



Estrategias de resolución de problemas de división reparto y medida con fracciones por estudiantes de Educación Primaria

Elisa Sanjuán Cremades

Ibi, España, elisasanjuan.maestra@gmail.com

Fecha de recepción: 23-04-2021

Fecha de aceptación: 04-05-2021

Fecha de publicación: 12-06-2021

RESUMEN

El objetivo de este estudio es identificar el nivel de éxito y las estrategias usadas por estudiantes de Educación Primaria al resolver problemas de grupos múltiples con fracciones. Los participantes fueron 149 alumnos desde 1º hasta 6º curso de Educación Primaria. El instrumento de recogida de datos fue un cuestionario con cuatro problemas: dos de división-medida y dos de división reparto, que se adaptaron para cada uno de los niveles educativos. Los resultados muestran que los alumnos del primer ciclo tienen mayor éxito en los problemas de división-medida; en el segundo ciclo se obtiene el mismo nivel de éxito en ambos tipos de problemas; y, en el último ciclo, más nivel de éxito en los problemas de reparto. Asimismo, las estrategias más utilizadas en los problemas de división-medida fueron las multiplicativas y el modelaje directo; y en los de reparto las estrategias más empleadas fueron la coordinación aditiva y multiplicativa. Además, los estudiantes de los primeros niveles presentan más variedad de estrategias que los de los niveles superiores.

Palabras clave: división-medida; división reparto; educación primaria; estrategias; fracciones; niveles de éxito; problemas de grupos múltiples.

Problem solving strategies of partitive and measurement division used by students of Primary Education

ABSTRACT

The main objective of this study is to examine the strategies employed by primary school students when solving problems of measurement division and partitive division with fractions. The participants were 149 students from 1st to 6th grade of Primary Education. The data collection instrument was a questionnaire with four problems: two of measurement division and two of partitive division, which were adapted for each of the educational levels. The results show that students in the first cycle are more successful in the problems of measurement division; in the second cycle, the same success is obtained in both types of problems; and, in the third cycle, students achieve more success in the partitive division. In the same way, the most used strategies in the measurement division problems were the multiplicative ones and direct modeling; while in the partitive division the most used strategies were the additive and multiplicative coordination. In addition, students from the first levels have more variety of strategies than those of the higher levels.

Keywords: fractions; levels of success; measurement division; partitive division; primary education; problems of multiple groups; strategies.

1. Introducción

Un momento decisivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria se presenta con la introducción de los números racionales, en particular, las fracciones. La importancia de desarrollar introducir las fracciones, los números decimales, los porcentajes, la razón y la proporción de manera relacionada se debe a que forman una estructura que comparte ciertos aspectos matemáticos y psicológicos (Llinares, 2003). Por ello, cabe resaltar la relevancia del aprendizaje de las fracciones para su uso en los diferentes contextos cotidianos, como por ejemplo en la aplicación de repartos, así como la necesidad de estudiar las fracciones para preparar y ayudar a los alumnos a comprender, posteriormente, los contenidos algebraicos. Si los alumnos comprenden la aritmética, en las siguientes etapas serán capaces de solucionar problemas y generar ideas en torno al álgebra.

La dificultad para aprender fracciones es reconocida internacionalmente. Estudios recientes señalan que la enseñanza centrada en las relaciones entre las cantidades y en el desarrollo de la comprensión de los estudiantes acerca de las fracciones y los decimales, ayuda a los estudiantes a ver las "fracciones conectadas con otras cosas que saben sobre el número y las operaciones. De esta manera, el aprendizaje de las fracciones construye la comprensión de los estudiantes como un todo integrado y los prepara para el aprendizaje futuro" (Empson y Levi, 2011, p. 19).

El aprendizaje de las fracciones es considerado un requisito previo para el estudio del álgebra en Educación Secundaria Obligatoria, ya que ofrece a los estudiantes la oportunidad de explorar las relaciones matemáticas que constituyen las relaciones básicas en álgebra. Estas relaciones se reflejan en ciertas operaciones como la adición, sustracción, multiplicación y división, las cuáles funcionan tanto en el álgebra como en la aritmética (Empson y Levi, 2011).

