

---

# Introducción a los conceptos de variabilidad y proporcionalidad

José Luis Orozco Tróchez  
Proyecto "Juega y Construye la Matemática"  
<http://sites.google.com/site/timatematicas/>  
<http://www.math-and-thechnology.webs.com>  
<http://www.mathfuncion.blogspot.com>  
e-mail: [joselot2007@yahoo.es](mailto:joselot2007@yahoo.es)

Colegio Champagnat Bogotá

**Resumen.** A través de varias experiencias, sencillas y fáciles de desarrollar en el aula de clase, se inducirá a los estudiantes para que reconozcan la forma como varían, directa e inversamente dos magnitudes, de tal forma, que logren caracterizarlas; luego con los datos obtenidos de la práctica y con la ayuda de los programas para computador (Excel, Geogebra y TI-NspireCas) se encontrará la tendencia de los datos, acercándolos al concepto de modelación matemática.

**Palabras claves:** Variabilidad, proporcionalidad, tendencia, modelo, asistentes matemáticos, TI-NspireCas y Geogebra.

## 1. Variación y modelación matemática

1.1 *Variación.* “La variación o cualidad de las cosas que tienden a cambiar o a transformarse, da la posibilidad de construir modelos. En la vida práctica y en el mundo científico, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables.”<sup>1</sup> Por ejemplo al determinar el tiempo que gasta un auto para recorrer una determinada distancia cuando viaja con una determinada velocidad.

1.2 *Modelación matemática.* El modelo es una representación formal cuantitativa o cualitativa, de un proceso o fenómeno, que se formula a través de expresiones matemáticas, en las que se muestra la relación que se da, entre las variables que intervienen en el proceso.

El pensamiento variacional permite la modelación, entendida esta, como el desarrollo del pensamiento matemático y no solo, como la resolución de problemas. La modelación es el

---

<sup>1</sup> Ana Celia Castiblanco, Luis Moreno Armella, Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales, edición MEN, año 2004..

arte de producir modelos, no es una ciencia, no existe lógica alguna para construir modelos, pero si para ponerlos a prueba.

Un modelo matemático es el resultado del estudio de varios casos y del análisis de datos, que expresa: proposiciones y hechos, relacionado variables y/o operaciones, para estudiar los comportamientos de sistemas complejos difíciles de observar en la realidad. La rama de la matemática encargada de estudiar las propiedades de los modelos es la teoría de modelos.

Las actividades aquí propuestas conllevan a un tipo de modelo empírico porque utiliza las observaciones directas o los resultados de experimentos del fenómeno estudiado, pero también puede ser un modelo cualitativo o conceptual ya que utiliza figuras, gráficos o descripciones causales, para predecir a donde tiende el comportamiento de los datos y si aumenta o disminuye alguna magnitud. Márquez O. (2005), señala que “La modelación relacionada con sistemas de representaciones integra: símbolos, signos, figuras, gráficas y construcciones geométricas. Éstos expresan el concepto y suscriben en sí mismos el modelo con el cual es posible interpretar y predecir comportamientos de fenómenos físicos”<sup>2</sup>

## 2. Proporcionalidad

Hasta el final del siglo XVIII, el estudio de la proporcionalidad se hacía con base en la comparación de números, donde se estudiaban razones y progresiones y se desarrollaban una gran variedad de situaciones problema utilizando la regla de tres pero hay que tener en cuenta que el concepto de variabilidad está bastante relacionado con el concepto de proporcionalidad y este desde sus orígenes ha estado presente en el estudio del mundo que rodea al hombre y en la solución de muchas situaciones problema de las ciencias del conocimiento, entre ellas: la física, la química y la biología. Así, por ejemplo el hombre, al no poder medir directamente distancias, ha buscado métodos que le permitan compararlas y así poder expresarlas por medio de relaciones numéricas.

