REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen IX Número 1 Fecha: enero-junio de 2021

ISSN: 2395-955X

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA INTRODUCIR EL CONCEPTO DE ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

José Luis Soto Munguía, César Fabián Romero Félix

jlsoto@mat.uson.mx, *cesar.romero@unison.mx*

Universidad de Sonora

Para citar este artículo:

Soto, J. L., Romero, F. (2021). Una secuencia didáctica para introducir el concepto de ángulo entre dos planos. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. IX, No. 1, pp. 21-31. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año IX, No. 1, enero-junio de 2021, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA INTRODUCIR EL CONCEPTO DE ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

José Luis Soto Munguía, César Fabián Romero Félix

jlsoto@mat.uson.mx, *cesar.romero@unison.mx*

Universidad de Sonora

Resumen

Se describe aquí una secuencia didáctica diseñada con el propósito de promover el significado geométrico de la noción de ángulo entre dos planos. La secuencia está compuesta de tres fases: Apertura, Desarrollo y Cierre. Está dirigida a estudiantes del área de ciencias e ingeniería y su diseño está basado en una metodología que propone usar GeoGebra de distinta manera en cada una de sus fases.

Palabras clave: Geometría analítica del espacio, ángulo ente dos planos, secuencia

Abstract

A didactic sequence designed with the purpose of promoting the geometric meaning of the notion of angle between two planes, is described here. The sequence is composed of three phases: Opening, Development and Closing. It is aimed at science and engineering students and its design is based on a methodology that proposes to use GeoGebra in a different way in each of its phases.

Keywords: Analytical geometry of space, angle between two planes, sequence

Introducción

La noción de ángulo entre dos planos es uno de los ejemplos más representativos, de qué tan distante puede estar un objeto matemático de la realidad, en la matemática universitaria. El estudiante puede aprender a calcular el ángulo entre dos planos (llamado a veces ángulo diedro), utilizando el producto punto entre los vectores normales a dos planos, sin tener una idea gráfica sobre la ubicación del ángulo que está calculando. Y si no puede ubicar este ángulo en una representación gráfica de los planos, difícilmente podrá hacerlo sobre la arista de un sólido que se encuentre en la realidad (Figura 1). En los cursos dirigidos a estudiantes de ingeniería, el problema no parece menor y puede darnos una idea sobre la orientación que se ha venido imponiendo a los cursos de matemáticas para futuros ingenieros, en este caso el de Geometría Analítica.

Figura 1. ¿Cuál es el ángulo entre los dos "planos"? ¿α o β o ninguno de ellos? Creación propia.

La noción de ángulo, que el estudiante conoce desde la educación básica, definida como “un conjunto de puntos que consisten en un punto P y dos semirrectas que se extienden a partir de P” (James, 1992, p. 13), es un objeto del plano que el estudiante puede representar usando la regla y el compás, medir con un transportador y usarlo para construir otros objetos geométricos sobre el mismo plano. Y aunque no es una noción exenta de dificultades de aprendizaje para el alumno (ver por ejemplo, Mullins, 2020), en cuanto se aborda la noción de ángulo entre planos, aparece de inmediato la problemática asociada a la visualización de figuras tridimensionales, que se están representando en la hoja plana de un cuaderno o en la pantalla plana de una computadora, y en donde las relaciones entre los objetos geométricos que integran dicha representación, no son fácilmente identificables ni las medidas de estos objetos pueden ser tomadas directamente de sus representaciones.

La definición de ángulo entre dos planos que aparece en algunos textos, por ejemplo, Downing (2009), pone de manifiesto las dificultades ya señaladas, al remitir a la definición de ángulo en un plano

> “la figura formada por la intersección de dos planos. Si se considera la intersección de dos rectas, una en cada plano, que son ambas perpendiculares a la recta de intersección de los planos. Entonces el ángulo entre estas dos rectas es el tamaño del ángulo diedro” (pp. 99-100).