Para lograr dicha finalidad, en el presente estudio se introducirán las fracciones a los estudiantes mediante la resolución de problemas, con el objetivo de conocer si los estudiantes de diferentes niveles son capaces de resolver problemas de grupos múltiples, donde comienzan a aparecer fracciones o bien en el enunciado o bien en la incógnita, haciendo uso del pensamiento relacional u otras estrategias. De este modo, se trata la dificultad que presentan los discentes en la resolución de problemas de división-medida en los diferentes cursos de Educación Primaria. Algunos estudiantes pueden resolver una variedad de problemas utilizando el modelaje directo, procedimientos de conteo, agrupamiento y estrategias basadas en la adición y sustracción.

Los estudiantes que no conocen el algoritmo de la división son capaces de resolver problemas de división-medida mejor que aquellos que ya han trabajado el algoritmo en la escuela (Li y Silver, 2000), como muestra la investigación realizada por Downton (2009) con números naturales. Sin embargo, nuestro estudio se focaliza en la resolución de problemas de división-medida con fracciones, por lo que presenta cierto grado de originalidad al no haberse realizado ninguna investigación de este tipo hasta el momento.

Cabe añadir la importancia de este fin, ya que se fundamenta en el currículo de Educación Primaria (Decreto 88/2017) y en los estudios de diversos autores realizados acerca de los problemas de estructura multiplicativa y pensamiento relacional (Downton, 2009; Empson, Levi y Carpenter, 2011; Napaphun, 2012). Además, es cierto que el desarrollo de la competencia de los estudiantes para resolver problemas matemáticos ha sido considerado como un objetivo importante del plan de estudios de las matemáticas en la escuela (Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NTCM), 1980, 1989, 2000; citado en Silver, 2000, p.233). Por tanto, el objetivo de esta investigación es identificar el nivel de éxito y las estrategias usadas por estudiantes de Educación Primaria al resolver problemas de grupos múltiples con fracciones.

2. Marco teórico

2.1. Problemas de estructura multiplicativa: problemas de grupos múltiples

Los problemas aritméticos básicos que presentan una relación multiplicativa entre las cantidades de una situación determinada se denominan *problemas de estructura multiplicativa*. En los problemas de estructura multiplicativa se puede modificar el tamaño de los números, el tema o el contexto, pero nunca se podrá variar la estructura elemental subyacente a las acciones, ni tampoco a las relaciones existentes. En los estudios de didáctica de la matemática se reconocen al menos tres tipos de problemas o situaciones que implican sólo una operación multiplicativa: situaciones de razón o proporcionalidad (isomorfismo de medidas), las situaciones de comparación (producto escalar o factor multiplicador), y las situaciones de combinatoria (producto de medidas o producto cartesiano) (Vergnaud, 1983).

Las situaciones de razón o proporcionalidad son aquellas situaciones en las que existe una relación proporcional entre dos magnitudes. El esquema de proporcionalidad se particulariza porque uno de los términos implicados es uno: la razón es referida a la unidad. En cuanto a las situaciones de comparación, factor multiplicador o producto escalar, son aquellas situaciones en las que se establecen relaciones multiplicativas entre objetos o eventos a través de la amplificación o reducción de una misma magnitud, mediante un escalar o cuantificador. Por último, las situaciones de combinatoria o producto cartesiano son aquellas situaciones en las que se realiza el producto cartesiano entre dos magnitudes o conjuntos para obtener un tercero (Vergnaud, 1997).

Esta investigación se centrará en los problemas de proporcionalidad simple, en particular, los *problemas de grupos múltiples*. Este tipo de problemas están relacionados con situaciones donde una cierta cantidad se repite un número concreto de veces. Las situaciones donde se detecta proporcionalidad simple son caracterizadas por la presencia de tres números, siendo uno de ellos la incógnita del problema planteado. En estos problemas se obtienen tres subtipos de problemas atendiendo al lugar que ocupa su incógnita. La incógnita puede ser el total de objetos, el número de objetos en cada grupo, o el número de grupos, dando lugar a los problemas de multiplicación, división reparto y división-medida. En los problemas de multiplicación la incógnita es el total de objetos, en los problemas de división reparto la incógnita es el número de objetos en cada grupo, y en los problemas de división-medida la incógnita es el número de grupos.