Según Jean Piaget, la noción de proporcionalidad ““se encuentra en el nivel de las relaciones formales, es decir, que las operaciones no se realizan directamente sobre los objetos sino que se trata de operaciones de operaciones””<sup>3</sup>

Con el desarrollo de este taller busca inducir al estudiante para que construya la noción de proporcionalidad haciendo hincapié en la razón entre cantidades diferentes de la misma magnitud, para luego iniciarlos en la construcción del concepto de modelación, tomando como recurso los datos y hallando con ellos la línea de tendencia y la expresión que resulta al representarlos en el plano cartesiano.

---

<sup>2</sup> Márquez O. (2005). La modelación matemática: Alternativa didáctica en la enseñanza de precálculo. UIPR-Ponce Vol. 1

<sup>3</sup> <http://cmc.ihmc.us/cmc2006Papers/cmc2006-p10.pdf>

Comprendido el concepto de proporción como una relación entre números o magnitudes, dicha relación puede darse en dos sentidos: Las dos magnitudes pueden aumentar o disminuir o bien si una de las magnitudes aumenta la otra disminuye o viceversa. De esta forma se tiene:

**2.1 Magnitudes directamente proporcionales**

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el doble, triple,...,de la cantidad de la primera corresponde doble, triple,...,de la cantidad de la segunda, es decir, dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el cociente entre ellas es

constante  $\frac{x}{y} = k$ , esto significa que x es directamente proporcional a y.

**2.2 Magnitudes inversamente proporcionales**

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al doble, triple,...,de la cantidad de la primera corresponde la mitad, la tercera parte,...,de la cantidad de la segunda, es decir, dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el producto entre ellas es constante  $xy = k$ , esto significa que x es inversamente proporcional a y

Una actividad interesante antes de formalizar el concepto de proporcionalidad inversa, puede ser la siguiente:

Los estudiantes forman grupo de dos; cada grupo tiene como recurso 24 fichas del mismo tamaño y con ellas forma un rectángulo de tal forma que tenga como base una ficha y como altura 24 fichas. Solicite a los estudiantes que teniendo en cuenta la acción anterior formen otros rectángulos aumentando el número de fichas de las base, dibujen cada situación y completen la siguiente tabla.

Número de fichas en la base del rectángulo.	1	2	3	4	6	8	12	24
Total de fichas que representan la altura del rectángulo.								

Esta actividad ayudará a comprender que si se aumenta el número de fichas para representar la longitud de la base, disminuirá el número de fichas utilizadas para representar la longitud de la altura, sin variar el total de fichas, que en este caso son 24.

La resolución de problemas con información y datos recolectados de fenómenos físicos y de experiencias desarrolladas por los estudiantes, es otra alternativa metodológica para la aprehensión de conceptos de la matemática en el aula de clase.

### 3. Taller

#### 3.1 *Propósitos generales:*

- A través de una experiencia sencilla y práctica observar la variación directa e inversa de dos magnitudes,
- Modelar matemáticamente una situación real, c) Utilizar asistentes matemáticos para hallar la curva de tendencia de los datos tomados de una situación real.

#### 3.2 *Variación directa de dos magnitudes.*

Para el desarrollo de esta actividad se requieren los siguientes recursos: Un espejo pequeño, un pedazo de plastilina, una cinta métrica (Por ejemplo las utilizadas por los sastres), la hoja electrónica Excel o uno de los asistentes matemáticos: TI-Nspire, Geogebra y Curve Expert 1.37.

3.2.1 *Metodología de trabajo.* Para el desarrollo de la actividad se realiza el siguiente proceso:

- Trabajar en grupo de tres (A, B y C).
- Pegar un pedazo de plastilina sobre la pared, a 80 cm del piso, dejarlo fijo durante el desarrollo de la actividad.
- Ubicar sobre el piso, el espejo a 50 cm del borde de la pared.
- El representante del grupo A del grupo, se ubica después del espejo en línea recta, frente a la plastilina; luego se desplaza hacia adelante o hacia atrás hasta observar en la mitad del espejo la plastilina; siempre en posición erguida (este trabajo lo debe desarrollar la misma persona durante el desarrollo de toda la actividad).
- El representante B del grupo con la cinta métrica mide distancia entre el borde de la pared y el tobillo del representante A, (siempre desde el borde de la pared hasta el tobillo).
- El representante C del grupo consigna este resultado, en la tabla 1.
- Continuar el proceso se modificando la distancia entre el espejo y el borde de la pared, hasta completar la tabla 1.



