



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores
del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Directorio

Volumen VIII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2020

Rafael Pantoja R.

ISSN: 2395-955X

Director

Eréndira Núñez P.

USO DE LA FOTOGRAFÍA PARA EL CÁLCULO DE ÁREAS DE OBJETOS COTIDIANOS PLANOS: HOJAS DE ÁRBOL APLANADAS

Lilia López V.

Sección: Selección de
artículos de investigación

María Teresa Sánchez V., Rafael Pantoja R., Elena Nesterova
vieyra_84@hotmail.com, profe.rpantoja@hotmail.com,
elena.nesterova@hotmail.com

Elena Nesterova

Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara

Alicia López B.

Para citar este artículo:

Verónica Vargas Alejo

Sánchez, M. T., Pantoja, R., R., Nesterova, E. (2021). Uso de la fotografía para el cálculo de áreas de objetos cotidianos planos: hojas de árbol aplanadas. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VIII, No. 2, pp. 1-10. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

Sección: Experiencias

Docentes

Esnel Pérez H.

Armando López Z.

Sección: GeoGebra

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VIII, No. 2, julio-diciembre de 2020, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: <http://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

USO DE LA FOTOGRAFÍA PARA EL CÁLCULO DE ÁREAS DE OBJETOS COTIDIANOS PLANOS: HOJAS DE ÁRBOL APLANADAS

María Teresa Sánchez V., Rafael Pantoja R., Elena Nesterova

vieyra_84@hotmail.com, profe.rpantoja@hotmail.com, elena.nesterova@hotmail.com

Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara

Resumen

En el presente trabajo se reportan los resultados de actividades realizadas con el uso de la tecnología, que propician el aprendizaje del cálculo integral mediante su aplicación en la aproximación de áreas de hojas de árboles aplanadas, completas y segmentadas, que asemejan regiones acotadas por funciones a determinar. La actividad se inició con una fotografía de hoja de árbol, la cual se procesó en el Tracker para obtener, en medidas reales, los datos requeridos para hacer en GeoGebra el ajuste de la función polinómica que limitara el contorno a integrar. Los resultados se sustentaron en la observación y desempeño del alumno, el cuaderno de trabajo, las encuestas aplicadas y el análisis de las entrevistas, que en conjunto permitieron concluir que la valoración resultó positiva.

Palabras clave: Tracker, GeoGebra, Cálculo integral, aproximación de áreas.

Abstract

In the present work, the results of activities carried out with the use of technology are reported, which promote the learning of integral calculus through its application in the approximation of flattened, complete and segmented areas of tree leaves, which resemble regions bounded by functions to decide. The activity began with a photograph of a tree leaf, which was processed in the Tracker to obtain, in real measurements, the data required to adjust the polynomial function in GeoGebra to limit the contour to be integrated. The results were based on the observation and performance of the student, the workbook, the applied surveys and the analysis of the interviews, which together allowed to conclude that the assessment was positive.

Keywords: Tracker, GeoGebra, Integral calculus, approximation of areas.

Introducción

La enseñanza tradicional del cálculo integral en los niveles educativos medio superior y superior, ha sido de tal manera que el estudiante se ve limitado a un aprendizaje basado en fórmulas o algoritmos, sin lograr, la mayoría de las veces, relacionar las aplicaciones del cálculo integral a su entorno cotidiano o profesional, como en el caso que se reporta, en el que se enfrenta al alumno a aplicar sus conocimientos previos de integración, a la aproximación de áreas de hojas de árbol aplanadas completas y segmentadas, primero mediante un acercamiento numérico y posteriormente, con un ajuste de polinomios a su periferia.

En el programa vigente de Cálculo Integral del Tecnológico Nacional de México, institución de nivel superior dependiente de la Secretaría de Educación Pública, se sugiere que el alumno debe desarrollar la habilidad para modelar situaciones cotidianas en su entorno, a la vez que

contribuya al desarrollo de competencias como: plantear y resolver problemas, habilidad para trabajar en forma autónoma, capacidad de trabajo en equipo y habilidades en el uso de las TIC, es en esta dirección que se orientó este proyecto.