Los problemas de grupos múltiples son problemas verbales de multiplicación y división que involucran un número entero de grupos, con una cantidad fraccionaria en cada grupo. En estos problemas la cantidad fraccionaria puede presentarse en una de las cantidades que nos aporta el enunciado, o bien, en la incógnita planteada (Empson y Levi, 2011). Los problemas de grupos múltiples más sencillos solo involucran la fracción unitaria. En la Tabla 1 se presentan tres ejemplos de problemas de grupos múltiples.

Los problemas de grupos múltiples ayudan a los estudiantes a reforzar y ampliar su comprensión de las fracciones en términos de relación matemática, la cual es fundamental para comprender posteriormente la equivalencia y para operar con fracciones. Por lo tanto, estos problemas se pueden usar para consolidar la comprensión de los estudiantes acerca de las fracciones y para introducirlos en su cálculo.

Tabla 1. Problemas de multiplicación, división reparto y división-medida en grupos múltiples

Tipo de problema	Nº de grupos	Cantidad por grupo	Total	Ecuación
Multiplicación				
Se necesitan pasteles de chocolate para que merienden 12 niños. Si cada niño quiere comer $\frac{3}{4}$ de pastel, ¿cuántos pasteles de chocolate y vainilla se necesitarán?	12	$\frac{3}{4}$	incógnita	$12 \times \frac{3}{4} = c$
División reparto				
12 niños han compartido 9 pasteles de chocolate y vainilla para merendar. Si todos los niños quieren comer la misma cantidad de pastel. ¿Cuánta cantidad de pastel deberá comer cada uno?	9	incógnita	12	$9 \times c = 12$
División-medida				
Si se tienen 9 pasteles de chocolate y vainilla para merendar. ¿Cuántos niños podrán merendar, si cada niño va a comer $\frac{3}{4}$ de pastel?	incógnita	$\frac{3}{4}$	9	$cx\frac{3}{4} = 9$

Previamente al trabajo con problemas de grupos múltiples se deben identificar cuáles son las cantidades que se conocen y las que se desconocen en cada problema y, además, saber plantear una ecuación que represente el problema, haciendo uso de las cantidades del problema. Para resolver este tipo de problemas, los alumnos deben tener un conocimiento básico del significado de fracción como parte-todo, y este concepto se debe introducir de forma progresiva para facilitar la comprensión del significado y de las relaciones entre las cantidades que la forman. Algunas de las cuestiones a tratar a lo largo de la etapa de Educación Primaria son: introducir el símbolo de fracción a/b ; identificar las partes de una fracción (a/b): *numerador* (a), y el *denominador* (b); relacionar la fracción con su representación gráfica; establecer fracciones equivalentes; comparar fracciones; operar con fracciones; etcétera. Después de aprender a representar una fracción de distintas formas se podrá empezar a trabajar con problemas de grupos múltiples, ya que los estudiantes conocerán las nociones más básicas de las fracciones.

2.2. Estrategias de resolución de problemas

Según Empson y Levi (2011), la evolución de las estrategias en los estudiantes parece que sigue un patrón predecible. La característica más relevante de este patrón está vinculada al modo en que los estudiantes relacionan las dos cantidades en el problema.

A continuación, presentamos las estrategias de resolución de los problemas de división reparto y división-medida.

Estrategias para la resolución de los problemas de división reparto

Las principales estrategias para la resolución de los problemas de división reparto son: las estrategias no-anticipatorias (*non-anticipatory sharing*), como las *subdivisiones* y las *pruebas de ensayo-error*; y las estrategias anticipatorias, como la *coordinación aditiva*, la *coordinación multiplicativa* y *ratio strategies*.

- Estrategias no-anticipatorias (*non-anticipatory sharing*)

Estas estrategias son las que usan los estudiantes cuando todavía no han comenzado a plantearse cómo van a repartir el todo equitativamente y de manera completa. Entre los distintos tipos de estrategias no-anticipatorias se encuentra la realización de *subdivisiones*, de forma equitativa.

Dicha estrategia consiste en la subdivisión de la unidad en mitades, cuando la cantidad a repartir es menor que el número de grupos, hasta llegar al final. Este tipo de estrategia no-anticipatoria la utilizan los alumnos para comenzar a resolver el problema, pero sin llegar a pensar cómo deben repartir el

número de objetos entre los grupos a compartir. En el Figura 1 se muestra un ejemplo de un problema de división reparto resuelto mediante este tipo de estrategia.

