho de no diferenciar entre el plano de parámetros y el plano dinámico, y no entender que primero deben dibujar el plano de parámetros y después, una vez dibujado, seleccionar los valores del parámetro que deben fijar para dibujar los planos dinámicos y encontrar las anomalías existentes para ese valor.

Como ya hemos visto, las dificultades que tienen están vinculadas con diferenciar qué tipo de herramienta gráfica deben utilizar y también con diferenciar el estudio dinámico de un método, de una familia y de una función en concreto. El problema existente en cada trabajo es no saber bien qué herramienta utilizar en cada caso, por ello, el objetivo del *software* que se va a diseñar en este estudio es ayudarles en este sentido.

5. Descripción del *software*

En las siguientes líneas se describe el contenido general de esta herramienta.

Contenido General:

La GUI «myfirst» (Gráfico 4), permite:

1. Introducir una función polinómica.
2. Escoger un método iterativo:

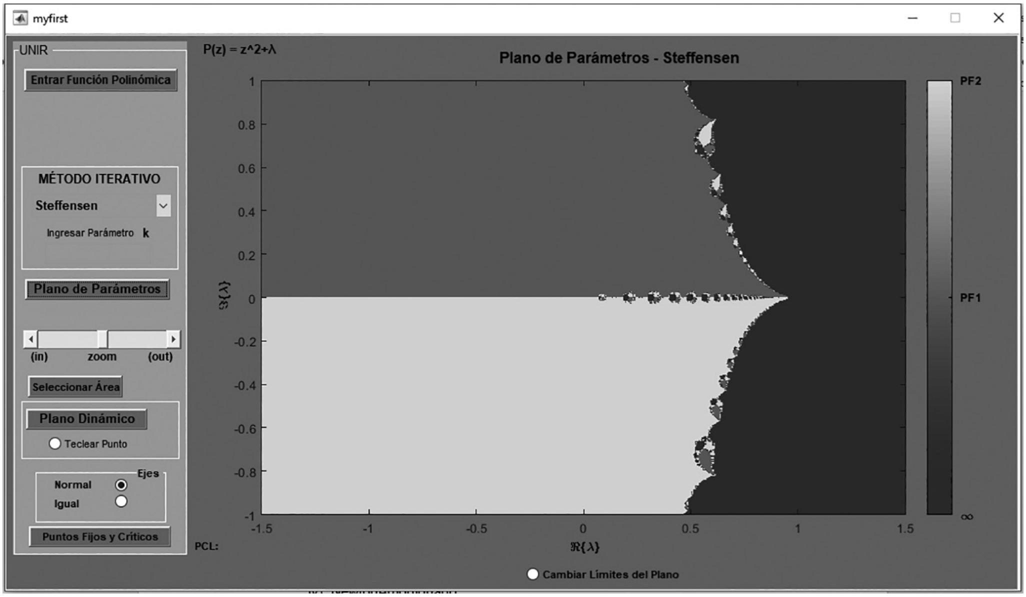
    i. Cordero-Torregrosa.
    ii. Steffensen.
    iii. Newton.
    iv Newton amortiguado.
    v. Chebyshev.
    vi. Chebyshev-Halley.
    vii. Halley.
    viii. Super-Halley.
    ix. Whittaker.
    x. Whittaker doble.

3. Dibujar el plano de parámetros (PP): esta opción llama la GUI «SelectFCP», con la cual se escoge un punto crítico libre (PCL), necesario para dibujar el PP. Una vez dibujado, es posible:

    i. Seleccionar una porción de área del gráfico y representarla en toda la pantalla.
    ii. Realizar acercamientos y alejamientos, tanto del PP inicial como del área seleccionada.

4. Llamar la GUI «DynamicTool», que dibuja el plano dinámico (PD). Puesto que el PD exige definir un valor del parámetro λ, este puede ser definido mediante teclado o ratón.
5. Personalizar los límites numéricos de los ejes coordenados del área del gráfico.
6. Visualizar la gráfica del PP con divisiones igualmente espaciadas para ambos ejes coordenados.
7. Conocer los puntos fijos (PF) y puntos críticos (PC), en función del parámetro λ, relacionados con la función polinómica escogida y el método iterativo seleccionado. Esta información se presenta mediante la GUI «FPandCP».

Gráfico 4. GUI «myfirst» en acción.



Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

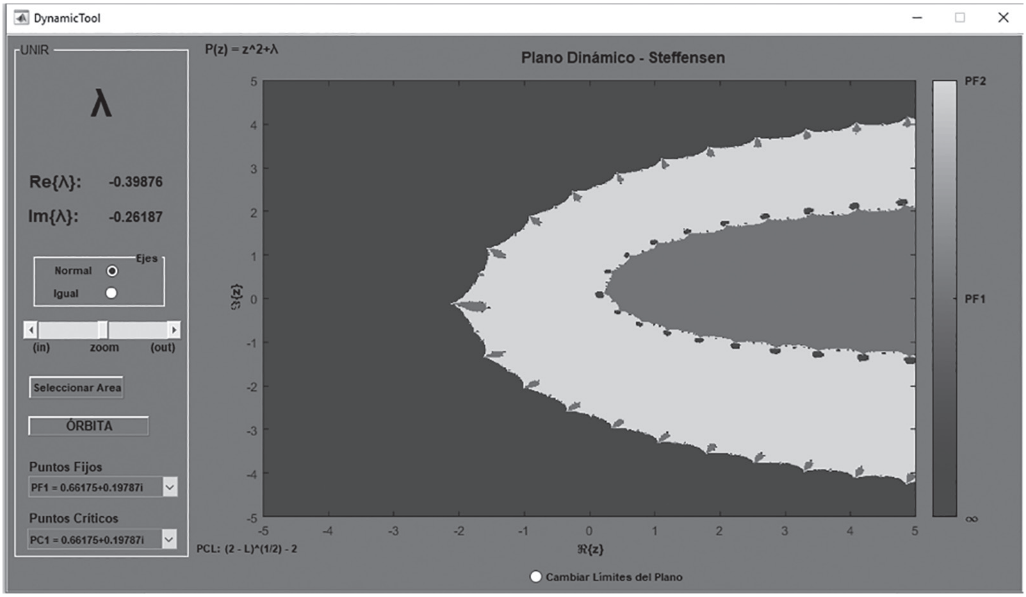
La GUI «DynamicTool» (Gráfico 5), permite en forma general:

1. Mostrar el PD. Una vez dibujado, es posible:

    a. Delimitar una porción de área del gráfico y representarla.
    b. Realizar acercamientos y alejamientos, tanto del PD inicial como del área seleccionada.

2. Presentar el parámetro λ, parte real y parte imaginaria, seleccionado en el PP.
3. Personalizar los límites numéricos de los ejes coordenados del área del gráfico.
4. Visualizar la gráfica del PD con divisiones igualmente espaciadas para ambos ejes coordenados.
5. Conocer los PF y PC, pero esta vez evaluados en el valor de λ.
6. Dibujar la órbita de un punto seleccionado sobre el plano. Dicha órbita se dibuja sobre el mismo PD.

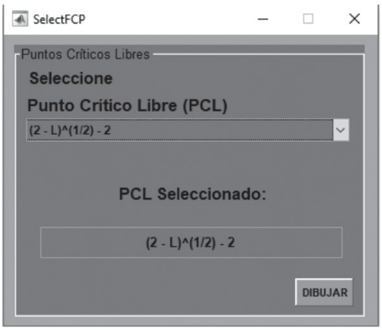
Gráfico 5. GUI «DynamicTool» en acción.



Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

La GUI, «SelctFCP» (Gráfico 6), fue diseñada para presentar y seleccionar los PCL que ha encontrado la función WhoPC. Al seleccionar un PCL, el *software* procede a dibujar el PP.

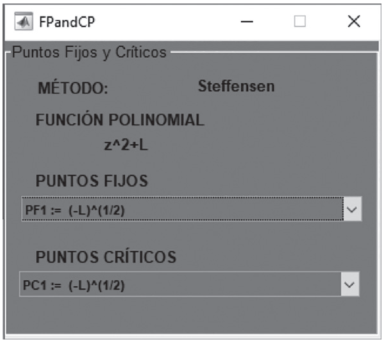
Gráfico 6. GUI «SelectFCP».



Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

Por último, La GUI, FPandCP (Gráfico 7) presenta los PF y los PC correspondientes a una función polinomial P(z) y un método iterativo. La información, tanto del método iterativo implementado como de la función P(z), aparece sobre esta GUI.

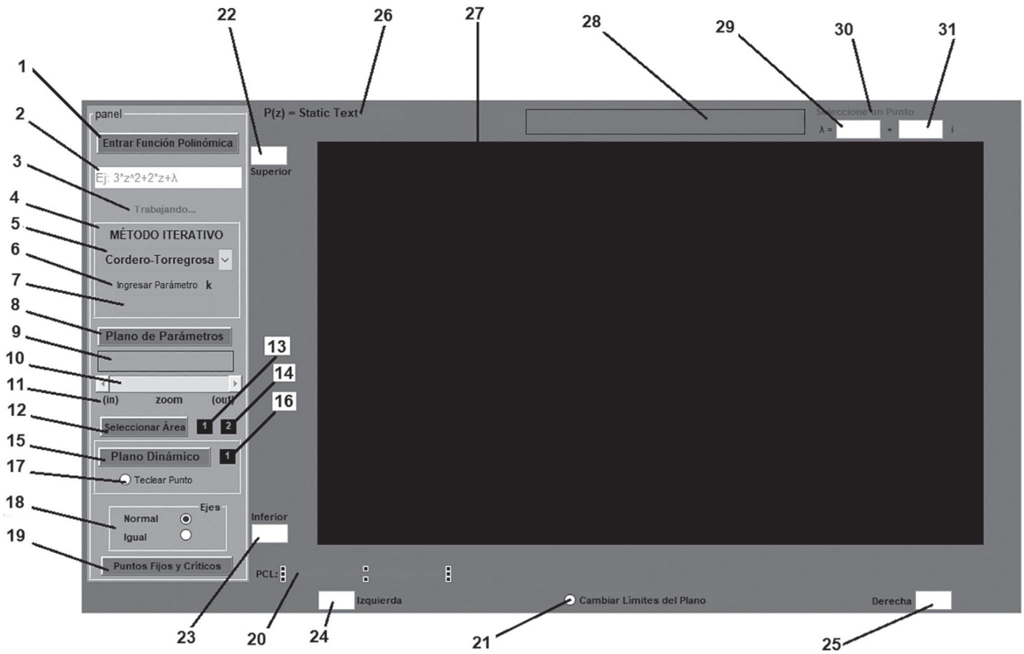
Gráfico 7. GUI «FPandCP».



Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

6. GUI «myfirst»

Gráfico 8. Elementos de la GUI «myfirst».



Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

revista española de pedagogía
año 77, nº 274, septiembre-diciembre 2019, 457-485
rep

A continuación, se describen algunos de los elementos que aparecen en la GUI «myfirst» (Gráfico 8).

– Botón Entrar Función Polinómica:

Activa la ventana de texto, ítem número 2 del Gráfico 8, lugar donde se introduce la función polinómica.

– Ventana de texto para introducir la función Polinómica:

Esta ventana se activa al pulsar el botón «Entrar Función Polinómica» (1. en el Gráfico 8). Una vez activa, un texto se presenta sobre ella. En este caso, se ha utilizado «3*z^2+2*z+λ» como ejemplo (2. en el Gráfico 8). Esta es la forma en que se debe introducir la función polinómica que aparece en la ecuación (3):

$$3z^2 + 2z + \lambda\,, \tag{3}$$

Lo cual implica que, a la hora de introducir la función, se deben especificar las operaciones aritméticas de multiplicación y potenciación mediante los símbolos * y ^ respectivamente.