Distancia en <i>cm</i> , de la pared hasta el espejo.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
Distancia en <i>mm</i> , desde la pared hasta el tobillo.											

Distancia de la pared hasta el espejo en <i>cm</i>	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155
Distancia desde la pared hasta el tobillo en <i>mm</i>											

Tabla 1

### 3.3 Variación inversa de dos magnitudes.

La metodología de trabajo para el desarrollo de esta actividad es la siguiente:

- Trabajar en grupo de tres (A, B y C).
- Ubicar sobre el piso, el espejo a 80 cm del borde de la pared, dejarlo fijo durante el desarrollo de la actividad.
- Pegar un pedazo de plastilina sobre la pared, a 50 cm del piso.
- El representante A del grupo, se ubica después del espejo en línea recta frente a la plastilina; luego se desplaza hacia adelante o hacia atrás hasta observar en la mitad del espejo la plastilina; siempre en posición erguida (este trabajo lo debe desarrollar la misma persona durante todo el desarrollo de la actividad).
- El representante B del grupo con la cinta métrica mide distancia entre el borde de la pared y el tobillo del representante A, (siempre desde el borde de la pared hasta el tobillo).
- El representante C del grupo consigna este resultado en la tabla 2.
- Continuar el proceso se modificando la distancia entre el espejo y el borde de la pared, hasta completar la tabla 2.



Distancia en <i>cm</i> , del borde de la pared hasta la plastilina.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
Distancia en <i>mm</i> , desde la pared hasta el tobillo.											

Distancia en <i>cm</i> , del borde de la pared hasta la plastilina.	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
Distancia en <i>mm</i> , desde la pared hasta el tobillo.										

Tabla 2.

### 3.4 Responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué diferencia una actividad de la otra?
- ¿En cada experiencia como varía una magnitud con respecto a la otra? Descríbalo.
- ¿Encuentra algún tipo de relación entre las dos magnitudes trabajadas en las experiencias anteriores?
- ¿Cuál es la ecuación matemática que relaciona el comportamiento de las dos variables?
- Describe otra situación en la que se de algún tipo de variación parecida a la presentada en las dos actividades anteriores.

### 3.5 Representación gráfica de los datos obtenidos y modelación matemática de los mismos (línea de tendencia).

3.5.1 Metodología de trabajo. La metodología de trabajo es como sigue:

- Active la hoja electrónica Excel.
- Digite los datos registrados en la tabla 1 en las columnas **A** y **B**.
- Seleccione los datos y haga clic en las opciones: INSERTAR, DISPERSIÓN, en la ventana que se activa, haga clic en el primer icono “DISPERSIÓN SOLO CON MARCADOS”, como se muestra en la figura 1.
- Haga con el botón derecho del Mouse sobre uno de los puntos y seleccione AGREGAR LÍNEA DE TENDENCIA, en la ventana que se activa en la opción tipo de TENDENCIA O REGRESIÓN seleccione (lineal).
- Haga clic en las siguientes opciones: SEÑALAR INTERSECCIÓN, PRESENTAR ECUACIÓN EN EL GRÁFICO Y EN PRESENTAR EL VALOR DE R CUADRADO EN EL GRÁFICO.