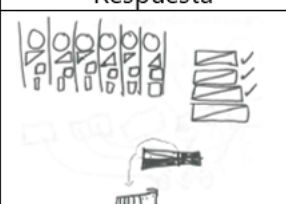
Problema	Respuesta
6 amigos en el parque querían compartir 4 pasteles de fresa, si todos querían comer la misma cantidad. ¿Cuánta cantidad de pastel comerá cada niño?	

Figura 1. Estrategia no-anticipatoria (*non-anticipatory sharing*)

El estudiante pretende dividir en dos mitades cada pastel de fresa para repartir entre los seis niños. De este modo, cada niño comería medio pastel quedando como resto un pastel. El pastel restante lo subdivide en seis partes no equitativas.

Otra estrategia del tipo no-anticipatoria es la *estrategia de ensayo-error*, que como su propio nombre indica, es una estrategia no-anticipatoria en la cual los estudiantes realizan distintas pruebas y cálculos para procurar obtener la solución del problema.

- Estrategias anticipatorias

Entre este tipo de estrategias se encuentran las estrategias de coordinación aditiva y las estrategias de coordinación multiplicativa.

Dentro de las estrategias de coordinación aditiva se diferencia, la *estrategia anticipatoria de coordinación aditiva más directa de repartir ítem a ítem* (*sharing one item at a time*) y la *estrategia anticipatoria de coordinación aditiva de nivel intermedio* (*sharing groups of ítems*).

La *estrategia anticipatoria de coordinación aditiva, sharing one item at a time*, es la que utilizan los discentes cuando reparten cada unidad. Esta estrategia se usa para comenzar a repartir las cantidades del objeto que son semejantes entre los grupos a repartir. De este modo, se repite sucesivamente la operación hasta conseguir una distribución exhaustiva y equitativa. En la Figura 2, se ejemplifica la estrategia de coordinación aditiva.

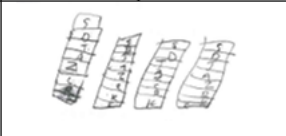
Problema	Respuesta
6 amigos en el parque querían compartir 4 pasteles de fresa, si todos querían comer la misma cantidad. ¿Cuánta cantidad de pastel comerá cada niño?	

Figura 2. Estrategia anticipatoria: coordinación aditiva: repartiendo un ítem cada vez (*sharing one item at a time*)

Como se puede contemplar en la Figura 2, en la *estrategia anticipatoria de coordinación aditiva más directa de repartir ítem a ítem* los estudiantes reparten cada uno de los pasteles entre las personas que van a compartir (reparto de grupos de objetos), es decir, dividen cada pastel en seis partes ($1/6$), número de personas que van a repartirse los pasteles, de tal forma que cada individuo conseguirá $4/6$ ($2/3$) de pastel.

Otra estrategia de coordinación aditiva es la *estrategia anticipatoria de coordinación aditiva de nivel intermedio* (*sharing groups of ítems*), la cual consiste en el reparto de grupos de objetos. Los alumnos, que están aprendiendo a repartir grupos iguales, coordinan el número de partes que ellos quieren hacer con el número de partes que deben repartir.

Por lo que atiende a las estrategias de *coordinación multiplicativa* (*multiplicative coordination*), cabe señalar que se desarrollan dos subtipos: la estrategia de *coordinación multiplicativa* y *ratio strategies*. La estrategia de *coordinación multiplicativa* muestra cómo los estudiantes capaces de dominar esta estrategia han evolucionado respecto a las anteriores técnicas, ya que se trata de una estrategia mental donde se simplifica el proceso de resolución.

Para dar respuesta al problema que hemos planteado, los estudiantes que usan esta estrategia de coordinación multiplicativa, no necesitan representar gráficamente el problema, porque entienden que 4 es la cantidad de objetos y 6 son las personas a las que han de repartir los objetos. Por tanto, 4 pasteles entre 6 personas, significa repartir $\frac{4}{6}$ de pastel para cada uno.