En una clase típica de cálculo integral, no es muy común que se incluya el cálculo de áreas de objetos cotidianos para los estudiantes, de manera que los manipulen directamente, que experimenten y encuentren una representación matemática para aproximar el área con el empleo de las TIC y la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo. El uso de la fotografía o videos (Jofrey, 2010; Ezquerro, Iturrioz y Díaz, 2011), así como el manejo del Tracker y GeoGebra, han dado buenos resultados en la motivación de los estudiantes para propiciar su propio aprendizaje (Arrieta y Díaz, 2015; Pantoja, Guerrero, Ulloa, Nesterova, 2016).

Soporte teórico

Apoyados en la Teoría de Raymond Duval (2004), con el fin de lograr una mejor comprensión del cálculo de áreas, se reporta un trabajo en el que los asistentes al taller encontraron diferentes representaciones semióticas de un objeto cotidiano como es una hoja de árbol, a la que se le tomó una fotografía, se manipuló con el Tracker para calcular las coordenadas de la periferia, ajustar las funciones y calcular las integrales con GeoGebra.

En la figura 1 se muestran los distintos registros para el caso de la hoja de árbol, ya sea completa o segmentada, en la que se presenta la gráfica, los puntos del contorno, la fotografía y el polinomio ajustado de grado menor o igual a tres con el Tracker. En otro caso, los datos se exportan a GeoGebra ya que su rutina de ajuste de funciones es más completa.

La representación verbal se propicia en el trabajo en grupo colaborativo, cuando se discute sobre la situación problema (Hitt y González-Martín, 2015) y los elementos que se generan con el Tracker, mientras que la representación escrita se crea con la contestación de la hoja de trabajo y el reporte final. En estos momentos es cuando se generan las conversiones:

- gráfica-visual: cuando se relaciona la imagen del objeto con su contorno;
- gráfica-analítica: que se propicia cuando se determina la representación analítica, a partir de los datos numéricos de las coordenadas de los puntos marcados con el Tracker;
- verbal-analítica: mediante el trabajo colaborativo y la discusión sobre las funciones que acotan el área del objeto;
- verbal-escrito: cuando se discute sobre el reporte de la actividad.

También se genera el tratamiento en el registro analítico, cuando los alumnos determinan, de entre todas las funciones incluidas en las rutinas de Tracker o GeoGebra, las mejores funciones para acotar el área de la hoja de árbol y emplear la rutina de integración del GeoGebra para aproximar el área.

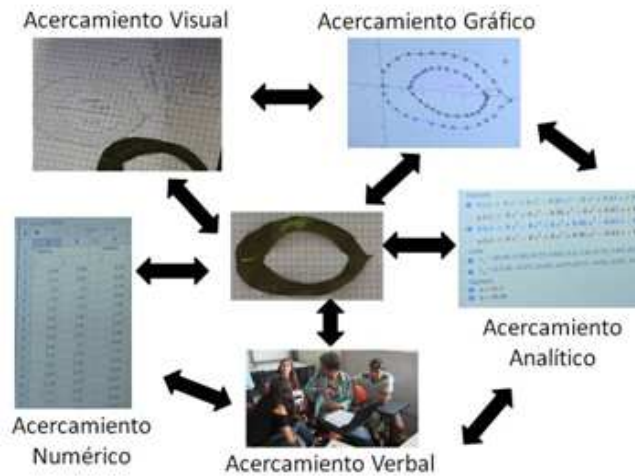


Figura 1. Representaciones semióticas de la hoja de árbol y su área. Creación propia.