En el trabajo hemos tomado en cuenta las dificultades que se presentan cuando la relación espacio-plano se hacen presente, en particular las señaladas por Duval (2017), quien asegura al respecto que:

> “La solución de un problema de geometría ‘en el espacio’ requiere necesariamente una operación de deconstrucción dimensional, i.e. *ver la forma 2D obtenida por la intersección de un sólido con algún plano en el espacio,* y no alguna habilidad para ver en ‘el espacio’” (p. 65)

En algunos libros de Geometría Analítica, un ángulo entre dos planos se define simplemente como “el ángulo que forman sus normales respectivas” (Lehmann, 1972, pp. 350-351) e inmediatamente se pasa a proponer la siguiente fórmula para calcularlo:

$$cos\theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

En donde $[A, B, C]$ y $[A', B', C']$ son los números directores respectivos de las rectas normales a los planos:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

En otros textos como Raichman y Totter (2016) se recurre a los vectores normales a los planos y luego simplemente se propone una expresión para el $\cos\theta$, en términos del producto punto, desarrollada previamente para dos vectores arbitrarios (Figura 2). El tema, a diferencia de los inmediatamente anteriores, no aparece ilustrado con ninguna gráfica.

Definición: El ***ángulo*** θ entre dos planos es el ángulo que determinan sus respectivos vectores normales. Es decir:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{n}_{\pi 1} \cdot \boldsymbol{n}_{\pi 2}}{\|\boldsymbol{n}_{\pi 1}\| \|\boldsymbol{n}_{\pi 2}\|}$$

Por lo tanto, hay dos valores para este ángulo, suplementarios entre sí.

Teniendo en cuenta las componentes de los vectores normales, esta ecuación se puede escribir como sigue:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$

Figura 2. Definición de ángulo entre planos, tomada de Raichman y Totter (p. 55).

La misma expresión anterior para el $\cos\theta$, como el producto punto entre vectores normales, dividido entre el producto de las normas de los mismos, puede verse en Edwards y Penney (1996), aunque en este caso se hace referencia a la representación gráfica de la intersección de dos planos y al ángulo que forman entres sí los vectores normales a ellos (Figura 3).

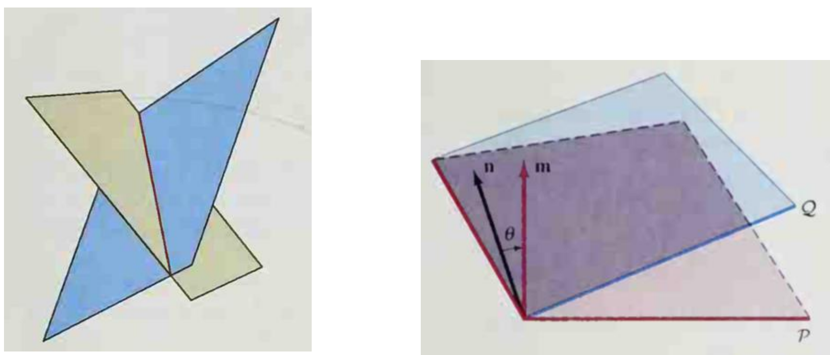

Figura 3. Representaciones gráficas utilizadas para explicar la noción de ángulo entre dos planos en Edwards y Penney (pp. 709-710).

En cambio, en Castañeda (2000) hay un intento por ubicar gráficamente el ángulo entre dos planos. A pesar de las limitaciones de las representaciones gráficas y de la informalidad de los argumentos geométricos presentados, la explicación retoma un problema crucial: la reducción al plano de la situación tridimensional (Figura 4)

a) Ángulo entre dos planos

Sean los planos P y Q de la figura 3.11. Si estos planos se ven de canto, con sus respectivos vectores normales, en la figura 3.12:

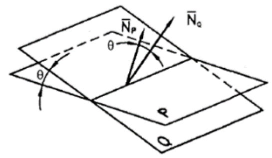

FIGURA 3.11

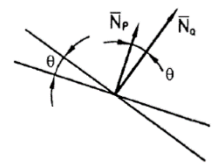

FIGURA 3.12

Por un teorema de la Geometría Elemental que relaciona el ángulo formado por rectas respectivamente perpendiculares, se tiene que el ángulo formado por los planos es igual al formado por sus vectores normales; es decir:

$$\theta = \text{ang cos } \frac{\overline{N_P} \cdot \overline{N_Q}}{|\overline{N_P}|\,|\overline{N_Q}|}$$

Figura 4. Una explicación geométrica sobre la relación entre el ángulo entre dos planos y el ángulo entre sus vectores normales, tomada de Castañeda (p. 109).