Mientras que la estrategia multiplicativa menos común es, la estrategia *ratio strategies*. Esta estrategia resuelve la situación reduciendo la fracción en partes más pequeñas con la finalidad de simplificar las cantidades con las que se va a trabajar. Por ejemplo, en la Figura 3, el estudiante reduce la fracción planteada ($\frac{4}{6}$), con el objetivo de simplificar y trabajar con cantidades más sencillas. En este problema, se reduciría la fracción $\frac{4}{6}$ a $\frac{2}{3}$, es decir, tres personas han de compartir dos pasteles. Por tanto, cada niño comería $\frac{2}{3}$ de pastel.

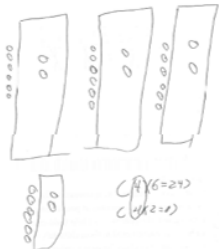
Problema	Respuesta
6 amigos en el parque querían compartir 4 pasteles de fresa, si todos querían comer la misma cantidad. ¿Cuánta cantidad de pastel comerá cada niño?	

Figura 3. Estrategia anticipatoria: *ratio strategies* (*Repeated Halving* y *Factors*)

Estrategias para la resolución de los problemas de división-medida

Entre las estrategias de resolución de problemas de división-medida se encuentran: la *estrategia de modelaje directo*, de *adición repetida*, de agrupamiento y combinación, y la *estrategia multiplicativa*.

- Estrategias de modelaje directo (*direct modeling*) y adición repetida (*repeated addition*)

En cuanto al modelaje directo y la adición repetida son estrategias más sencillas. Cuando los estudiantes usan este tipo de estrategias, suelen representar todas las cantidades del problema y cuentan o añaden (en excepciones, restan) para representar la respuesta final. Cuando los estudiantes hacen uso del *modelaje directo*, los estudiantes suelen representar en primer lugar todas las cantidades del problema mediante dibujos o figuras. Una vez representadas, proceden a dividir las partes y, por último, relacionan la fracción con las partes de cada figura.

El caso de la estrategia *adición repetida* es muy similar a la anterior, aunque se distinguen porque en el caso de la adición repetida se representan las relaciones de las fracciones con símbolos en lugar de con dibujos o figuras.

En la Figura 4 se muestra la resolución del problema mediante ambas estrategias.

Problema	Respuesta
<p>Laura tiene 10 bocadillos y medio de jamón y queso. Si cada niño necesita $\frac{3}{8}$ de bocadillo para merendar, ¿cuántos niños podrán compartir los bocadillos?</p>	

Figura 4. Estrategias de modelación directa y adición repetida (*direct modeling* y *repeated addition*)

En la estrategia de *modelaje directo*, la estudiante dibuja $10 \frac{1}{2}$ en forma de rectángulos. Posteriormente, divide cada rectángulo en ocho partes y marca $\frac{3}{8}$ en cada rectángulo. El último paso que realiza es dividir el segmento restante en 4 partes iguales. Esta alumna ha establecido dos relaciones básicas. Ella comprende que $1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ y que $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

Sin embargo, en la estrategia de *adición repetida*, los estudiantes representan cada objeto individualmente, pero como sumandos individuales en lugar de agrupaciones de octavos, de tal forma que se añaden repetidamente $\frac{3}{8}$ hasta que se alcanzan $10 \frac{1}{2}$.

- Estrategia de agrupamiento y combinación (*grouping and combining strategies*)

Los alumnos a través de esta estrategia buscan unidades fraccionarias con el objetivo de agruparlas y formar números o partes enteras. Gracias a la utilización de dicha estrategia no es necesario representar todas las cantidades del enunciado. A través de la estrategia de *agrupamiento y combinación* se mejora la habilidad de agrupar y contar grupos de fracciones que involucran cantidades más "asequibles" (suelen ser números enteros). Mediante esta estrategia se resuelven y discuten problemas de grupos múltiples; los estudiantes logran de forma más efectiva llegar a la solución del problema. La estrategia de agrupamiento y combinación suele aplicarse con cantidades enteras.

Por ejemplo, en la Figura 5, el estudiante identifica que 4 veces $\frac{3}{4}$ equivale a 3 tazas, y después hace grupos de 4 hasta que agota el número de pasteles que tenía que hacer (20) obteniendo como resultado 15 tazas.