El grado del polinomio puede ser cualquiera, pero se debe tener en cuenta que cuánto mayor sea, mayor será también el coste computacional en tiempo. Para una función polinómica de grado 3 y de dos términos, a través del método iterativo Cordero-Torregrosa, puede requerir varios minutos encontrar los PF y los PC, así como dibujar el PP y el PD.

El parámetro λ puede ser introducido en la función las veces que sean necesarias, en cualquiera de los términos del polinomio. Pero, al igual que en la función polinómica, las operaciones de multiplicación y potenciación deben ser especificadas mediante * y ^.

Es importante tener en cuenta que el *software* no lee explícitamente el carácter λ. Al introducirlo en la función polinómica, debe ser cambiado por la letra mayúscula *L,* como se observa en la ecuación (5), para escribir la ecuación (4). En caso de ser introducido por equivocación, MATLAB envía un mensaje de error por consola y no se calcula el PP. Por lo tanto, la función polinómica debe ser introducida de nuevo mediante el botón «Entrar Función Polinómica».

Si la función polinómica que quisiéramos introducir fuera, por ejemplo:

$$4\lambda^2 z^3 - 2\lambda z^2 - 3\lambda^3 + \lambda \tag{4}$$

Esta podría ser introducida como:

$$4 * L\hat{}2 * z\hat{}3 - 2 * L * z\hat{}2 - 3 * L\hat{}3 + L \tag{5}$$

introduciendo espacios en blanco con la barra espaciadora, antes y/o después de cada operador aritmético de suma y resta. El número de espacios en blanco puede ser cualquiera.

Es posible, también, ingresar una función polinómica de la forma que se ha señalado arriba, libre del parámetro λ. Pero, para esta función, como es obvio, no se calcula el PP y, de hecho, el programa no permite que se presione el botón para calcularlo. El *software* informa al usuario, con parpadeos en color rojo sobre el botón Plano Dinámico (número 15 en el Gráfico 8), de que debe ser pulsado para calcular y representar el PD.

7. Propuesta de implantación

Se ha diseñado la asignatura de tal forma que, las primeras semanas, se comienza con la explicación teórica de los conceptos fundamentales, sin la cual sería inviable asimilar los contenidos y adquirir las competencias atribuidas a ella. Después, se continua con una serie de actividades que exigen cierto grado de interactividad por parte de los estudiantes en su proceso de formación. Es decir, la asignatura comienza con contenidos teóricos y continúa con una breve introducción de los comandos elementales del *software* diseñado, debidamente ilustrados y con numerosos ejemplos, para facilitar el aprendizaje de la herramienta; se sigue con ejercicios sencillos para que los alumnos puedan asimilar rápidamente la utilidad de la herramienta y que no suponga una carga de trabajo extraordinaria por su parte. En una segunda etapa, se abordan contenidos teóricos avanzados y se plantean problemas, en orden creciente de dificultad, que el estudiante debe resolver con la ayuda de la herramienta creada para tal fin.

Logramos afianzar así los conocimientos genéricos ya adquiridos, del mismo modo que conseguimos que los estudiantes descubran nuevos comandos o instrucciones de la herramienta, diseñados para tareas más específicas. La interrelación entre teoría y práctica permite al alumno consolidar las nociones más abstractas y desarrollar su capacidad de resolver problemas de forma autónoma. Para finalizar, se formulan problemas similares a los que los estudiantes deben enfrentarse en el examen final, con el mismo índice de dificultad que les será exigido.

A medida que los estudiantes hagan uso de la herramienta, la potencia gráfica y el gran componente visual de este *software* estimulará su curiosidad e interés por el programa y, por tanto, su utilización, lo cual facilitará que los usuarios puedan adquirir los conocimientos suficientes como para realizar las entregas de las actividades planificadas.

8. Resultados

En la Tabla 3 pueden verse las estadísticas relacionadas con los resultados obtenidos por los alumnos del segundo grupo después de aplicar los cambios que se han comentado en la sección anterior. Para este estudio hemos seleccionado un total de 50 alumnos de la asignatura Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos del Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación impartido en la Universidad Internacional de La Rioja. Estos alumnos se corresponden con la tercera promoción que ha accedido a dicha asignatura y es la primera vez que se enfrentan al estudio dinámico de métodos y familias de métodos iterativos. En este sentido, nos hemos centrado en una medición cuantitativa teniendo en cuenta sus resultados en los trabajos entregados.

A nivel general, podemos ver que tanto los porcentajes de presentados como de aprobados, así como las notas medias, aumentan de manera sustancial. De todas formas, vamos a estudiar cada uno de los trabajos por separado, tomando en consideración dos opciones: la primera, descartando como datos los no presentados y, la segunda, considerando que los no presentados suponen un 0 en la nota, ya que, al contar con muchos trabajos sin presentar, se va a realizar la estadística incluyendo los no presentados (NP) y sin incluirlos.

TABLA 3. Estadísticos descriptivos de los trabajos del segundo grupo.

	Trabajo 1	Trabajo 2	Trabajo 3
NP	17	18	18
Suspensos	4	5	9
Aprobados	29	27	23
Total	50	50	50
Total sin NP	53	32	32
% presentados con NP	66 %	64 %	64 %
% aprobados con NP	58 %	54 %	46 %
% aprobados sin NP	87.88 %	84.38 %	71.88 %
Nota Media con NP	5.12	4.46	4.18
Nota Media sin NP	7.76	6.99	6.53

Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

8.1. Resultados Trabajo 1 sin NP

En esta sección, comenzamos viendo los estadísticos descriptivos que arroja el programa SPSS relacionados con el primer grupo, denotado por «PER1-2», que aparecen en los Gráficos 9, 10 y 11.

GRÁFICO 9. Descriptivos asociados al primer grupo.

Grupo = PER1-2

Estadísticos descriptivos[a]

	N	Rango	Mínimo	Máximo	Suma
	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico
Trabajo 1	17	10.0	.0	10.0	68.0
N válido (por lista)	17				

Estadísticos descriptivos[a]

	Media		Desviación estándar	Varianza	Asimetría
	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico
Trabajo 1	4.000	0.9777	4.0311	16.250	.324
N válido (por lista)					

Estadísticos descriptivos[a]

	Asimetría	Curtosis	
	Error estándar	Estadístico	Error estándar
Trabajo 1	.550	-1.614	1.063
N válido (por lista)			

a. Grupo = PER1-2

Fuente: Elaboración propia.

revista española de pedagogía
año 77, nº 274, septiembre-diciembre 2019, 457-485

Gráfico 10. Descriptivos asociados al primer grupo.

Grupo = PER1-2

Estadísticos[a]

Trabajo 1

N	Válido	17
	Perdidos	17

a. Grupo = PER1-2

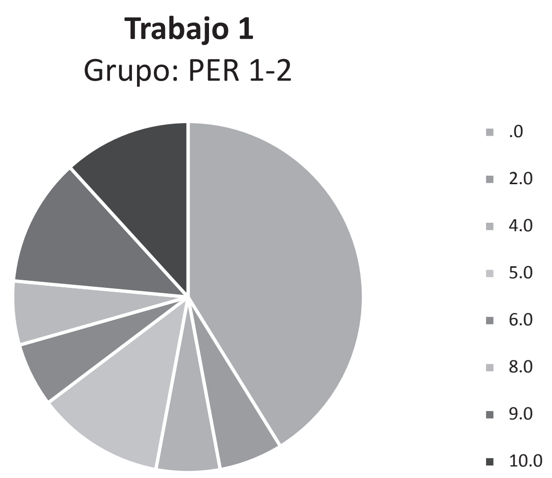
Trabajo 1[a]

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	.0	7	20.6	41.2	41.2
	2.0	1	2.9	5.9	47.1
	4.0	1	2.9	5.9	52.9
	5.0	2	5.9	11.8	64.7
	6.0	1	2.9	5.9	70.6
	8.0	1	2.9	5.9	76.5
	9.0	2	5.9	11.8	88.2
	10.0	2	5.9	11.8	100.0
	Total	17	50.0	100.0	
Perdidos	Sistema	17	50.0		
Total		34	100.0		

a. Grupo = PER1-2

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 11. Descriptivos asociados al primer grupo.



Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, los estadísticos descriptivos que arroja el programa SPSS relacionados con el segundo grupo, denotado por «PER3», que aparecen en los Gráficos 12, 13 y 14.

GRÁFICO 12. Descriptivos asociados al segundo grupo.

Grupo = PER3

Estadísticos descriptivos[a]

	N	Rango	Mínimo	Máximo	Suma
	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico
Trabajo 1	33	8.0	2.0	10.0	256.0
N válido (por lista)	33				

Estadísticos descriptivos[a]

	Media		Desviación estándar	Varianza	Asimetría
	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico
Trabajo 1	7.758	.3893	2.2365	5.002	-1.360
N válido (por lista)					

Estadísticos descriptivos[a]

	Asimetría	Curtosis	
	Error estándar	Estadístico	Error estándar
Trabajo 1	.409	1.023	0.798
N válido (por lista)			

a. Grupo = PER3

Fuente: Elaboración propia.

GRÁFICO 13. Descriptivos asociados al segundo grupo.

Frecuencia

Grupo = PER3

Estadísticos[a]

Trabajo 1

N	Válido	33
	Perdidos	17

a. Grupo = PER3

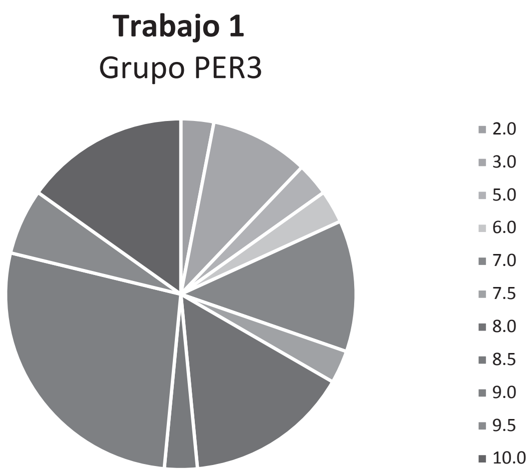
Trabajo 1[a]

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	2.0	1	2.0	3	3.0
	3.0	3	6.0	9.1	12.1
	5.0	1	2.0	3.0	15.2
	6.0	1	2.0	3	18.2
	7.0	4	8.0	12.1	30.3
	7.5	1	2.0	3,0	33.3
	8.0	5	10.0	15.2	48.5
	8.5	1	2.0	3	51.5
	9.0	9	18.0	27.3	78.8
	9.5	2	4.0	6.1	84.8
	10.0	5	10.0	15.2	100.0
	Total	33	66.0	100.0	
Perdidos	Sistema	17	34.0		
Total		50	100.0		

a. Grupo = PER3

Fuente: Elaboración propia.

GRÁFICO 14. Descriptivos asociados al segundo grupo.



Fuente: Elaboración propia.

Por último, queremos comprobar si las diferencias que vemos con las medias son significativas y, para ello, y teniendo en cuenta que el primer grupo solo dispone de 17 casos válidos, utilizaremos la prueba U de Mann-Withney que nos da SPSS.

Gráfico 15. Prueba U de Mann-Withney para la comparación de medias de notas obtenidas en el primer trabajo.

Prueba de Mann-Whitney

Rangos

Grupo		N	Rango promedio	Suma de rangos
Trabajo 1	PER3	33	30.24	998.00
	PER1-2	17	16.29	277.00
	Total	50		

Estadísticos de prueba[a]

	Trabajo 1
U de Mann-Whitney	124.000
W de Wilcoxon	277.000
Z	-3.223
Sig. Asintótica (bilateral)	0.001

a. Variable de agrupación: Grupo

Fuente: Elaboración propia.

El resultado puede verse en el Gráfico 15. De este se desprende que, en el segundo grupo, es decir, el que ha seguido el nuevo método, obtiene una nota media de 3.223 superior al grupo impartido con la primera metodología y, además, este resultado es significativo.