Metodología

Las fases que se siguieron son:

- Se formaron equipos de dos integrantes y a cada equipo se entregó un objeto y un papel cuadriculado, para obtener un primer acercamiento al área de la hoja de árbol aplanada, mediante aproximaciones superiores e inferiores a su magnitud.
- Cada equipo tomó una fotografía de la hoja, para manipular la imagen en Tracker y GeoGebra y responder el cuaderno de trabajo.
- El instructor coordinó el manejo de los programas Tracker y GeoGebra, para la obtención de las funciones que modelaran adecuadamente el objeto y realizaran las integrales.
- Los integrantes de cada equipo manipularon la foto capturada en el paso anterior con el Tracker, eligieron la posición de la foto con respecto a los ejes coordenados, obtuvieron las funciones que modelaron el contorno de la región cuya área se buscaba, los límites de integración, y finalmente aproximaron la magnitud.
- Los participantes compararon los resultados obtenidos en los pasos 1 y 4 y obtuvieron sus conclusiones.
- Los participantes repitieron los pasos del 1 al 5, pero ahora con hojas de árbol con distintos cortes internos y externos.
- Se realizó una presentación grupal para que los participantes mostraran sus productos y de forma grupal, discutir resultados con el fin de obtener conclusiones que ayudaran a recabar información para enriquecer la propuesta.

Resultados

Los participantes del taller calcularon de manera aproximada el área de hojas planas de árbol con distintas formas, simulando regiones de integración limitadas por funciones

desconocidas, las cuales ajustaron con polinomios de distintos grados. Las rutinas del Tracker para aproximar polinomios a un conjunto de datos es limitado, motivo por el que se utilizó el GeoGebra para delimitar las funciones y los límites de integración. Es en este paso, cuando los alumnos presentaron problemas para seccionar la hoja y determinar las distintas regiones de integración, pues no visualizan en un primer momento, como acomodar la hoja de árbol, para aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) al cálculo de áreas. Algunas de las hojas que trabajaron los estudiantes se muestran en la figura 2.



Figura 2. Hojas de árbol usadas en el taller. Creación propia.

Se realizaron dos sesiones, una por día, de cuatro horas cada una. En la primera se dieron a conocer los objetivos del taller y se facilitaron los materiales requeridos para su desarrollo. Cabe mencionar, que la mayoría de los participantes ya conocía GeoGebra, pero no Tracker, así que se dio una explicación de su manejo, al menos para la realización de las actividades de este taller.

Primera sesión

En la primera sesión, se sugirió que las actividades las realizaran en binas, ya que inicialmente la propuesta era en equipos de tres, pero por los pocos participantes del taller, lo más adecuado en ese momento, era en grupos de dos y otros optaron por hacerlo de manera individual. Una vez que los participantes instalaron en sus computadoras los programas Tracker y GeoGebra, eligieron una hoja de árbol en físico y en fotografía, facilitadas por el instructor.

De acuerdo con las instrucciones del cuaderno de trabajo, en primer lugar, los participantes calcularon el área aproximada de la hoja, mediante trazos que se consideraron adecuados en el papel cuadrado que se les otorgó. Calcularon un área menor y una mayor para deducir una aproximación más precisa. Para el cálculo trazaron el contorno de toda la hoja en el papel cuadrado y luego hicieron los cálculos, como lo consideraron mejor, por ejemplo, una participante describe su procedimiento como sigue:

Para el área menor se contaron todos los cuadritos que estaban por dentro de la hoja, aproximando los cuadritos incompletos y juntándolos con otros cuadritos para completar uno entero, se obtuvieron 129 cuadritos. Área= $129 \cdot 0.49 = 63.21$ unidades de área (cada cuadro por lado mide 0.7 cm.). Para el área mayor se contaron todos los cuadritos que cubrían completa la hoja, es decir, por exceso. Se obtuvieron 153 cuadritos. Área= $153 \cdot 0.49 = 75.95$.

Esta misma alumna, en su trabajo eligió la hoja que se muestra en la Figura 3, donde se incluye el trazo realizado.

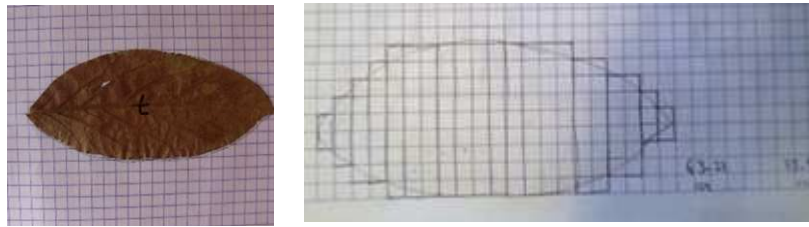


Figura 3. Cálculo de áreas mediante conteo de cuadritos. Creación propia.