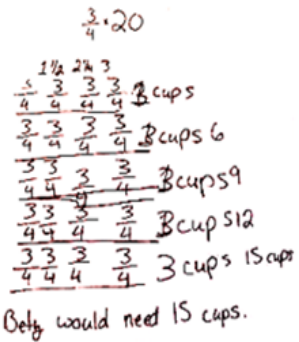
Problema	Respuesta
<p>Para hacer un pastel se necesitan $\frac{3}{4}$ de taza de azúcar. Para hacer 20 pasteles, ¿cuántas tazas de azúcar se necesitan?</p>	 <p> $\frac{3}{4} \cdot 20$ $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 5 = 3 \text{ cups}$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3 \text{ cups } 6$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 3 = 3 \text{ cups } 9$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 2 = 3 \text{ cups } 12$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 1 = 3 \text{ cups } 15 \text{ cups}$ Betty would need 15 cups. </p>

Figura 5. Estrategia de agrupación y combinación (*grouping and combining strategies*)

- Estrategia multiplicativa (*multiplicative strategies*)

Dicha estrategia es la más sofisticada para la resolución de problemas de grupos múltiples. Los estudiantes pasan del pensamiento aditivo en el que agrupan y cuentan, al pensamiento multiplicativo. A través del cual, se forman grupos que presentan una relación multiplicativa entre ellos, más allá de usar el doble y dividir en mitades.

Por ejemplo, en la Figura 6 se evidencia la resolución del problema planteado a través de esta estrategia. Como se puede observar, el estudiante identifica que cada 2 días el gato come 3 tazas de pienso, y posteriormente identifica la relación multiplicativa entre 12 tazas = 3 tazas \times 4 y aplica esta relación multiplicativa a los días $2 \times 4 = 8$ días.

Problema	Respuesta
Luis tiene 12 tazas de pienso. Si su gato se come una ración y media al día, ¿cuántos días podrá alimentar a su gato?	$12 \div 1\frac{1}{2} = 8$ $1\frac{1}{2}$ 12 tazas 2 días 3 cup 2 $\times 4$ 8 días

Figura 6. Estrategias de resolución de problemas de división-medida (*multiplicative strategies*)

En definitiva, se puede contemplar cómo los estudiantes se inician en el pensamiento aditivo, superan la combinación y el conteo de grupos, hasta alcanzar el pensamiento multiplicativo.

El objetivo de esta investigación se particulariza en las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuál es el nivel de éxito de los estudiantes de Educación Primaria (6-12 años) cuando resuelven problemas división-medida y división reparto con fracciones?
- ¿Qué estrategias usan los estudiantes de Educación Primaria (6-12 años) cuando resuelven problemas división-medida y división reparto con fracciones?

3. Método

3.1. Participantes

Los participantes de este estudio fueron 149 estudiantes de un centro educativo público de Educación Primaria de la provincia de Alicante. La Tabla 2 muestra la distribución de los participantes por curso.

Tabla 2. Distribución de los estudiantes por curso

Curso (Ed. Primaria)	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	Total
Número de estudiantes	24	23	26	24	28	24	149

Durante el periodo de recogida de datos, curso escolar 2018/2019, cada curso estaba dividido en dos grupos con diferentes tutores. Se seleccionó un grupo al azar de cada curso para la aplicación del instrumento.

3.2. Instrumento de recogida de datos

Para la recogida de datos se diseñó un cuestionario con cuatro problemas de estructura multiplicativa ($f(x) = ax$ con $a \neq 0$) para cada uno de los ciclos de Educación Primaria: 1^{er} ciclo (1^o y 2^o curso), 2^o ciclo (3^o y 4^o curso) y 3^{er} ciclo (5^o y 6^o curso). Cada cuestionario incluía dos problemas de división-medida y dos de división reparto. En los distintos ciclos se mantuvieron los contextos de los problemas para comprobar las estrategias empleadas por los estudiantes, modificando únicamente las cantidades numéricas. En los problemas aparecían fracciones en el enunciado o en la incógnita del problema planteado. La Tabla 3 muestra los problemas diseñados para el primer ciclo.