8.2. Resultados Trabajo 1 con NP

Teniendo en cuenta los trabajos con NP y realizando el mismo estudio estadístico, pero omitiendo los gráficos para mayor comodidad, los resultados que se obtienen respecto a las diferencias de las medias, usando la prueba *t* de Student, ya que ambos grupos tienen más de 30 observaciones, son los indicados en el Gráfico 16.

El resultado que se desprende es que, en el segundo grupo, es decir, el que ha seguido el nuevo método, obtiene una nota media de 3.120 superior al grupo impartido con la primera metodología y, además, este resultado es significativo.

Realizamos el mismo estudio con los trabajos 2 y 3, omitiendo aquí los gráficos para que sea más sencillo observar los resultados.

Gráfico 16. Prueba *t* de Student para la comparación de medias de notas obtenidas en el primer trabajo.

Prueba T

Estadísticas de grupo

Grupo		N	Media	Desviación estándar	Media de error estándar
Trabajo 1	PER3	50	5.120	4.1287	0.5839
	PER1-2	34	2.000	3.4641	0.5941

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene de calidad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias	
		F	Sig.	t	gl
Trabajo 1	Se asumen varianzas iguales	8.457	0.005	3.622	82
	No se asumen varianzas iguales			3.746	78.325

Prueba de muestras independientes

		Prueba t para la igualdad de medias		
		Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar
Trabajo 1	Se asumen varianzas iguales	0.001	3.1200	0.8614
	No se asumen varianzas iguales	0.000	3.1200	0.8330

Prueba de muestras independientes

		Prueba t para la igualdad de medias	
		95 % de intervalo de confianza de la diferencia	
		Inferior	Superior
Trabajo 1	Se asumen varianzas iguales	1.4065	4.8335
	No se asumen varianzas iguales	1.4618	4.7782

Fuente: Elaboración propia.

8.3. Resultados Trabajo 2 sin NP

El resultado que se desprende es que, en el segundo grupo, es decir, el que ha seguido el nuevo método, obtiene una nota media de 1.129 superior al grupo impartido con la primera metodología, sin embargo, este resultado no es significativo.

8.4. Resultados Trabajo 2 con NP

El resultado que se desprende es que, en el segundo grupo, es decir, el que ha seguido el nuevo método, obtiene una nota media de 1.9359 superior al grupo impartido con la primera metodología y, además, este resultado es significativo.

8.5. Resultados Trabajo 3 sin NP

El resultado que se desprende es que, en el segundo grupo, es decir, el que ha seguido el nuevo método, obtiene una nota media de 2.641 superior al grupo impartido con la primera metodología y, además, este resultado es significativo.

revista española de pedagogía
año 77, nº 274, septiembre-diciembre 2019, 457-485

8.6. Resultados Trabajo 3 con NP

El resultado que se desprende es que, en el segundo grupo, es decir, el que ha seguido el nuevo método, obtiene una nota media de 2.8565 superior al grupo impartido con la primera metodología y, además, este resultado es significativo.

Luego observamos que la media de las notas de cada uno de los tres trabajos en el grupo que ha hecho uso de la herramienta ha aumentado con respecto al grupo en el que no se impartió esta nueva metodología.

Tabla 4. Puntos de aumento de media por trabajo.

	Sin NP	Con NP
Trabajo 1	3.223	3.120
Trabajo 2	1.129	1.9359
Trabajo 3	2.641	2.8565

Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

9. Conclusiones

Tal y como comentan Ascheri y Pizarro (2006), el uso de *softwares* en cálculo numérico es de gran utilidad para los alumnos, ya que les permite interpretar métodos numéricos y adaptarlos a otras situaciones que podrían resultarles de utilidad en su futuro profesional, ya que les confieren la capacidad de afianzar sus conocimientos en programación. En este contexto, consideramos que el aprendizaje se vuelve mucho más dinámico y activo por parte del alumno, pues puede interactuar con el *software* a su propio ritmo de aprendizaje, a la par que obtiene una respuesta más inmediata.

Resulta evidente destacar que consideramos necesario que, para el correcto uso de este tipo de *softwares,* el alumno tiene que tener una formación previa de programación y, además ha de tener unos conocimientos previos de métodos numéricos. Del mismo modo, el rol de docente cambia al incluir este tipo de herramientas en el aula, ya que pasa de ser el trasmisor del conocimiento al mediador del proceso de aprendizaje de los alumnos, es decir, el guía que indica a los alumnos cómo han de seguir en el caso de no saber hacerlo. Resulta clave, por lo tanto, la formación del profesorado en el uso de este tipo de *software,* pues su papel en el proceso de aprendizaje de los alumnos se verá afectado por el dominio que tenga en el empleo de los mismos.

Del mismo modo, consideramos que la importancia del *software* reside no solo en que permita a los alumnos resolver actividades relacionadas con el cálculo numérico, sino también en que les sirva de utilidad para ser capaces de afrontar y comprender otras situaciones y conocer los errores que se van cometiendo y dónde.

Asimismo, creemos que es importante hacer especial hincapié en que los alumnos sean conscientes de que lo importante del uso de *software* para el cálculo numérico es que tengan siempre muy en cuenta cómo funciona este a medida que se acerca a la solución que se desea. Es decir, es importante que valoren la importancia de la gráfica que se obtiene de la función que se está analizando, así como del intervalo de análisis o las condiciones de convergencia, y no se centren solo en el resultado final del programa.

Al comienzo de este estudio se definió un objetivo principal: diseñar una metodología basada en la aplicación de una herramienta para tratar de paliar los problemas detectados y aplicarla a diferentes métodos iterativos.

Podemos concluir que este objetivo se ha visto realizado por la consecución de sus objetivos parciales.

Objetivo 1: diseñar y poner en marcha la modificación de la temporalización y la impartición de las clases en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos.

- Se ha realizado una modificación de la programación general anual en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos.
- Se ha modificado la temporalización de la asignatura.
- Se ha modificado la manera de impartirla.

Objetivo 2: diseñar una herramienta, que será desarrollada en lenguaje MATLAB, y aplicarla en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos.

- Se ha diseñado una herramienta.
- Se ha desarrollado en lenguaje MATLAB.
- Se han realizado pruebas con polinomios conocidos para valorar la herramienta.
- Se ha utilizado con un grupo de alumnos.

Objetivo 3: mejorar los resultados a nivel cuantitativo en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos utilizando la herramienta y la nueva forma de impartir la asignatura.

- En los tres trabajos tenidos en cuenta se han mejorado de forma significativa las medias de los estudiantes.
- En cinco de las seis mediciones los resultados son significativos.

En resumen, ¿se ha resuelto el problema del alto nivel de abstención en las entregas y se han mejorado los resultados obtenidos por los estudiantes?

Una vez verificada la hipótesis de partida, cumplidos los objetivos parciales y cumplido el objetivo principal, se puede responder a la pregunta de forma AFIRMATIVA.

Luego, tanto la metodología empleada como la herramienta utilizada han permitido validar la hipótesis de este artículo.

Referencias bibliográficas

Amat, S., Busquier, S., Legaz, M. J. y Ruiz, J. (2015). Unifying the classical approach with new technologies: An innovative proposal for teaching mathematics in engineering. *International Journal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence, 3* (4), 17-19.

Arís, N. y Orcos, L. (2015). ICTs and school education. *International Journal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence, 3* (4), 13-18.

Ascheri, M. E. y Pizarro, R. A. (2006). Uso de la Tecnología en la Enseñanza-Aprendizaje de temas de cálculo numérico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19,* 879-885.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10* (2), 135-150.

Behl, R., Amat, S., Magreñán, Á. A. y Motsa, S. S. (2018). An efficient optimal family of sixteenth order methods for nonlinear models. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 354,* 271-285.

Cordero, A., Magreñán, A., Quemada, C. y Torregrosa, J. R. (2016). Stability study of eighth-order iterative methods for solving nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 291,* 348-357.

De Faria, E. (2001). Generalización del teorema de Morgan. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 14,* 272-276.

Díaz Godino., J. (Director) (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Fernández, I., Riveros, V. y Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. *Omnia, 23* (1), 9-19.

Fisher, Y., McGuire, M., Voss, R. F., Barnsley, M. F., Devaney, R. L. y Mandelbrot, B. B. (2012). *The science of fractal images*. Berlín: Springer Science & Business Media.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 2,* 213-223.

Jiménez, D. A., Mediavilla, D. M., Portús, P. O. M., López, V. P. y Vicente, F. J. S. V. (2015). Maths: from distance to e-learning. *International Journal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence, 3* (4), 5-12

Magreñán, Á. A. (2013). *Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado* (Tesis doctoral). Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño.

Magreñán, Á. A., Argyros, I. K., Rainer, J. J. y Sicilia, J. A. (2018). Ball convergence of a sixth-order Newton-like method based on means under weak conditions. *Journal of Mathematical Chemistry, 56* (7), 2117-2131.

Mandelbrot, B. B. (1983). *The fractal geometry of nature (Vol. 173).* Nueva York: WH Freeman.

Martins, A., Fracchia, C. C., Allan, C. y Parra, S. (2010). *Simulación y Métodos numéricos en ciencias de la computación: uso de TICS*. XII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación, Universidad Nacional de San Juan, Argentina. Recuperado de http://hdl.handle.net/10915/19627 (Consultado el 01-12-2017).

Rodríguez-Vásquez, F. M. (2003). *Convergencia, recursividad y visualización. Tesis de Maestría no publicada* (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Rodríguez-Vásquez F. M. (2010). *Desarrollo Conceptual de los Métodos Iterativos en la Resolución de Ecuaciones No Lineales* (Tesis doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca.

Santos, L. M. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10* (2), 195-211.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22* (1), 1-36.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Biografía de los autores

Íñigo Sarría Martínez de Mendivil es Doctor por la Universidad Internacional de La Rioja, Licenciado en Matemáticas por la Universidad del País Vasco, Experto Universitario en Analítica de la Sociedad del Conocimiento por la Universidad Internacional de La Rioja y Certificado de Aptitud Pedagógica por la Universidad Complutense de Madrid. Director de Área de Ciencias de la Computación y Tecnología de la Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología en la Universidad Internacional de La Rioja y Coordinador del Máster en Ingeniería Matemática y Computación.

https://orcid.org/0000-0002-2584-9671

Rubén González Crespo es Doctor Ingeniero en Ingeniería Informática e Ingeniero en Ingeniería en Organización Industrial por la Universidad Pontificia de Salamanca. Máster en Dirección y Gestión de Proyectos y Máster en Ingeniería

Web por la misma universidad. Diplomado en Estudios Internacionales por la Sociedad de Estudios Internacionales. Director de Política y Planificación Académica y de la Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Internacional de La Rioja.

https://orcid.org/0000-0001-5541-6319

Ángel Alberto Magreñán Ruiz es Doctor (Cum Laude y premio extraordinario) en Matemáticas, Certificado de Aptitud Pedagógica, Licenciado en Matemáticas e Ingeniero Técnico en Informática de Gestión por la Universidad de La Rioja. En la actualidad es Profesor Contratado Interino en el Área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja.

https://orcid.org/0000-0002-6991-5706

Lara Orcos Palma es Doctora en Matemáticas por la Universidad Politécnica de Valencia. Licenciada en Química por la Universidad de La Rioja y en Bioquímica por la Universidad de Salamanca. Máster en Formación de Profesorado por la Universidad de la Rioja y Máster en Ciencia y Tecnología Química por la Universidad Nacional de Educación a Distancia. En la actualidad es adjunta a la coordinación académica de los Grados de Maestro en Educación Infantil y Primaria en la Facultad de Educación de la Universidad Internacional de La Rioja.

https://orcid.org/0000-0001-8138-551X

Alexander González-Castaño es Físico por la Universidad Nacional de Colombia y Máster en Ingeniería Matemática y Computación por la Universidad Internacional de La Rioja. En la actualidad es profesor de la Corporación Universitaria Minuto de Dios (UNIMINUTO).