Otros participantes, trazaron un polígono circunscrito a la hoja para obtener una aproximación superior y uno inscrito para una aproximación inferior. De acuerdo con sus resultados y reflexiones, comentaron que sus aproximaciones no son muy exactas, ya que la diferencia entre la aproximación superior y la inferior es un valor considerable, porque en general, les resultó entre 10 y 13 cm². También comentaron que a pequeñas escalas puede tratarse de una diferencia no muy importante, lo que no pasaría, si la medición se hiciera a grandes escalas. Para obtener mejores aproximaciones, sugieren:

- *Hacer la cuadrícula más pequeña.*
- *Uso de papel milimétrico, aumentar el número de figuras geométricas tanto inscritas como circunscritas y utilizar en la fotografía la iluminación adecuada para eliminar las sombras.*

En el cuaderno de trabajo se pide que propongan una forma de realizar el cálculo de área con algún software matemático que ellos conozcan, a lo cual algunos respondieron que lo han hecho con Excel, sin embargo, consideran que se obtienen resultados no tan precisos y comentan:

- *Graficar la hoja, obtener puntos coordenados, particionar la hoja y aproximar los puntos a alguna función, después sacar el área bajo la curva.*
- *Generando los puntos de la forma del contorno de la imagen y localizarlos en el plano coordenado. Definiendo una función aproximada a la forma y calculando el área bajo la curva.*

Los comentarios dejan entrever que tienen una idea clara de aplicar el TFC al cálculo de áreas. Aunque en un principio los participantes tuvieron ciertas dudas, se aclaró que hay que dividir el contorno de la hoja en varias regiones y obtener las funciones y los límites para integrar. Los participantes insertaron la fotografía de su hoja de árbol en la computadora para procesar con el Tracker y obtener los datos que fueron exportados a GeoGebra para ajustarlos a un polinomio. Ubicaron los ejes coordenados sobre la imagen, visualizaron el tipo de funciones involucradas en el contorno de la hoja e hicieron los cálculos solicitados. Todos coincidieron en la elección de polinomios de grados superiores, con el fin de acotar el contorno de la hoja de árbol y aplicar el teorema fundamental del cálculo.

Algo relevante que los participantes mencionaron, es que la posición de la hoja de árbol y ubicación de los ejes coordenados es importante, pues la simetría facilita la división de la región y no les fue difícil identificar y trazar las trayectorias de las funciones, así como los

límites de integración. Con respecto a la obtención de los polinomios, fue muy común que GeoGebra les arrojara expresiones como $p(x) = 0x^5 - 0x^4 - 0x^3 + 0.06x^2 - 0.63x - 0.16$, en los que algunos de los coeficientes fueran cero, que se aclaró que es problema de la asignación de las cifras decimales significativas en GeoGebra.

Una vez obtenidos los polinomios buscados, procedieron a integrarlos en GeoGebra, en donde se graficaron y corroboraron la forma de la hoja de árbol y su área. En esta primera actividad, los alumnos no tuvieron problema para representar el contorno en GeoGebra (Figura 4) y aplicar la rutina de integración para acercarse al valor del área.

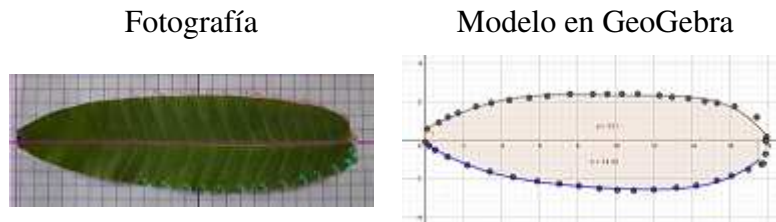


Figura 4. Fotografía de una hoja y su representación en GeoGebra. Creación propia.