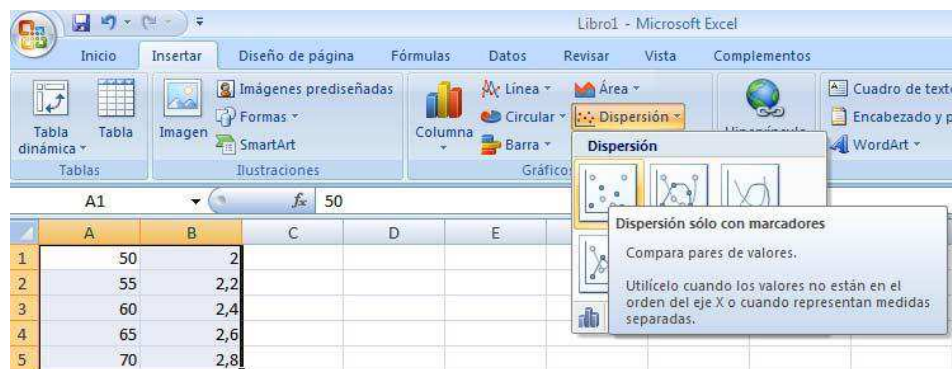


Figura 1

3.5.2 Otros asistentes matemáticos. **Curve Expert 1.37**. Este software es de tipo shareware<sup>4</sup> que permite graficar un conjunto de datos en el plano y realizar prácticamente cualquier ajuste a los mismos, incluyendo ajuste lineal, parabólico, exponencial, gaussiano, polinomial. De la página <http://didactica.fisica.uson.mx/soft/index.html>, puede descargar el programa.

**TI-Nspire Cas**. Es uno de los últimos y más completos asistentes matemáticos para el trabajo en el aula de matemática, diseñado con intencionalidad pedagógica. Se puede bajar de la página <http://education.ti.com/educationportal/downloadcenter/SoftwareDetail.do?website=US&tabId=1&appId=6769>.

<sup>4</sup> Se denomina shareware a los programas que el usuario puede evaluar de forma gratuita, pero podrá utilizarlo con algunas limitaciones. Para adquirir una licencia que permita el uso del software de manera completa se requiere de un pago económico.



### 3.5.3 Ecuación de regresión lineal y coeficiente de correlación.

a) Active el programa TI-Nspire.



b) Haga clic en: INSERTAR, LISTAS Y HOJA DE CÁLCULO.

c) Haga clic en: ARCHIVO, CONFIGURACIÓN, CONFIGURAR DOCUMENTO, y modifique los datos como se muestra en la figura 2.

d) Haga clic con el botón derecho de mouse sobre la letra (Nombre de la columna), seleccione las opciones: VARIABLES, ALMACENAR VARIABLE y digite **d\_espejo**, como nombre de la variable que contiene los datos de la **columna A**. Repita este proceso con la columna **B**. Figura 3.

e) Digite los datos como se muestra en la figura 4.

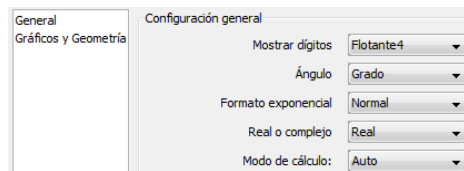


Figura 2

A d_espejo	B d_persona
50	2
55	2.2
60	2.4
65	2.6
70	2.8

Figura 3

f) Haga clic sobre la letra **A**, nombre actual de la columna.

g) Presione simultáneamente la tecla SHIFT o mayúscula sostenida y flecha a la derecha, para seleccionar la columna **A** y la columna **B**.

h) Haga clic en el icono cuatro (Estadística) y luego en: CÁLCULOS ESTADÍSTICOS, REGRESIÓN LINEAL, figura 5.

i) Complete la ventana que se activa como se muestra en la figura 6.

j) Los resultados esperados se muestran en la figura 7.

	A	B	C
1	50	2	
2	55	2.2	
3	60	2.4	
4	65	2.6	
5	70	2.8	

Figura 4.

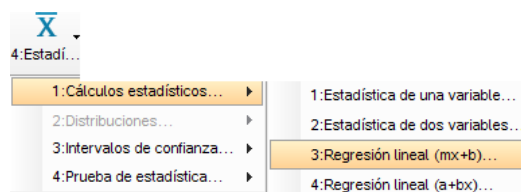


Figura 5

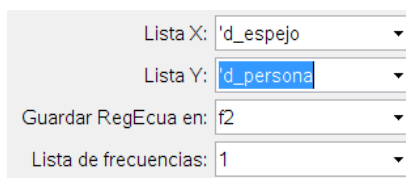


Figura 6

A d_espejo	B d_persona	C	D
			=LinRegMx('d_espejo','d_per
50	2	Título	Regresión lineal (mx+b)
55	2.2	RegEqn	m*x+b
60	2.4	m	0.04
65	2.6	b	0.
70	2.8	r <sup>2</sup>	1.
		r	1.
		Resid	{0.,0.,0.,0.,0.}