https://orcid.org/0000-0003-0235-6812

revista española de pedagogía
año 77, nº 274, septiembre-diciembre 2019
Spanish Journal of Pedagogy
year 77, n. 274, September-December 2019

Sumario*

*Table of Contents***

Estudios
Studies

Notas
Notes

* Todos los artículos están también publicados en inglés en la página web de la revista: https://revistadepedagogia.org.
** *All the articles are also published in English on the web page of the journal: https://revistadepedagogia.org.*

Reseñas bibliográficas

Informaciones

Índice del año 2019

Instrucciones para los autores

ISSN: 0034-9461 (Impreso), 2174-0909 (Online)
https://revistadepedagogia.org/
Depósito legal: M. 6.020 - 1958
INDUSTRIA GRÁFICA ANZOS, S.L. Fuenlabrada - Madrid

A pedagogical tool based on the development of a computer application to improve learning in advanced mathematics*

Herramienta pedagógica basada en el desarrollo de una aplicación informática para la mejora del aprendizaje en matemática avanzada

Íñigo SARRÍA MARTÍNEZ DE MENDIVIL, PhD. Lecturer. Universidad Internacional de La Rioja *(inigo.sarria@unir.net).*
Rubén GONZÁLEZ CRESPO, PhD. Associate Professor. Universidad Internacional de La Rioja *(ruben.gonzalez@unir.net).*
Alexander GONZÁLEZ-CASTAÑO. Lecturer. Corporación Universitaria Minuto de Dios · UNIMINUTO (*algonzalez@uniminuto.edu*).
Ángel Alberto MAGREÑÁN RUIZ, PhD. Associate Professor. Universidad de La Rioja *(angel-alberto.magrenan@unirioja.es).*
Lara ORCOS PALMA, PhD. Lecturer. Universidad Internacional de La Rioja *(lara.orcos@unir.net).*

year 77, n. 274, September-December 2019, 457-485
revista española de pedagogía

Abstract:

Dynamic study of iterative methods has become more common in recent decades thanks to the development of computers, something that illustrates the importance of including these methods in curricula. There are several types of software whose didactic application in the classroom is very useful, but they have not been designed in response to students' difficulties related to learning of the dynamics

*Acknowledgements: This work was part funded by project SENECA 20928/PI/18 of the Science and Technology Agency of the Region of Murcia, project PGC2018-095896-B-C21 of the Spanish Ministry of Science and Technology, and by the "Internal Research, Development and Innovation Plan [2015–2017]" project, group: Mathematical modelling applied to engineering (MOMAIN) at the Universidad Internacional de La Rioja.

Revision accepted: 2019-01-10.
This is the English version of an article originally printed in Spanish in issue 274 of the **revista española de pedagogía**. For this reason, the abbreviation EV has been added to the page numbers. Please, cite this article as follows: Sarría Martínez De Mendivil, Í., González Crespo, R., González-Castaño, A., Magreñán Ruiz, Á. A. y Orcos Palma, L. (2019). Herramienta pedagógica basada en el desarrollo de una aplicación informática para la mejora del aprendizaje en matemática avanzada | *A pedagogical tool based on the development of a computer application to improve learning in advanced mathematics. Revista Española de Pedagogía,* 77 (274), 457-485. doi: https://doi.org/10.22550/REP77-3-2019-06
https://revistadepedagogia.org/ ISSN: 0034-9461 (Print), 2174-0909 (Online)

of iterative methods. It should also be noted that there is no software exclusively designed for teaching iterative methods, and this, along with the difficulties students encounter in this area, has caused many students problems with understanding fundamental concepts as it is a subject with a large visual component. Taking into account all the above factors, we have designed a software program to help students understand this subject and allow teachers to perform simulations in the classroom while preventing students from using the tool or the parametric plane or dynamic plane that is appropriate for the particular situation they face. This article considers the development of a methodological proposal in which the software we designed is used with a sample of students from the Discrete and Continuous Dynamic Systems module on the Master's degree in Mathematical Engineering and Computing at the Universidad Internacional de La Rioja, and their results are compared with another sample of students who did not have access to this mathematical tool. The result that emerges is that the group that followed the new methodology obtained much higher average score than the groups taught with the previous methodology.

Keywords: software, pedagogical tool, advanced mathematics, nonlinear equations, iterative methods, learning difficulties, higher education.

Resumen:

El estudio dinámico de los métodos iterativos ha aumentado en las últimas décadas debido al desarrollo de los ordenadores, aspecto por el cual se ha visto la necesidad de incluir la enseñanza de estos métodos en los planes de estudio. En la actualidad, hay varios tipos de *software* cuya aplicación didáctica en las aulas es de gran utilidad, pero no se han diseñado atendiendo a las dificultades que los alumnos presentan en relación al aprendizaje de la dinámica de los métodos iterativos. Cabe, asimismo, destacar que no existe un *software* diseñado en exclusiva para la enseñanza de métodos iterativos y este hecho, junto con las dificultades encontradas por los alumnos en esta temática, ha llevado a que muchos de ellos no entiendan los conceptos fundamentales, ya que se trata de una materia que tiene un alto componente visual. Teniendo en cuenta todos los factores anteriores, se ha diseñado un *software* que sirve para ayudar a los alumnos en la comprensión de esta materia, permite a los profesores realizar simulaciones en el aula y, a la vez, evita que los alumnos puedan utilizar la herramienta, el plano de parámetros o el plano dinámico que no corresponda en cada situación a la que se enfrenten. El presente artículo aborda el desarrollo de una propuesta metodológica en la que se emplea el *software* diseñado en una muestra de alumnos de la asignatura Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos del Máster en Ingeniería Matemática y Computación de la Universidad Internacional de La Rioja, y se comparan los resultados con otra muestra de alumnos que no han dispuesto de la herramienta. El resultado que se desprende es que el grupo que siguió la nueva metodología obtiene una nota media muy superior al grupo con el que se utilizó la metodología habitual.

Descriptores: *software,* herramienta pedagógica, matemática avanzada, ecuaciones no lineales, métodos iterativos, dificultades de aprendizaje, educación superior.

1. Introduction

In the mid-1980s a need developed in Spain to understand why students have problems acquiring competences and skills when learning mathematics, in line with an effort to move away from an educational style that only valued strictly cognitive aspects (Azcárate & Camacho, 2003). Focussing mainly on advanced mathematical thinking relating to university-level mathematical content so that we can develop teaching and learning methodologies that encourage meaningful learning among students, this research concentrates on the inclusion of defining, testing, and demonstration processes to enable the establishment of models for understanding students' cognitive processes.

Some of the problems observed relating to advanced mathematical thought relate to the role concepts can play in mathematical processes or objects themselves. For this reason, two ways of conceiving mathematical concepts are identified: operational and structural (Sfard, 1991). While the former considers concepts from a dynamic perspective as algorithms, the latter considers them from a static perspective as abstract objects.

Vinner (1991) notes that another area where students display problems acquiring advanced mathematical thinking is with definitions, as these create a conflict between the structural concepts mathematicians conceive and the cognitive processes students use when acquiring the concepts, as it is often thought that definitions of this type make it possible for students to be able to solve the problems. However, as Azcárate and Camacho note (2003), definitions play a very important role when students have to do their cognitive assignments in order to develop the conceptual schemes. For these reasons, it is necessary to educate students in the use of these definitions so they can develop the conceptual schemes, using appropriate didactic situations to do this.

As Rodríguez-Vásquez (2010) notes, regarding advanced mathematical thought, research mainly focusses on: studying the importance the cognitive processes involved in the learning of mathematics acquired as students progress to higher levels; on epistemological study of the fundamental concepts of analysis; and on the role of technological tools in learning these concepts.

Regarding the construction of mathematical concepts, from the constructivist perspective, students have to interact with all possible representations of the object of study. In this respect, from the epistemological perspective, visualisation is vital for learning mathematics as it is based on a technique that allows students to generate ideas to achieve their goal of learning the concepts, and so it should not just be considered from its sense of "seeing or observing". Vásquez (2003) proposes a classification of visualisation based on what it means in relation to the acquisition of advanced mathematical thought. In it she considers:

– Visualisation as a medium acting as a link between intuition and reasoning.

– Visualisation as the ability to articulate different representations of an object to derive mental images of it and so give it meaning.

– Visualisation as the action a human being carries out to connect different representations of the object.

– Visualisation as the mental process that helps us represent, transform, etc., visual information.

In this context, technological tools are of great use for students learning concepts on the basis of visualisation so long as they are used appropriately, always as a teaching medium that favours meaningful learning based on innovative methodologies, and they are not seen as an end in themselves, mere technical devices used in the classroom.

As Martins, Fracchia, Allan, and Parra note (2010), the use of new technologies in the classroom requires us to address the design of new learning activities so that students develop capacities that enable them to face the situations that arise in society. For this reason, the development of scenarios that favour information processing and modelling is crucial.

Studies such as the one by De Faria (2001) have concluded that technological devices applied to the teaching of mathematics are a factor that determines the scope and the potential limitation there may be when covering a mathematical concept. Computer programs provide visual images that evoke mathematical notions and facilitate organisation, data analysis, graphic representation, and calculation efficiently and precisely (Godino, 2004). This develops analysis, abstraction, and development of logical thinking capacities in students.

Use of software is now very common, in particular CAS (Computer Algebra Systems), which are of great use in the classroom as they enable students to explore mathematical concepts and also foster decision making in the monitoring of the strategies the students develop to solve problems relating to these concepts.

We could, therefore, say that technological tools help with the process of visualisation and with connecting content and meanings. This aspect is crucial, as Santos notes (2003), as it permits students to establish connections between mathematical concepts and other areas, and not just with other mathematical concepts. Santos also observes (2003) that the use of dynamic software in class creates significant didactic opportunities for students, enabling them to explore mathematical concepts by interacting with constructions.

However, other pedagogical models must be established with the student as the centre of the learning activity (Fernández, 2017).

Modelling and simulation of systems are very well suited as they allow for the creation of virtual environments that imitate the behaviour of any type of system. There are currently various types of software whose didactic application in the classroom is of great use. Using this software is of great value for students as it enables them to interpret numerical methods and adapt them to other situations that might be of use to them in their future professional life as the software gives them the ability to reinforce their programming knowledge (Ascheri & Pizarro, 2006). Accordingly, teachers play a very important role as they have to encourage students to see technology as a tool they can use to expand their cognitive skills, something which also involves using it reflexively (Hitt, 2003).

These software packages include: SAGE (used in algebra, calculus, group theory, cryptography, etc.), Genius (this permits work on many concepts and its language is designed to resemble normal mathematical syntax), and Scilab (for mathematical simulations, 2D and 3D visualisations, optimisation, designing control systems, signal processing, etc.).

Many practical situations involve using numerical methods to solve nonlinear equations (Amat, Busquier, & Legaz, 2015; Arís & Orcos, 2015; Jiménez, Mediavilla, Portús, López, & San Vicente, 2015). Consequently, this research relates to the concept of non-linear equations and the use of iterative methods to solve them.

Iterative methods were developed by the Greeks, Babylonians, and Arabs, but it was not until the 17th century that they were developed in Europe. Major thinkers from this period such as Leonardo da Vinci, Galileo, Descartes, Newton, and Leibniz took an interest in studying differential equations, a term coined by Leibniz, for which they believed the development of new methods was needed.

The reason for this study is that university students have displayed cognitive difficulties relating to this concept, which is very important to have a firm command of for applied mathematics and in engineering, since the great majority of the problems the students will encounter can be solved numerically through iterative processes.

Based on the above, our main objective is: To design a methodology based around using a tool to try to mitigate the problems detected and use it with different groups of students. This main objective can be divided into three further objectives:

Objective 1: to design and implement modified timing and delivery of classes in the Continuous and Discrete Dynamical Systems module.

Objective 2: to design a tool, which will be developed in the MATLAB language, and use it in the Continuous and Discrete Dynamical Systems module.

Objective 3: to improve results at a quantitative level in the Continuous and Discrete Dynamical Systems module using this tool and the new way of delivering the module.