Después de aproximar el área de forma manual por el conteo de cuadritos y con el GeoGebra, compararon los resultados, y concluyeron que no eran iguales, sin embargo, la diferencia entre ellos era razonable por la forma en que hicieron los cálculos por ambos métodos. Por un lado, argumentaron que los cálculos de conteo de cuadritos carecían de exactitud precisamente por la cuadrícula relativamente grande y con respecto al cálculo con GeoGebra, argumentaron que se podría mejorar la ubicación y el número de puntos del contorno señalados con Tracker.

Segunda sesión

En esta sesión los participantes trabajaron una actividad análoga a la primera, solo que en este caso se incluyeron hojas de árbol con distintos cortes en su contorno y/o en el interior. De entrada, notaron y expresaron la dificultad para encontrar los polinomios adecuados para el cálculo de las integrales y el área. En la Figura 5 se muestra la imagen en la que se muestra la delimitación del contorno con distintos colores para las funciones que se proponen para seccionar la región.

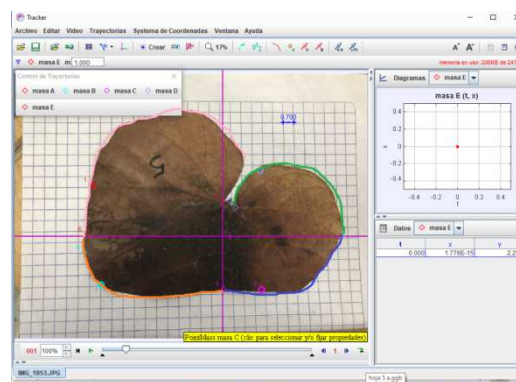


Figura 5. Fotografía de una hoja y su representación en Tracker. Creación propia.

En este caso, ubicar los ejes coordenados fue complicado, ya que la hoja no era simétrica, mencionaron que la mejor posición de los ejes es “aquella en la que se pueda dividir la imagen en funciones”, pero la realidad es que lo irregular de las hojas de árbol complica la división de la región acotada por un solo polinomio, pero una vez que visualizaron cómo seccionar y dilucidar los límites de integración no les fue difícil y lograr la modelación. Figura 6.

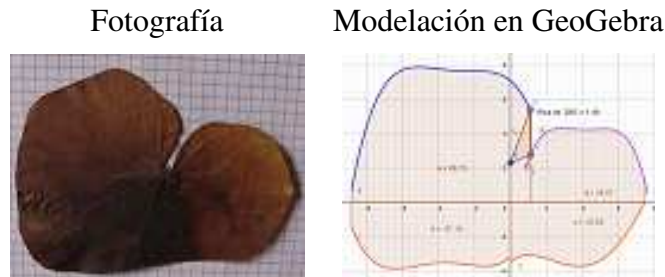


Figura 6. Fotografía de una hoja y su representación en GeoGebra. Creación propia.

En el ejemplo de la Figura 6, el área que la participante obtuvo al hacer el cálculo por conteo de cuadritos fue de 186.95 cm^2 , mientras que el cálculo con los programas computacionales fue de 145.03 cm^2 . Se argumentó la importancia de ubicar los puntos sobre el contorno de la hoja al momento de trazar la trayectoria en Tracker, ya que, si la figura es muy amorfa, se tiende con más facilidad a perder exactitud en los cálculos.

Otro cálculo de área que causó conflictos a la participante al momento de hacer los cálculos en Tracker y GeoGebra, es la que se muestra en la Figura 7 por la cantidad y variedad de funciones necesarias a delimitar.

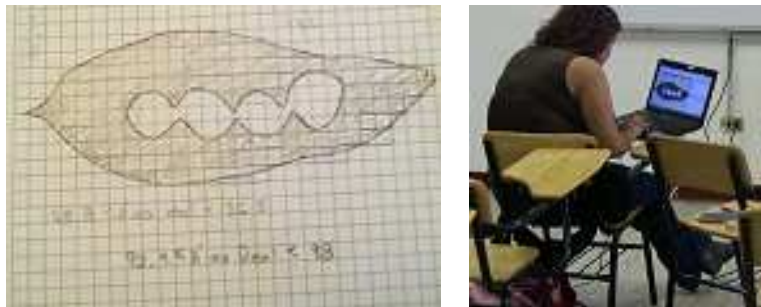


Figura 7. Imagen de los cálculos de una hoja con cortes en su interior. Creación propia.