El tema de ángulo entre planos aparece también en los textos de Álgebra Lineal, aunque el tratamiento es esencialmente el mismo, excepto porque ya no se hace alusión a los números directores y se usan solo los vectores normales a los planos respectivos, ver por ejemplo (Grossman, 1987, p. 174), en donde la definición de ángulo entre dos planos es apenas enunciada en uno de los ejercicios.

El enfoque observado en los textos, permite a los estudiantes reproducir el procedimiento estipulado en la fórmula para el cálculo del ángulo, pero tienen serias dificultades para ubicar en tres dimensiones el ángulo que están calculando y las características geométricas de este ángulo presentes en la definición.

Elementos teóricos

Aunque las presentaciones puramente algebraicas del ángulo entre planos son matemáticamente correctas, lo que muestran los textos anteriores en general, es una despreocupación por abordar la significación gráfica de esta noción, y poco o nulo interés en la promoción de la conversión gráfico-algebraica en el sentido propuesto por Duval.

> En otras palabras, *no es suficiente yuxtaponer representaciones de diferentes registros para que los estudiantes "vean" las correspondencias entre las unidades de significado matemáticamente relevantes de las diferentes representaciones yuxtapuestas*. Es por eso que la conversión de las representaciones es el primer umbral de comprensión matemática. Es en esta clase de transformaciones que los estudiantes puedan tomar conciencia del funcionamiento representacional específico de cada registro. Duval (2017, p. 70)

Esta desconexión entre la organización y presentación formal de los conceptos matemáticos, va en contra de su desarrollo cognitivo. La utilidad de las representaciones algebraicas en geometría, viene de su conexión con las representaciones gráficas, de la posibilidad de transitar entre ambos registros, en palabras de Duval, "en matemáticas, nunca pensamos en un solo registro, sino en varios a la vez, incluso si las producciones explícitas favorecen un solo registro" (2017, p. 83). De tal manera, la enseñanza restringida a un tipo de representaciones limitaría el desarrollo de esta habilidad y por lo tanto del aprendizaje de los conceptos.

Más allá de la exposición de distintas representaciones, para realizar conversiones entre registros se vuelve necesario identificar qué es *matemáticamente relevante* en cada representación. Identificar estas *unidades de significado relevante,* es una habilidad fundamental que se entrelaza con la operación de conversión y permite la comprensión de los objetos matemáticos representados. Sin embargo, para distinguir las unidades de significado matemáticamente relevantes, es necesario realizar conversiones a otro registro (Duval, 2017, p. 77). Nos enfrentamos entonces a una aparente contradicción, en la que, para desarrollar la habilidad de conversión, es necesario la identificación de unidades de significado, pero para esta identificación, es necesaria la operación de conversión. La propuesta de Duval para salir de este círculo vicioso, es el desarrollo de ambas habilidades en *tareas de reconocimiento* de unidades de significado.

En las tareas de reconocimiento de unidades, "el contenido de las representaciones iniciales necesita ser variado en una forma sistemática y cada variación del contenido debe ser comparada con la representación correspondiente en el otro registro" (Duval, 2017, p. 77). El objetivo de estas tareas es básicamente aislar las unidades de significado mediante la exploración sistemática de sus variaciones. De esta manera, se distinguen las tareas de reconocimiento de las tareas más globales de resolución de problemas: "las tareas de reconocimiento se eligen en función de las variables cognitivas que pueden identificarse mediante el método de análisis de las producciones matemáticas que acabamos de presentar" (p. 81).

En concordancia con los anteriores elementos teóricos, la propuesta que se presenta se basa inicialmente en tareas de reconocimiento de las unidades de significado en las representaciones de ángulos entre planos. A partir de la manipulación sistemática de representaciones gráficas y su comparación con las representaciones numéricas (medidas de los ángulos), se deduce el significado del ángulo entre planos y la necesidad matemática de su definición. Posteriormente, se presentan tareas de construcción gráfica y de conversión al registro algebraico, de manera que se permita construir expresiones como las mencionadas arriba para el cálculo de los ángulos entre planos. Finalmente, se plantean tareas de resolución de problemas sobre ángulos, donde los estudiantes podrían iniciar el abordaje a partir de la identificación de las unidades de significado estudiadas y la aplicación de las conversiones y tratamientos desarrollados.