Another end objective is to answer the question: has the problem of the high level of failure to submit work been solved and have students' results improved?

2. Basic concepts of iterative methods

There are many different branches of applied mathematics, but one of the most widely studied is the one that involves finding solutions to non-linear equations or system of equations. Iterative methods appear in this context as these methods start from an initial point and under certain conditions generate a sequence that will converge on the solution sought.

Based on the use of iterative methods for solving nonlinear equations, the deflation method can be used to find all of the roots of a polynomial by using synthetic division from Horner's method. In the specific case of nonlinear equations, the Newton, secant, Raphson, and Müller methods only enable us to obtain one root at a time.

Interestingly, it is clear that the deflation-based method can be used for any type of function, regardless of whether or not it is a polynomial function, making it possible to find all of the roots of nonlinear equations. One problem that appears in the process is determining multiple roots, as well as indeterminacies or when the functions display discontinuities. Even though this reasoning is trivial, we have not found this case mentioned in the literature review. In this regard, several authors have already written about the potential of applying this concept, but they did not examine its practical implementation in-depth. This implementation is insisted on in the case that concerns us and students have been taught how the algorithm works, as well as all of the hypotheses that must be fulfilled to be able to put it into practice. In fact, one of this module's assignments is to develop effective algorithms that work for finding solutions to nonlinear equations.

There are many well-known iterative methods, for example:

- Newton's method

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Halley's method

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2 * f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

- Chebyshev's method

$$x_{n+1} = x_n + \left(1 - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2 * f'(x_n)^2}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

As we can see, these iterative methods bear the names of their discoverers. In recent decades researchers' efforts in this field have focussed on designing new methods with different characteristics (high orders of convergence, free from derivatives, etc.) and on smoothing the conditions that guarantee the convergence of the series created with the solution sought.

Furthermore, in recent years, thanks to the arrival of computers, the dynamic behaviour of these iterative methods has started to be studied, as by studying this behaviour, we can discover first-hand what happens when we apply it to different functions of which we wish to calculate the roots.

If we focus on Newton's method, given its relevance and its good characteristics, it is worth noting that study of the dynamic of this method in the complex plane is of historical importance given that first E. Schöder in 1870 and, nine years later A. Cayley proposed using this method to solve equations defined in the complex plane.

One of the most famous problems in this sense is the one known as *Cayley's problem* which involves studying basins of attraction (in other words, the points that converge on the solution when using the iterative method) for each of the roots of the complex polynomial to which we apply Newton's method (see Magreñán, 2013 for more information about the problem). Initially, for polynomials of the form

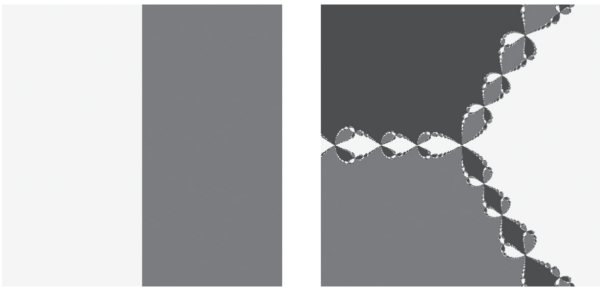
$$p(z) = z^2 - a, \tag{1}$$

where a is any complex number, the problem is simple, as the basins of attraction correspond to each of the half-planes separated by the bisector of the segment that combines both roots. However, when moving on to polynomials of the form

$$p(z) = z^3 - a, \tag{2}$$

it was found that it could not be solved. Nowadays, with the help of powerful computers, we can understand why it was not possible to do this. Graph 1 shows the difference between the characterisation of each area for polynomials of degree 2 and 3.

Graph 1. Characterisation of the basins of attraction associated with Newton's method applied to the polynomial (1) (left) and (2) (right).



Source: Magreñán Ruiz, 2013.

It is easy to see how on the right, without the presence of computers, it would be impossible to characterise each area, especially knowing that their behaviour is fractal. In 1977, the famous mathematician Benoit Mandelbrot presented numerous applications of this type of structure in nature in his book *The fractal nature of geometry* (Mandelbrot, 1983). Subsequently, in 2012 (Fisher, McGuire, Voss, Barnsley,

& Devaney, 2012), summed up his intuitive definition of what the term fractal set means to him — a set in which the parts are similar to the total, in some way — and provided applications for the study of fractal images. Colloquially, we understand that an object is fractal if it fulfils any of the following conditions (we have omitted the most technical ones):

- It has detail at all scales.
- It is self-similar.

If we were to zoom in on the intersections that are produced on the right hand side of Graph 1, we would see how the same structures effectively reoccur, which is why without a computer it is impossible to characterise the basins of attraction of a cubic polynomial.

Furthermore, mathematicians are focussing their efforts on designing families of iterative methods, which depend on one or more parameters, as these families will make it possible to have an infinity of new iterative methods or even observe the behaviour of various methods at the same time. Some of the best-known uniparametric families are:

- Damped Newton method

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Chebyshev–Halley family

$$x_{n+1} = x_n - \frac{L_f(x_n)}{2 * \left(1 - \alpha\, L_f(x_n)\right)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

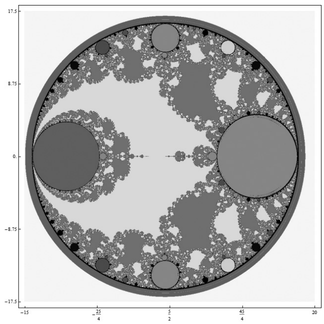
Clearly Newton's method is encompassed within the damped Newton method if $\lambda = 1$ and the Chebyshev-Halley family encompasses Halley ($\alpha = ½$), Chebyshev ($\alpha = 0$) and Newton Halley ($\alpha = \pm\infty$).

Moving on to the dynamical study of this type of families, the first thing we must do is study the parameter planes (see Graph 2) to determine which values of the parameter display dynamical behaviour that interests us and which ones do not, so that we can obtain more detailed information about each of the concepts involved (Cordero, Magreñán, Quemada, & Torregrosa 2016; Behl, Amat, Magreñán, & Motsa, 2018; Magreñán, Argyros, Rainer, & Sicilia, 2018).

When working on uniparametric families, the parameter plane is an essential tool. This graphic representation directly relates each point on the complex plane to the corresponding value of the parameter that characterises each member of the family. Given a free critical point from the method, the parameter plane indicates the fixed point attractor on which the orbit of the critical point will converge. To do so, prior analysis of the fixed points and critical points of the system is needed. A free critical point is a point where the derivative is equal to zero but this point is not a solution to the equation. Analysing the behaviour of free critical points gives rise to the parameter plane.

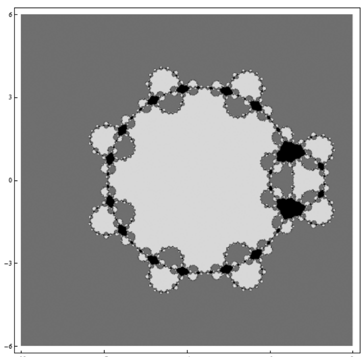
Once the values of the parameter for which anomalies exist have been detected, we draw the basins of attraction (the drawing of them is also known as the dynamical plane) to corroborate these anomalies and characterise them. The basin of attraction of a fixed point is the connected component containing the fixed point. In other words, the basin of attraction of a fixed point is the set of points of the plane whose iterations converge towards the fixed point. Then, all we have to do to calculate the dynamical plane is plot the final status of the orbit of each point, characterised with colours, when iterating it using the method. Of course, the ideal situation is that we find a parameter plane without anomalies, as in this case we would have a family of iterative methods that behaves, in terms of convergence, perfectly for each member.

Graph 2. Parameter plane with different anomalies (all of the different colours). Multipass fifth-order second derivative free method applied to a quadratic polynomial with two different roots.



Source: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

Graph 3. Basins of attraction associated with the value for the parameter ($\alpha = 2.5$) in which we have detected anomalies.



Source: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

3. Main difficulties with iterative methods found among the students in the sample for this study

For this study we selected a total of 34 students from the Continuous and Discrete Dynamical Systems module on the University Master's in Mathematical and Computational Engineering at the Universidad Internacional de La Rioja. These students are from the first two cohorts to take this module and it is the first time that they have encountered the dynamic study of iterative methods and families of iterative methods. Accordingly, we performed quantitative and qualitative research, including personal interviews with the students and taking into account their results in the assignments they submit. Table 1 shows the percentage of students who submitted the assignments relating to the dynamic study of iterative methods. Another 10 students did not present any of the assignments and so we have omitted this information from the table to make it clearer.

At a general level, we can say that the students show difficulties distinguishing which type of graph, dynamical plane or parameter plane to use. The dynamical planes are obtained by applying simple methods, while the parametric methods require the value of the parameter to be fixed by using the parameter plane so that, once the value has been fixed, the dynamical plane can be drawn. So, when it is necessary to work with families of parametric methods, it is first necessary to go to the parameter plane to see which values are "good" for the parameter in terms of convergence and once the parameter has been selected, the dynamical plane is drawn to check that the method functions correctly.

The confusion between parameter planes and dynamical planes results in students being unable to continue to study the family of methods and so it is necessary to use alternative methods that enable students to reduce this confusion and learn these mathematical concepts meaningfully. This study is based on the application of a piece of software that makes it possible to obtain the corresponding plane based on the function being studied, whether it is parametric or dynamic. Consequently, a parameter plane can never be obtained by applying a dynamic method and vice versa. This entails the students understanding the basis of the iterative methods and knowing how to apply them, as they play an active part in their learning process based on independent work with the software and they learn at their own pace and independently, at all times understanding the applicability of iterative methods.

TABLE 1. Academic results from assignments relating to dynamic study.

Student	Task 1	Task 2	Task 3
1	DNS	9.5	5
2	9	DNS	DNS
3	0	DNS	DNS
4	0	8	7
5	0	DNS	DNS

6	DNS	5	DNS
7	0	8.5	3
9	6	10	DNS
12	9	9	DNS
13	2	8	10
15	10	DNS	DNS
16	5	0	0
17	8	0	0
18	DNS	0	0
20	5	9.5	7
21	DNS	8	8
22	DNS	5	DNS
23	0	DNS	DNS
24	4	6	DNS
25	0	DNS	DNS
26	10	0	0
28	DNS	0	0
29	DNS	DNS	5
32	0	0	0

Source: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

As Table 1 shows, the number of students who did not submit the assignments (DNS, Did Not Submit) is very high, suggesting that they do not understand the foundations of the iterative methods and do not know how to apply them. Indeed, a third of the students did not submit either piece of work.

Summarising this data, we find that the total percentage of assignments submitted is 50% for the first two assignments and just 38.24% for the third one, and so it is clear that there are problems linked to the content.

Table 2. Descriptive statistics for the assignments linked to dynamic study.

	Task 1	Task 2	Task 3
DNS	17	17	21
Fail	9	6	7
Pass	8	11	6
Total	34	34	34
Total DNS	17	17	13
% students who took assessment with at least one DNS	50%	50%	61.76%
% passed inc. DNS	23.53%	32.35%	17.65%
% passed exc. DNS	47.06%	64.71%	46.15%
Mean Mark inc. DNS	2.00	2.54	1.32
Mean Mark exc. DNS	4.00	5.09	3.46

Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

As Table 2 shows, the percentage of pass marks is greater for the second assignment, while the percentage of pieces submitted is lower for the third assignment. On the other hand, we can see that the mean mark for the first and third assignments is below 5 out of 10, making it clear that the difficulties they present to the students are significant and should be taken into account, while for the second assignment, the mean mark barely passes 5, and so the problems are also clear. The following section provides a detailed description of the assignments in which these problems have become apparent.

4. Description of the tasks

We will now describe the assignments where we detected problems and where the students have the difficulties that have underpinned this study and the launch of the software.