Para concluir con el taller, los estudiantes expusieron sus trabajos y resultados a sus compañeros. Con ello se propició un momento de reflexión y comparación de sus procedimientos mostraron sus evidencias (Figura 8) para justificar el proceso y explicaron las dificultades a las que se enfrentaron.

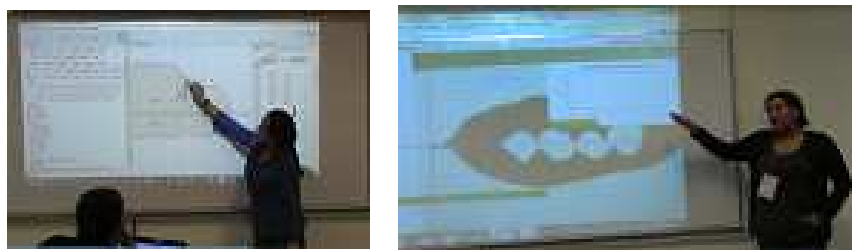


Figura 8. Exposiciones de los participantes. Creación propia.

Conclusiones

La propuesta con la fotografía, Tracker y GeoGebra para el cálculo de áreas captó el interés de los participantes del taller, ya que la consideran una buena alternativa para motivar a los estudiantes en el aprendizaje de la integral definida, esto gracias a que además de que ambos softwares son sencillos de manejar, actualmente los jóvenes tienden a manipular las tecnologías con cierta facilidad y entusiasmo. Incluso, la fotografía que es otra parte importante del presente trabajo, actualmente, no representa un mayor inconveniente ya que por cada equipo de trabajo, es muy probable que mínimo se cuente con un celular para la toma de fotos y solo se debe cuidar que esté bien enfocada y nítida.

El propósito de la propuesta didáctica es ofertar al profesor de matemáticas una serie de ejemplos, para que valore su incorporación a su labor docente, pues con base en las evidencias recopiladas, se propicia aprendizaje de los temas seleccionados, se promueven competencias como la modelación matemática, el manejo de las tecnologías y la escritura de reportes, además de que se incentiva la motivación por aprender matemáticas con estrategias de enseñanza alternativas, que fortalecen la generación de valores como la participación, puntualidad, trabajo colaborativo y honestidad, entre otros.

La presente es una propuesta que propicia en los estudiantes competencias genéricas y específicas, gracias a su naturaleza completamente colaborativa y el uso de herramientas u objetos utilizados en diversas áreas de su vida cotidiana. Esto último, además de ayudar a captar el interés de los estudiantes, los ayuda a vincular el aprendizaje escolar con su quehacer cotidiano fuera de la escuela, es decir, los ayuda a comprender muchos quehaceres de la matemática enfocados a la vida real

En conclusión, la presente es una actividad didáctica que muestra la utilidad del software en la solución de problemas contextualizados mediante el cálculo.

Referencias bibliográficas

- Arrieta Vera, J., & Díaz Moreno, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(1), 19-48.
- Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.

- Ezquerria, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz*. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733 <http://hdl.handle.net/10498/14733>. <http://reuredc.uca.es>.
- Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational studies in mathematics*, 88(2), 201-219.
- Jofrey, J. A. (2010). Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases. *Physics Education*. DOI 10.1088/0031-9120/1/005.
- Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016). Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development*, 5(1), 62-76. Published by American Research Institute. Recuperado de <http://jehdnet.com/>. Electronic Version. DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. ISSN: 2334-2978.
- Pantoja, R. Guerrero, M. de L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016). *Modeling in problem situations of daily life*. *Journal of Education and Human Development*, 5(1), 62-76. ISSN: 2334-2978 (Electronic Version). DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. Published by American Research Institute. Recuperado de <http://jehdnet.com/>.
- Pantoja, R., Ulloa, R., & Nesterova, E. (2013). La modelación matemática en situaciones cotidianas con los software Avimeca y Mathcad. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*. (Bogotá, Colombia), 8(1), 8-22.