La secuencia didáctica

Con el propósito de promover el significado geométrico que tiene el ángulo entre dos planos, hemos diseñado una secuencia didáctica, en la que usamos GeoGebra como herramienta para la manipulación de construcciones geométricas dinámicas, la secuencia parte del supuesto de que los estudiantes ya han aprendido a calcular el ángulo entre dos planos a partir de sus ecuaciones y tiene una estructura didáctica integrada por las fases de Apertura, Desarrollo y Cierre. El diseño está basado en la metodología descrita en Soto (2019).

La Apertura de la secuencia está compuesta de dos partes, en una primera se presenta la fotografía de la fachada de una casa en la que dos de sus muros han sido resaltados (Figura 5) y se pone a discusión de los estudiantes cómo medirían el ángulo entre estos dos muros planos. La idea aquí es que puedan comparar sus procedimientos de cálculo con un problema real, si hay conceptos entre los utilizados para el cálculo, que pudieran ser utilizados y si pudieran valerse de algún instrumento para medirlo.

Figura 5. Fachada de casa habitación presentada a los estudiantes, para que expliquen cómo podrían calcular el ángulo entre los muros resaltados.

En una segunda parte, se proporciona al estudiante una construcción en GeoGebra, en la que se muestra una barda sobre la cual se ha recargado una varilla y se simula el movimiento de las sombras proyectadas por la varilla conforme avanza el día. El propósito aquí es mostrar que hay una infinidad de ángulos que pueden trazarse en dos planos (representados aquí por el piso y la barda) manteniendo el vértice sobre la recta de intersección entre ellos. El estudiante podrá manipular el ángulo de elevación del sol a través de un deslizador y explorar los valores de los ángulos formados por la sombra que la varilla proyecta sobre la barda y el piso. La barda está orientada de oriente a poniente (Ver Figura 6)

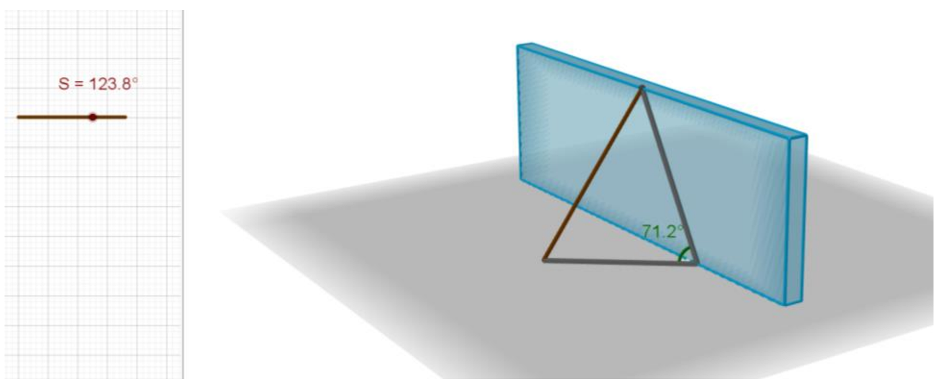

Figura 6. La proyección de la sombra de una varilla recargada sobre una barda. Construcción propia.

En esta parte el estudiante tendrá que responder una serie de preguntas que lo lleven a identificar algunos elementos de la construcción, por ejemplo, la recta de intersección entre el plano del piso y el plano de la cara frontal de la barda. A partir de hacer variar el ángulo de elevación del sol, observará la variación del ángulo formado por las sombras y seleccionará el que a su juicio es el ángulo entre los dos planos. Se pretende además que establezca la relación entre el plano del ángulo formado por las sombras con la recta de intersección entre los dos planos.

El Desarrollo de la secuencia está integrada por tres partes, en la primera se proporciona una construcción en la que se ha trazado un tetraedro de arista 8 y el plano que pasa por los vértices A, B y D (Figura 7). Se trata aquí de calcular el ángulo entre las caras ABD y ABD del tetraedro, utilizando el procedimiento algebraico ya conocido. El cálculo se realiza a partir de las ecuaciones de los planos proporcionados por la vista algebraica de GeoGebra.