In the first assignment, the primary objective is for the students to compare the complex dynamic of an iterative method compared with Newton's method and they are provided with guidelines for this comparison, when applying it to a generic polynomial of degree 2 with 1 parameter. The principal difficulties for the students were problems when analytically calculating the fixed points and their dynamic, the free critical points and, above all, problems with the graphs.

As Table 2 shows, the 34 students only submitted 17 pieces of work and of these only 9 passed — in others words, just over 25% of the students — and so it is clear that they have major difficulties in solving the exercises. In fact, to begin with, the deadline was extended and they were allowed to resubmit works as they were displaying serious difficulties in completing them. We will now list some of these difficulties:

- "What value do I give the parameter?"
- "How do I calculate the fixed points if there is one parameter?"
- "Why doesn't it ask us to calculate the parameter planes?"
- "What does basin of attraction mean?"

As we can see, all of these difficulties relate to the fact they have a polynomial with one parameter and they do not know how to approach it.

In the second assignment, the fundamental objective is for them to compare the complex dynamic of an iterative method which depends on one parameter, and so, as we saw above, they must first study the parameter planes to determine the values for which the method does and does not display convergence problems, so that they can then go on to study the dynamical planes and detect these problems where applicable.

As Table 2 shows, the 34 students only submitted 17 pieces of work, and of them only 11 passed, in others words, under 33% of the students, and so it is clear that there they have major difficulties in solving the same exercises. We will now list some of these difficulties:

- "I don't understand when I should use the dynamical plane and when I should use the parameter plane."
- "Isn't the parameter plane the same as the dynamical plane?"
- "What values for the parameter should I use in the dynamical planes?"
- "What do I draw first? The parameter plane or the dynamical one?"
- "Why doesn't the software draw the dynamical planes properly and the drawing comes out black for me?"
- "What value of the parameter should I draw the parameter plane with?"
- "How do I know if something is periodical?"
- "Does the tolerance affect anything?"

As we can see, these difficulties are all connected to the fact that they do not differentiate between the parameter plane and the dynamical plane and do not understand that they must first draw the parameter plane and then, once it has been drawn, select the values for the parameter they have to fix to draw the dynamical planes and find the existing anomalies for that value. Another of the difficulties the students reported was not understanding what they need to require to obtain periodical behaviour and be able to guarantee that something is convergent or divergent.

Consequently, we find problems in every one of the exercises in this assignment in particular, despite it being the one with the best mean grade.

In the third assignment, the fundamental objective is, first, to calculate the dynamical planes of some specific polynomials, in other words, the students see a polynomial which depends on one parameter, but they are provided with values for the parameter for which they must perform the studies. Doing this exercise reveals whether they understand the difference between the parameter plane and the dynamical plane and when they should use each of them, as in this case they should only use dynamical planes. The second section is a complete complex study, in other words, first using the parameter plane and then the dynamical planes.

As Table 2 shows, only 13 of the 34 students submitted the assignment and, of them, only 6 passed, which is under 18% of the students. We observed major difficulties with solving the first section, as this is where they really show their command of the subject. We will now list some of these difficulties:

- "I don't understand why I have to use the dynamical plane and not the parameter plane in the first exercise as there is one parameter."
- "If I draw the dynamical plane, what happens to the parameter? Does it stay fixed?"

- "I don't understand the difference between the two exercises. Aren't they the same? There's one parameter in both."
- "What do I draw first? The parameter plane or the dynamical one?"
- "Why do I get an error when I draw the parameter planes in the first section?"
- "What value of the parameter should I draw the parameter plane with?"
- "Should I use Newton's method in the second section too, or a different method?"

As we can see, again all the difficulties are linked to the fact they do not know how to differentiate between the parameter plane and the dynamical plane, and do not understand that they must first draw the parameter plane and then, once they have drawn it, select the values for the parameter that they have to fix to draw the dynamical planes and find any anomalies for that value.

As we have already seen, the difficulties they have are linked to establishing what type of graphic tool they should use and also to differentiate the dynamical study of a method, of a family, and of a specific function. The problem present in each assignment is not knowing which tool to use in each case, and so the objective of the software that will be designed in this study is to help them with this.

5. Description of the software

The general content of this tool is described below.

General Content:

The "myfirst" GUI (Graph 4), makes it possible:

1. To introduce a polynomial function.
2. To choose an iterative method:
    i. Cordero–Torregrosa.
    ii. Steffensen.
    iii. Newton.
    iv. Damped Newton.
    v. Chebyshev.
    vi. Chebyshev–Halley.
    vii. Halley.
    viii. Super-Halley.
    ix. Whittaker.
    x. Double Whittaker.
3. Draw the parameter plane (PP): this option summons the "SelectFCP" GUI, with which a free critical point (FCP) is selected, which is necessary for drawing the PP. Once drawn, it is possible to:

i. Select part of the area of the figure and show it on the whole screen.

ii. Zoom in and out, both from the initial PP and from the selected area.

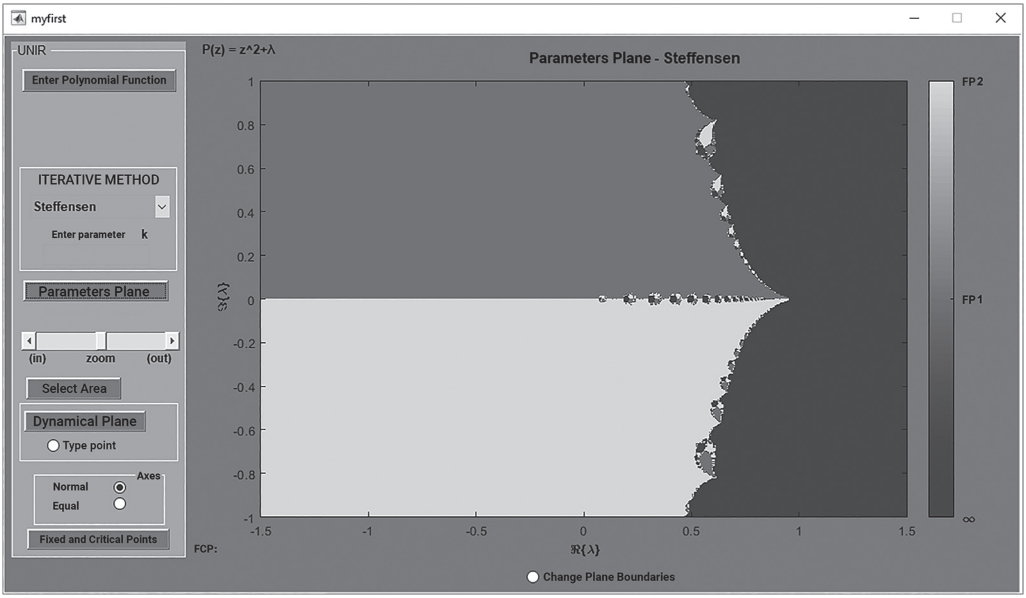
4. Summon the "DynamicTool" GUI which draws the dynamical plane (DP). As the DP requires a value to be defined for the parameter λ, this can be defined using the keyboard or the mouse.

5. Personalise the numerical limits of the coordinate axes of the area of the graphic.

6. View the graphic of the PP with equally-spaced divisions for both coordinate axes.

7. Discover the fixed points (FP) and critical points (CP), depending on the parameter λ, relating to the polynomial function chosen and the iterative method selected. This information is presented through the "FPandCP" GUI.

GRAPH 4. "Myfirst" GUI in action.



Source: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

The "DynamicTool" GUI (Graph 5) in general allows:

1. Show the DP. Once drawn, it is possible to:

a. Define part of the area of the graphic and show it.

b. Zoom in in and out, both with the initial DP and the selected area.

2. lPresent the parameter λ, real part, and imaginary part by selecting in the PP.

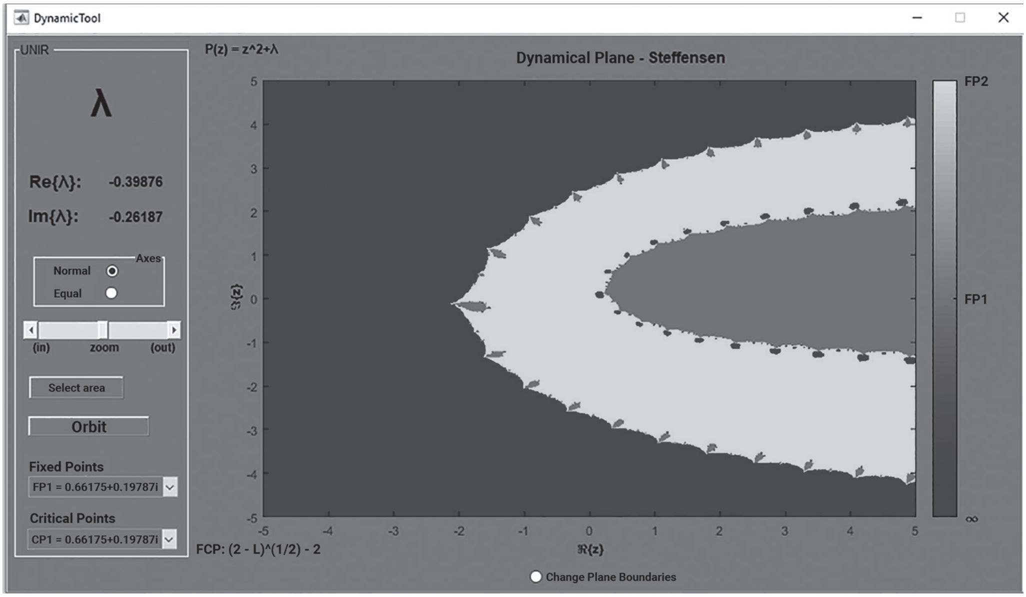
3. Personalise the numerical limits of the coordinate axes of the area of the graphic.

4. View the graphic of the DP with equally spaced division on both coordinate axes.

5. Discover the FP and the CP, but this time evaluated in the value of λ.

6. Draw the orbit of a selected point on the plane. This orbit is drawn on the same DP.

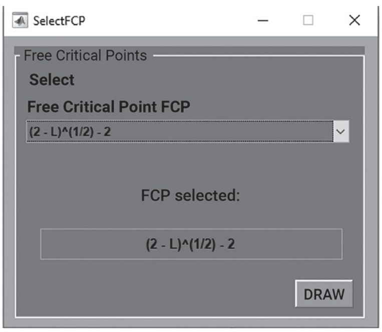
Graph 5. "DynamicTool" GUI in action.



Source: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

The "SelectFCP" GUI (Graph 6) was designed to present and select the FCP that the WhoPC function has found. When a FCP is selected, the software draws the PP.

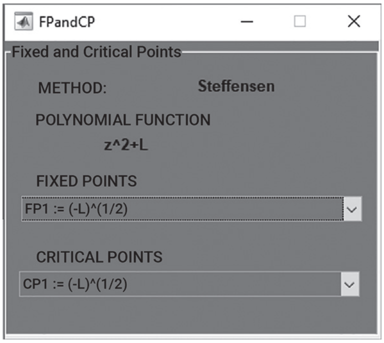
Graph 6. "SelectFCP" GUI.



Source: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

Finally, the "FPandCP" GUI (Graph 7) presents the FP and CP corresponding to a polynomial function *P(z),* and an iterative method. The information about the iterative method used and the function *P(z)* appears on this GUI.