Figura 7

3.5.4 *Construcción de la gráfica.* Para ello realice lo siguiente:

- Haga clic sobre la letra **A**, nombre actual de la columna.
- Presione simultáneamente la tecla SHIFT o mayúscula sostenida y flecha a la derecha, para seleccionar la columna **A** y la columna **B**.
- Haga clic en el icono tres (Datos) y luego en GRÁFICO RÁPIDO. Figura 8.
- El resultado esperado se muestra en la figura 9.

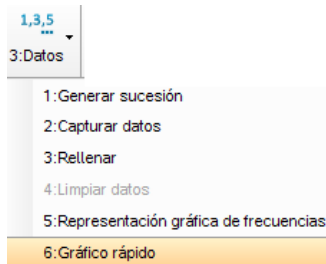


Figura 8

A	B	C
d_espejo	d_persona	
		Títul
50	2.2	Reg
55	2.4	m
60	2.6	b
65	2.8	r <sup>2</sup>
70		r
		Res

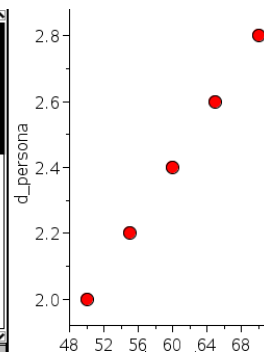


Figura 9

## Referencias bibliográficas

- Ana Celia Castiblanco, Luis Moreno Armella, Henry Urquina Llanos, Martha Bonilla, Jaime H. Romero, Pensamiento Estadístico y Tecnologías Computacionales, edición MEN, año 2004.
- Ana Celia Castiblanco, Luis Moreno Armella, Henry Urquina Llanos, Leonor Camargo, Tecnologías Informáticas en el currículo de matemáticas de la educación secundaria, edición MEN, año 2004.
- Ana Celia Castiblanco, Luis Moreno Armella, Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, edición MEN, año 2004.
- Ana Celia Castiblanco, Luis Moreno Armella, Tecnología Computacional en el currículo de matemáticas, memorias del congreso internacional, edición MEN, año 2003.
- Aspinwal L., Shaw K. & Presmeg (1997). Uncontrollable mental imaginary: Graphical Connections between a function and its derivative. Educational Studies in Mathematics 33: 301-317. Kluwer Academic Publishers.
- Astolfi J.P. (1999). El "error", un medio para enseñar. Diada. Sevilla.
- Bachelard, G. (1994). La formación del espíritu científico. Siglo XXI. Madrid.
- Ben-Chaim, Lappan & Houang. (1989). "The Role of visualization in the middle school mathematics curriculum". Focus Learning Problems in Mathematics. Winter Edition, Vol. 11, N.1. p. 49-60.
- Bermejo, V. (1990). El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas. Editorial Paidós. Argentina.
- Brousseau G. Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemática (<http://fractus.mat.uson.mx>)



- Fiol Mora, M.L. - Fortuny Aymemí, J.M. Proporcionalidad directa. La forma y el número. Editorial Síntesis (1990).
- Hitt (1997). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. Departamento del Matemática Educativa, Cinvestav- IPN. México.
- Hitt F. (1993). Simulación de fenómenos físicos vía la microcomputadora para la formación de conceptos matemáticos. Memorias del Quinto Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Mérida, Yucatán.
- [http://jemte.javerianacali.edu.co/presentaciones/Coherencia\\_externa\\_en\\_el\\_curriculo\\_de\\_matematica-Angel.pdf](http://jemte.javerianacali.edu.co/presentaciones/Coherencia_externa_en_el_curriculo_de_matematica-Angel.pdf)
- Salinas Ruiz, A. Dificultades matemáticas del alumnado de Enseñanzas Medias para la adquisición de conceptos cuantitativos en Ciencias Físico-químicas. (Currículum N°6. <[http://](http://www.quadernsdigitals.net) <[http://](http://www.quadernsdigitals.net)