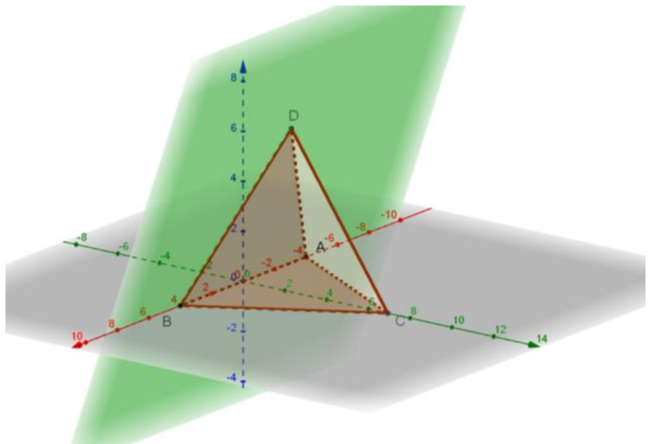

Figura 7. Dos de los planos determinados por las caras de un tetraedro.

En la segunda parte se proporciona una construcción en la que se ha trazado un tetraedro, un plano que pasa por los vértices C y D y por un punto P sobre AB que puede arrastrarse sobre este segmento para hacer variar el plano. La construcción puede verse en la Figura 8.

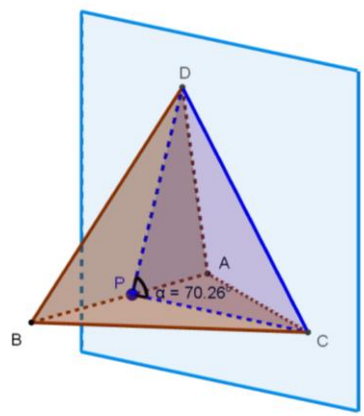

Figura 8. Un tetraedro cortado por un plano que pasa por una de sus aristas e interseca en P a la arista opuesta.

En el tetraedro se ha trazado el ángulo CPD, en donde P es un punto sobre la arista AB, que puede ser arrastrado haciendo variar el ángulo CPD. Se ha trazado también el plano sobre el que se mantiene el ángulo CPD. La idea aquí es arrastrar el punto P hasta que se aproxime lo más que se pueda al ángulo calculado antes algebraicamente. Una vez obtenida la aproximación, se plantea el problema de establecer la posición relativa del plano que contiene al triángulo CPD con respecto a la arista AB. Si esta posición no es clara, se puede pedir a GeoGebra que muestre los ejes coordenados de la vista 3D.

En tercera y última parte del Desarrollo, se presenta al estudiante una construcción con dos planos graficados (planos verdes en la Figura 8), en los que tendrá que trazar el ángulo entre ellos y solicitar a GeoGebra la medida de este ángulo. En las instrucciones se le indica cómo trazar un plano perpendicular a la recta de intersección entre los dos planos originales (plano color rosa en la Figura 8). Una vez que el ángulo entre los planos se haya trazado, el archivo debiera verse como se muestra en la Figura 9.

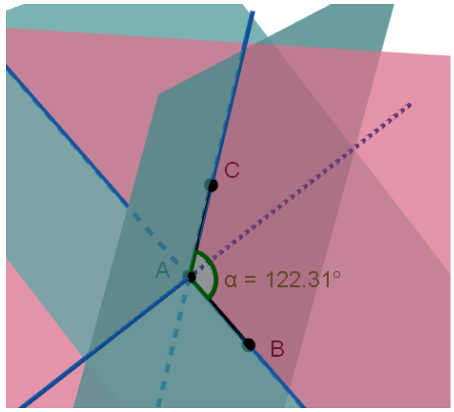

Figura 9. Ángulo determinado por un plano perpendicular a la recta de intersección de otros dos planos.

Posteriormente el estudiante usará los coeficientes de la representación algebraica de los dos planos dados para trazar sus respectivos vectores normales, solicitar a GeoGebra el valor del ángulo que forman estos vectores y rotar la construcción hasta que la construcción pueda verse como en la Figura 10. Para finalmente comparar en esta figura, el ángulo entre los planos con el ángulo entre los vectores normales.