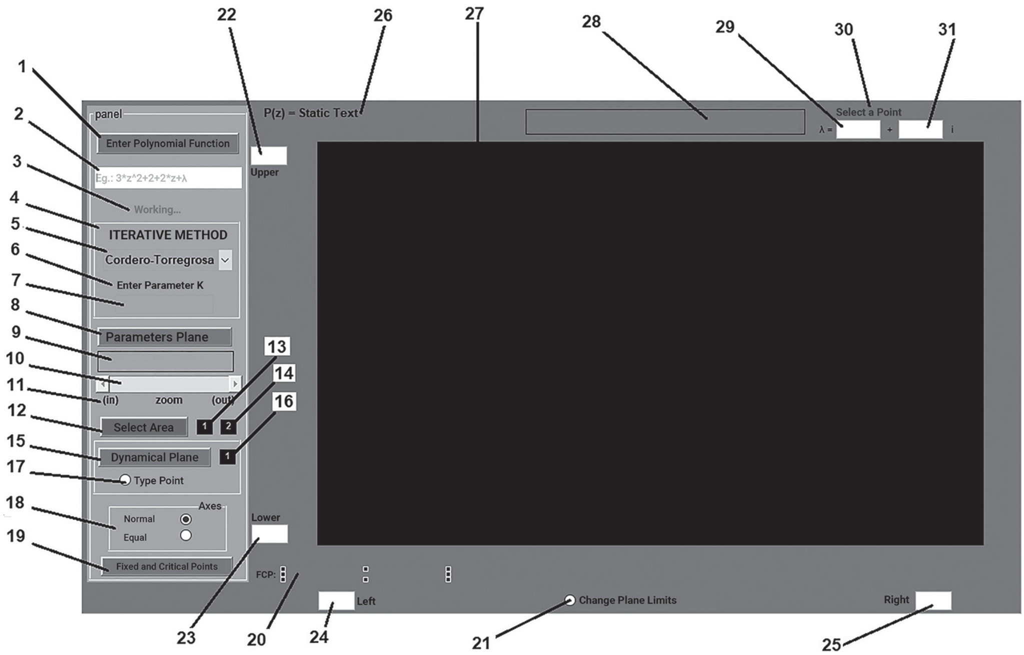
Graph 7. "FPandCP" GUI.



Source: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

6. "Myfirst" GUI

Graph 8. Elements of the "myfirst" GUI.



Source: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

Some of the elements that appear in the "myfirst" GUI are described below (Graph 8).

– Enter Polynomial Function button:

This activates the text window, item number 2 in Graph 8, where the polynomial function is entered.

– Text window for entering the polynomial function:

This window is activated by pressing the Enter Polynomial Function button (1. in Graph 8). Once active, the text is displayed on it (2. in Graph 8), 3*z^2+2*z+λ as an example of how a polynomial function should be entered, appears for the equation (3):

$$3z^2 + 2z + \lambda\,, \tag{3}$$

This means that, when the function is introduced, the multiplication and exponentiation arithmetic functions must be specified using the symbols * and ^ respectively.

The polynomial can be of any degree, but it is important to note that the higher it is, the greater the computational cost in time. Using the Cordero–Torregrosa iterative method, a polynomial function of degree 3 and 2 terms might take several minutes to find the FPs and CPs, as well as to draw the PP and the DP.

The parameter λ can be entered into the function as often as necessary in any of the terms of the polynomial. But as in the polynomial function, the multiplication and exponentiation operations have to be specified using * and ^.

It is important to consider that the software does not explicitly read the character λ. When it is entered in the polynomial function, it has to be replaced with the upper-case letter *L,* as shown in the equation (5), to write the equation (4). If it is introduced by mistake, MATLAB sends an error message for each console and does not calculate the PP. Consequently, the polynomial function must be re-entered using the "Enter Polynomial Function" button.

If the polynomial function to enter is:

$$4\lambda^2 z^3 - 2\lambda z^2 - 3\lambda^3 + \lambda \tag{4}$$

This can be entered as:

$$4 * L\char`^2 * z\char`^3 - 2 * L * z\char`^2 - 3 * L\char`^3 + L \tag{5}$$

entering blank spaces with the space bar before and/or after each addition and subtraction arithmetic operator. There can be any number of blank spaces.

It is also possible to input a polynomial function, as described above, free from the parameter λ. But for this function, obviously, the PP is not calculated and indeed the program does not allow the button to be pressed to calculate it. The software informs the user, by the dynamical plane button flashing red (number 15 in Graph 8) that this button has to be pressed to calculate and represent the DP.

7. Proposal for implementation

The module has been designed so that the first weeks start with the theoretical explanation of the fundamental concepts without which it would not be viable to assimilate the content and acquire the competences relating to it. After this, there is a series of activities that require a certain degree of interaction by the students in their learning process. That is to say, the module starts with theoretical content. It then proceeds to a brief introduction to the basic commands for the designed software, duly illustrated and with multiple examples to facilitate learning of the tool. We continue with simple exercises so that students can quickly assimilate the usefulness of the tool. These do not involve an excessive workload for them. The second stage covers advanced theoretical content and poses increasingly difficult problems that the students must solve with the help of the tool created for this purpose.

This way, we can reinforce the generic knowledge they have already acquired while, at the same time, they discover new commands or instructions in the tool, designed for more specific tasks. The interrelationship between theory and practice means students can consolidate the more abstract notions and develop their ability to solve problems independently. Finally, the students are given similar problems to the ones they must tackle in the final exam, with the same level of difficulty that will be required of them.

As the students make use of the tool, its graphical power and the software's large visual component stimulate their curiosity and interest in the program and so in using it and facilitate users acquisition of sufficient knowledge to be able to submit the planned assignments.

8. Results

Table 3 shows the statistics from the results obtained by the students in the second group after implementing the changes we described in the previous section. For this study we selected a total of 50 students from the Continuous and Discrete Dynamical Systems module on the University Master's in Mathematical and Computational Engineering at the Universidad Internacional de La Rioja. These students are from the third cohort to take this module and it is the first time they have encountered the dynamic study of iterative methods and families of iterative methods. Accordingly, we have focussed on a quantitative measurement, taking into account their results on the assignments submitted.

TABLE 3. Descriptive statistics of the tasks of the second group.

	Task 1	Task 2	Task 3
DNS	17	18	18
Fail	4	5	9
Pass	29	27	23
Total	50	50	50
Total DNS	53	32	32
% students who took assessment with DNS	66%	64%	64%
% passed inc. DNS	58%	54%	46%
% aprobados sin NP	87.88%	84.38%	71.88%
Mean Mark inc. DNS	5.12	4.46	4.18
Mean Mark exc. DNS	7.76	6.99	6.53

Source: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

At a general level, we can see that the percentages of assignments submitted and of assignments passed increase substantially, as do the mean marks. However, we will go on to study each of the tasks separately, considering two options: the first one eliminates work not submitted as data, and the second, gives work not presented 0 as its mark, because, given that many pieces of work were not submitted, the statistics will be calculated including the work not submitted (DNS) and not including them.

8.1. Assignment 1 Results excluding DNS

In this section, we start to see the descriptive statistics provided by the SPSS program relating to the first group, denoted by "PER1-2", which appear in Graphs 9, 10 and 11.

Graph 9. Descriptive statistics associated with first group.

Group = PER1-2

Descriptive statistics[a]

	N	Rank	Minimum	Maximum	Summatory
	Statistical	Statistical	Statistical	Statistical	Statistical
Exercise 1	17	10.0	.0	10.0	68.0
N valid (by list)	17				

Descriptive statistics[a]

	Mean		Standard deviation	Variance	Skewness
	Statistical	Statistical	Statistical	Statistical	Statistical
Exercise 1	4,000	0,9777	4,0311	16,250	.324
N valid (by list)					

Descriptive statistics[a]

	Skewness	Kurtosis	
	Standard error	Statistical	Standard error
Exercise 1	.550	-1.614	1.063
N valid (by list)			

a. Group = PER1-2

Source: Own elaboration.

Graph 10. Descriptive statistics associated with first group.

Group = PER1-2

Statisticals[a]

Exercise 1

N	Valid	17
	Losts	17

a. Group = PER1-2

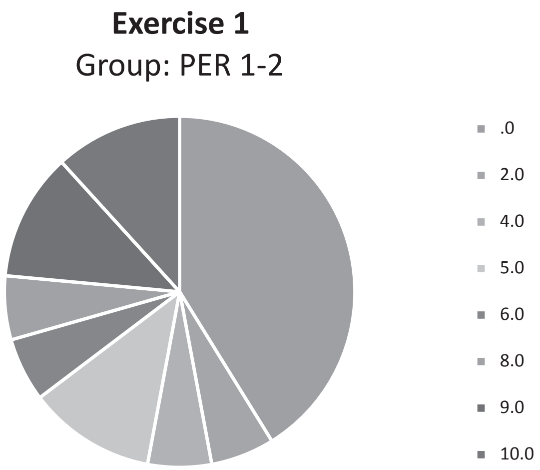
Exercise 1[a]

		Frequency	Percentage	Valid percentage	Cumulative percentage
Valid	.0	7	20.6	41.2	41.2
	2.0	1	2.9	5.9	47.1
	4.0	1	2.9	5.9	52.9
	5.0	2	5.9	11.8	64.7
	6.0	1	2.9	5.9	70.6
	8.0	1	2.9	5.9	76.5
	9.0	2	5.9	11.8	88.2
	10.0	2	5.9	11.8	100.0
	Total	17	50.0	100.0	
Losts	Sistem	17	50.0		
Aggregate		34	100.0		

a. Group = PER1-2

Source: Own elaboration.

Graph 11. Descriptive statistics associated with first group.



Source: Own elaboration.

revista española de pedagogía
year 77, n. 274, September-December 2019, 457-485

In addition, the descriptive statistics provided by the SPSS program relating to the second group, denoted by "PER3", are shown in Graphs 12, 13 and 14.

GRAPH 12. Descriptive statistics associated with second group.

Group = PER3

Descriptive statistics[a]

	N	Rank	Minimum	Maximum	Summatory
	Statistical	Statistical	Statistical	Statistical	Statistical
Exercise 1	33	8.0	2.0	10.0	256.0
N valid (by list)	33				

Descriptive statistics[a]

	Mean		Standard deviation	Variance	Skewness
	Statistical	Statistical	Statistical	Statistical	Statistical
Exercise 1	7.758	.3893	2.2365	5.002	-1.360
N valid (by list)					

Descriptive statistics[a]

	Skewness	Kurtosis	
	Standard error	Statistical	Standard error
Exercise 1	.409	1.023	.798
N valid (by list)			

a. Group = PER3

Source: Own elaboration.

GRAPH 13. Descriptive statistics associated with second group.

Frecuency

Group = PER3

Statisticals[a]

Exercise 1

N	Valid	33
	Losts	17

a. Group = PER3

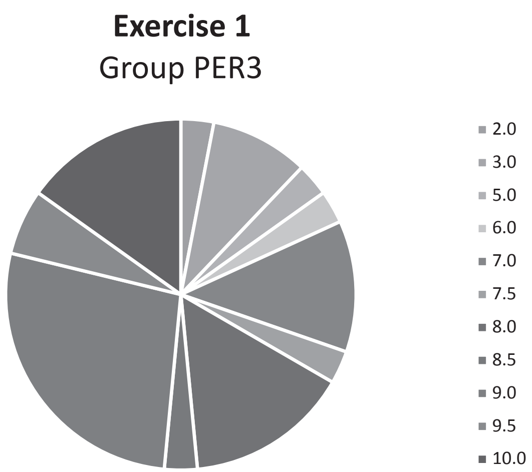
Exercise 1[a]

		Frequency	Percentage	Valid percentage	Cumulative percentage
Valid	2.0	1	2.0	3	3.0
	3.0	3	6.0	9.1	12.1
	5.0	1	2.0	3.0	15.2
	6.0	1	2.0	3	18.2
	7.0	4	8.0	12.1	30.3
	7.5	1	2.0	3.0	33.3
	8.0	5	10.0	15.2	48.5
	8.5	1	2.0	3	51.5
	9.0	9	18.0	27.3	78.8
	9.5	2	4.0	6.1	84.8
	10.0	5	10.0	15.2	100.0
	Total	33	66.0	100.0	
Losts	Sistem	17	34.0		
Aggregate		50	100.0		

a. Group = PER3

Source: Own elaboration.

GRAPH 14. Descriptive statistics associated with second group.



Source: Own elaboration.