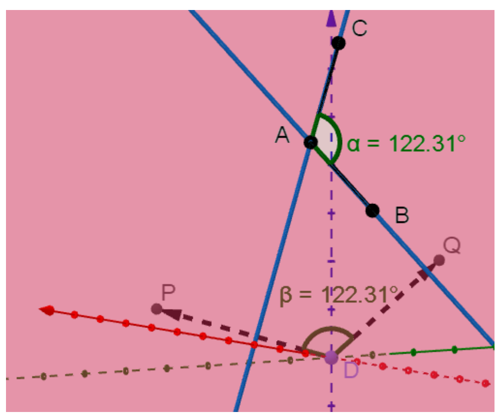

Figura 10. Una rotación de la construcción, hasta que la recta de intersección de los planos originales se vea como un punto.

Al final de la etapa de Desarrollo calculará ángulo β que forman los vectores normales, usando la fórmula:

$$cos\beta = \frac{ae + bf + cg}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{e^2 + f^2 + g^2}}$$

Donde los vectores (a, b, c) y (e, f, g) son los vectores normales a los planos, cuyas ecuaciones son: $ax + by + cz = d$ y $ex + fy + gz = h$ y comparará el valor obtenido de β con el valor mostrado en la gráfica construida en GeoGebra.

La etapa de Cierre está dedicada a justificar geométricamente por qué, en general, en la construcción de la Figura 9, los ángulos α y β son siempre iguales, para ello se utiliza la gráfica de la Figura 11, en la que se analizan los ángulos internos del cuadrilátero AFDE. Primero se establece qué tipo de ángulos son los ángulos DFA y AED y cómo podría justificarse su respuesta. Con base en la respuesta dada a la pregunta anterior, los estudiantes tendrán que obtener la suma de los ángulos β = EDC y FAD por una parte y por otra establecer cuánto suman los ángulos α =EAC y FAE. La igualdad entre α y β se deduce de las dos igualdades anteriores.

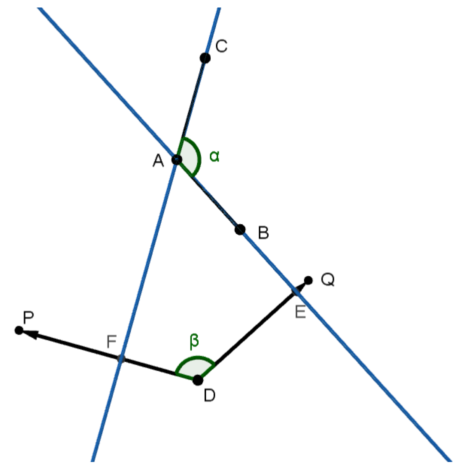

Figura 11. Una representación plana del problema, para demostrar que $\alpha = \beta$.

Comentarios finales

La presente secuencia forma parte del diseño de materiales de enseñanza, que estamos elaborando para una nueva versión del curso de Geometría Analítica que se ofrece a los estudiantes del área de Ciencias e Ingeniería en la Universidad de Sonora.

La secuencia didáctica descrita aquí fue diseñada antes de que iniciara la pandemia que sufrimos actualmente, por esta razón no se ha podido experimentar en un curso presencial. Los resultados obtenidos hasta ahora en tres cursos impartidos en modalidad no presencial son alentadores, pero hemos tenido algunas dificultades técnicas para recoger datos experimentales en esta modalidad.

Referencias bibliográficas.

Castañeda, É. (2000). *Geometría analítica en el espacio*. México: UNAM, Facultad de Ingeniería.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking–The Registers of Semiotic Representations*. Switzerland: Springer International Publishing.

Downing, D. (2009). *Dictionary of Mathematics Terms*. Hauppauge, NY: Barron's Educational Series.

Edwards, C. y Penney, D. (1996). *Cálculo con geometría analítica*. México: Prentice Hill.

Grossman, S. (1988). *Álgebra Lineal*. México: McGraw-Hill.

James, R. (1992). *Mathematics Dictionary*. NY: Chapman & Hall.

Lehmann, Ch. (1972). *Geometría Analítica*. México: UTEHA.

Mullins, S. (2020). Angling for the Right Result: Students' Conceptualizations of Angles. *Journal of Research in Education*, *29*(1), p. 1-47.

Raichman S. y Totter, E. (2016). *Geometría analítica para ciencias e ingenierías*. Mendoza: Universidad Nacional de Cuyo.

Soto, J. L. (2019). La inclusión de GeoGebra en el diseño de actividades didácticas en matemáticas, En Quiroz, S., Núñez, E., Saboya, M. y Soto, J-L. (Eds) *Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico* (pp. 97-112). México: Editorial Amiutem.