Finally, we wish to verify whether the differences we see with the means are significant. To do this, taking into account the fact that the first group only contains 17 valid cases, we use the Mann-Whitney U test from SPSS.

Graph 15. Mann-Whitney U test for comparison of means of the marks obtained in the first task.

Mann-Whitney test

Ranks

Group		N	Rank average	Rank aggregate
Exercise 1	PER3	33	30.24	998.00
	PER1-2	17	16.29	277.00
	Total	50		

Statistical Test[a]

	Exercise 1
Mann-Whitney U test	124.000
Wilcoxon signed-rank test	277.000
Z	-3.223
Bilateral probability test	0.001

a. Grouping variable: Group

Source: Own elaboration.

The result is shown in Graph 15. The result found is that the second group, in other words, the one that followed the new method, obtained a mean score which is 3.223 higher than the group taught using the previous methodology and also that this result is significant.

8.2. Assignment 1 Results including DNS

Including the assignments that were not submitted and performing the same statistical study, but omitting the graphs for increased clarity and using Student's *t* test as both groups have over 30 items, the results obtained regarding the differences of means are:

The result is shown in Graph 16. The result found is that the second group, in other words, the one that followed the new methodology, obtained a mean score which is 3.120 higher than the group taught using the previous methodology and also that this result is significant.

We carried out the same study with tasks 2 and 3, omitting the graphs here so that it is easier to visualise the results.

Graph 16. Student's t test for comparison
of means of the marks obtained in the first task.

T Test

Group statistics

Group		N	Mean	Standar deviation	Standard error of the mean
Exercise 1	PER3	50	5.120	4.1287	0.5839
	PER1-2	34	2.000	3.4641	0.5941

Independent sample test

		Levene´s test for the equality of variances		T test for testing the equality of means	
		F	Sig.	t	gl
Exercise 1	Equal variances are assumed	8.457	0.005	3.622	82
	Equal variances are not assumed			3.746	78.325

Independent sample test

		T test for testing the equality of means		
		Sig. (bilateral)	Difference of means	Standard error difference
Exercise 1	Equal variances are assumed	0.001	3.1200	0.8614
	Equal variances are not assumed	0.000	3.1200	0.8330

Independent sample test

		T test for testing the equality of means	
		95% confidence interval of the difference	
		Lower	Higher
Exercise 1	Equal variances are assumed	1.4065	4.8335
	Equal variances are not assumed	1.4618	4.7782

Source: Own elaboration.

8.3. Assignment 2 Results excluding DNS

The result found is that the second group, in other words, the one that followed the new methodology, obtained a mean score which is 1.129 higher than the group taught with the first methodology, however, this result is not significant.

8.4. Assignment 2 Results including DNS

The result found is that the second group, in other words, the one that followed the new methodology, obtained a mean score which is 1.9359 higher than the group taught using the previous methodology and also that this result is significant.

8.5. Assignment 3 Results excluding DNS

The result found is that the second group, in other words, the one that followed the new methodology, obtained a mean score which is 2.641 higher than the group taught using the previous methodology and also that this result is significant.

8.6. Assignment 3 Results including DNS

The result found is that the second group, in other words, the one that followed the new methodology, obtained a mean score which is 2.8565 higher than the group taught using the previous methodology and also that this result is significant.

We observed that the mean marks for each of the assignments in the group that used the tool increased compared to the group with which we did not use this new tool.

TABLE 4. Percentage point increase in mean per assignment.

	Exc. DNS	Con NP
Task 1	3.223	3.120
Task 2	1.129	1.9359
Task 3	2.641	2.8565

Source: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

9. Conclusions

As Ascheri and Pizarro (2006) note, using software in numerical calculus is of great value for students as it enables them to interpret numerical methods and adapt them to other situations that could be useful to them in their future professional life, as it gives them the ability to reinforce their programming knowledge. In this setting, we believe that learning becomes much more dynamic and active on the part of the students as they can interact with the software in accordance with their own rate of learning, while also obtaining a more immediate response.

We obviously think it is necessary for students to have previous training in programming and must also have some prior knowledge of numerical methods if they are to use this sort of software correctly. Similarly, the teachers' role changes when this type of tool is included in the classroom as they go from being people who transmit knowledge, to mediators in the students' learning process. In other words, guides who show to the students how they have to proceed if they do not know how to do so. Training teaching staff in the use of this sort of software is therefore, vital as their role in the students' learning process will be affected by their command of the use of computers.

Similarly, we believe that the importance of software not only lies in the fact that it allows students to solve activities relating to numerical calculus but also that it is useful for being able to confront and understand other situations, and for students to understand what errors they make and where they make them.

Likewise, we believe it is important to place special emphasis on students being aware that it is important, when using computer programs for numerical calculus, that they always keep in mind how it works as they approach the desired solution. In other words, it is important for them to value the importance of the graphic that is obtained from the function they are analysing, as well as the interval of analysis or the conditions for convergence and not to focus solely on the final result from the program.

At the start of this study, a main aim was identified: to design a methodology based on the application of a tool to try to mitigate the problems detected and apply it to different iterative methods.

We can conclude that this aim has been achieved as its partial objectives were achieved.

Objective 1: to design and put into operation the modification of the timing and delivery of classes in the Continuous and Discrete Dynamical Systems module.

- A modification was made to the annual general programme for the Continuous and Discrete Dynamical Systems module.
- The timing of the subject was modified.
- The way it is delivered was modified.

Objective 2: to design a tool, which will be developed in the MATLAB language, and apply it to the Continuous and Discrete Dynamical Systems module.

- A tool was designed.
- It was developed in the MATLAB language.
- Tests were carried out with known polynomials to evaluate the tool.
- It was used with one group of students.

Objective 3: to improve the results at a quantitative level in the Continuous and Discrete Dynamical Systems module using this tool and the new way of delivering the module.

- In the three assignments considered, the students' mean scores have improved significantly.
- The results are significant in five of the six measurements.

In summary, has the problem of the high level of failure to submit work been solved and have the students' results improved?

Now that the starting hypothesis has been verified and the partial objectives and main aim have been fulfilled, we can give a POSITIVE answer to the question.

Subsequently, both the methodology and the tool used have made it possible to validate the hypothesis of this article.

References

Amat, S., Busquier, S., Legaz, M. J., & Ruiz, J. (2015). Unifying the classical approach with new technologies: An innovative proposal for teaching mathematics in engineering. *International Journal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence, 3* (4), 17-19.

Arís, N., & Orcos, L. (2015). ICTs and school education. *International Journal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence, 3* (4), 13-18.

Ascheri, M. E., & Pizarro, R. A. (2006). Uso de la Tecnología en la Enseñanza-Aprendizaje de temas de cálculo numérico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19,* 879-885.

Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10* (2), 135-150.

Behl, R., Amat, S., Magreñán, Á. A., & Motsa, S. S. (2018). An efficient optimal family of sixteenth order methods for nonlinear models. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 354,* 271-285.

Cordero, A., Magreñán, A., Quemada, C., & Torregrosa, J. R. (2016). Stability study of eighth-order iterative methods for solving nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 291*, 348-357.

De Faria, E. (2001). Generalización del teorema de Morgan. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 14,* 272-276.

Díaz Godino., J. (Director) (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Fernández, I., Riveros, V., & Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. *Omnia, 23* (1), 9-19.

Fisher, Y., McGuire, M., Voss, R. F., Barnsley, M. F., Devaney, R. L., & Mandelbrot, B. B. (2012). *The science of fractal images*. Berlin: Springer Science & Business Media.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 2,* 213-223.

Jiménez, D. A., Mediavilla, D. M., Portús, P. O. M., López, V. P., & Vicente, F. J. S. V. (2015). Maths: from distance to e-learning. *International Journal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence, 3* (4), 5-12

Magreñán, Á. A. (2013). *Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado* (Doctoral thesis). Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño.

Magreñán, Á. A., Argyros, I. K., Rainer, J. J., & Sicilia, J. A. (2018). Ball convergence of a sixth-order Newton-like method based on means under weak conditions. *Journal of Mathematical Chemistry, 56* (7), 2117-2131.

Mandelbrot, B. B. (1983). *The fractal geometry of nature (Vol. 173).* New York: WH freeman.

Martins, A., Fracchia, C.C., Allan, C., & Parra, S., (2010). *Simulación y Métodos numéricos en ciencias de la computación: uso de TICS*. XII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación, Universidad Nacional de San Juan, Argentina. Retrieved from http://hdl.handle.net/10915/19627 (Consulted on 2017-12-01).

Rodríguez-Vásquez, F. M. (2003). *Convergencia, recursividad y visualización* (Doctoral thesis). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Rodríguez-Vásquez, F. M. (2010). *Desarrollo Conceptual de los Métodos Iterativos en la Resolución de Ecuaciones No Lineales*. (Doctoral thesis). Universidad de Salamanca, Salamanca.

Santos, L. M. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10 (2),* 195-211.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22* (1), 1-36.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer,* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Authors' biographies

Íñigo Sarría Martínez de Mendivil holds a Doctorate from the Universidad Internacional de La Rioja, a Licentiate degree in Mathematics from the Universidad del País Vasco, a University Expert qualification in Analysis of the Knowledge Society from the Universidad Internacional de La Rioja, and a Certificate in Teaching from the Universidad Complutense of Madrid. He is Director of the Computer Science and Technology Area of the Higher School of Engineering and Technology at the Universidad Internacional de La Rioja and is the Coordinator of the Master's in Mathematical Engineering and Computing.

https://orcid.org/0000-0002-2584-9671

Rubén González Crespo is a Doctor of Engineering in Computer Engineering and has a degree in Engineering in Industrial Organisation from the Universidad Pontificia de Salamanca. Master's in Project Management and Administration and a Master's in Web Engineering from the same university. Diploma in International Studies from the Sociedad de Estudios Internacionales. Head of Academic Policy and Planning and Head of the Higher School of Engineering and Technology at the Universidad Internacional de La Rioja.

https://orcid.org/0000-0001-5541-6319

Ángel Alberto Magreñán Ruiz has a Doctorate (Cum Laude and special prize) in Mathematics, Certificate in Teaching, Licentiate degree in mathematics and Technical Engineering degree in Business Computing from the Universidad de La Rioja. He is currently an Associate Professor in the Mathematics Teaching Area of the Department of Mathematics and Computation of the Universidad de La Rioja.

https://orcid.org/0000-0002-6991-5706

Lara Orcos Palma has a doctorate in mathematics from the Universidad Politécnica de Valencia. Licentiate degree in Chemistry from the Universidad de La Rioja, Licentiate degree in Biochemistry from the Universidad de Salamanca, she studied a Master's in Teacher Training at the Universidad de La Rioja and a Master's in Chemical Science and Technology with Spain's Universidad Nacional de Educación a Distancia. She is currently assistant to the academic coordination of the Bachelor's degrees in Early Years and Primary Teaching in the Faculty of Education at the Universidad Internacional de La Rioja.

https://orcid.org/0000-0001-8138-551X

Alexander González-Castaño has a Physics degree from the Universidad Nacional de Colombia and has a Master's in Mathematical and Computational Engineering from the Universidad Internacional de La Rioja. He is currently a Lecturer with the Corporación Universitaria Minuto de Dios – UNIMINUTO.

https://orcid.org/0000-0003-0235-6812

revista española de pedagogía
año 77, nº 274, septiembre-diciembre 2019
Spanish Journal of Pedagogy
year 77, n. 274, September-December 2019

Table of Contents

Sumario

Studies
Estudios

Notes
Notas

Book reviews

Table of contents of the year 2019

This is the English version of the research articles and book reviews published originally in the Spanish printed version of issue 274 of the **revista española de pedagogía**. The full Spanish version of this issue can also be found on the journal's website http://revistadepedagogia.org.

ISSN: 0034-9461 (Print), 2174-0909 (Online)
https://revistadepedagogia.org/
Depósito legal: M. 6.020 - 1958
INDUSTRIA GRÁFICA ANZOS, S.L. Fuenlabrada - Madrid