Tabla 3. Problemas del cuestionario diseñados para el primer ciclo de Educación Primaria

	Nº de grupos	Cantidad por grupo	Total	Problema	Tipo
División reparto (DP)	2	X	5	2 niños quieren compartir 5 magdalenas. Si cada niño quiere tener la misma cantidad de magdalena, ¿cuánto le toca a cada niño?	Problema "magdalenas" (DP1)
	3	X	10	3 niñas quieren compartir 10 chocolatinas. Pero todas las niñas quieren tener la misma cantidad, ¿cuánto le toca a cada niña?	Problema "chocolatina" (DP2)
División medida (DM)	X	1/2	2	Yo tengo 2 botes de pintura. Si necesito medio bote para pintar una pared, ¿cuántas paredes podré pintar?	Problema "pintura" (DM1)
	X	1/4	2	Laura tiene 2 folios. Si necesita 1/4 de un folio para hacer una tarjeta de Navidad, ¿cuántas tarjetas de Navidad podrá hacer Laura?	Problema "folios" (DM2)

En el diseño de los problemas de cada ciclo se ha tenido en cuenta, tal y como indican Empson y Levi (2011), las variables didácticas y las cantidades de los problemas. En los dos problemas de división reparto planteados en el primer ciclo, el número de grupos usado ha sido 2 y 3, dado que las autoras aconsejan 2, 3 o 4. En segundo ciclo, el número de grupos usados ha sido 2 y 8, ya que en este ciclo las autoras aconsejan 2, 4, 8, 3, 6 o 10. En el tercer ciclo, el número de grupos usados ha sido 10 y 8, ya que las autoras aconsejan usar 4, 8, 3, 6, 10 o 12. Para este tipo de problemas se aconseja que en el primer ciclo se usen números enteros para la cantidad total y cantidad por grupo, mientras que en los otros dos niveles educativos se aconseja usar números enteros y fracciones propias indistintamente (Tabla 4).

Por lo que respecta a los problemas de división-medida, para las cantidades por grupo en el primer ciclo se han usado las fracciones unitarias 1/2 y 1/4 tal y como proponen Empson y Levi (2011). En el segundo ciclo, para la cantidad total y las cantidades por grupo se han usado las fracciones 1/2 y 3/4, ya que en este ciclo las autoras proponen empezar a usar fracciones como 3/4, 2/3, 1/3 y 1/10. Por último, en el tercer ciclo, para las cantidades totales y por grupo se han usado las fracciones 3 1/2, 1 3/4 y 2/3 (Tabla 4). En este ciclo las autoras aconsejan expresar las fracciones como mitades, cuartos, tercios, décimos, octavos o sextos; incluyendo cantidades en cada grupo que no superen la unidad.

En este estudio, las cantidades numéricas de algunos de estos problemas se han mantenido en dos ciclos distintos. Por ejemplo, las cantidades del problema de división reparto (magdalenas) se han mantenido en primer y segundo ciclo. Las cantidades del problema división reparto (chocolatinas) se han mantenido en segundo y tercer ciclo. En los problemas de división-medida se mantienen las

cantidades del problema "pintura" en primer y segundo ciclo y las del problema "folios" para segundo y tercer ciclo (Tabla 4).

Los participantes resolvieron individualmente el cuestionario en su horario de clase (50 minutos). La única indicación que se les ofreció es que debían justificar sus respuestas y que no podían utilizar calculadora ni dispositivos electrónicos.

Tabla 4. Cantidades numéricas por curso y problema

Niveles educativos	Lugar que ocupa	Problema "Magdalenas"	Problema "Chocolatinas"	Problema "Pintura"	Problema "Folios"
1º y 2º	Total	5	10	2	2
	Nº de grupos	2	3	X	X
	Cantidad por grupo	X	x	1/2	1/4
3º y 4º	Total	5	3	2	3 1/2
	Nº de grupos	2	8	X	X
	Cantidad por grupo	X	X	1/2	2/3
5º y 6º	Total	15	3	6 3/4	3 1/2
	Nº de grupos	10	8	X	X
	Cantidad por grupo	X	X	1 3/4	2/3

3.3. Análisis de datos

Las respuestas de los estudiantes al cuestionario se analizaron desde dos perspectivas: atendiendo al nivel de éxito obtenido en la resolución del problema y a las estrategias empleadas.

En relación con el nivel de éxito, el análisis llevado a cabo se ha realizado en dos fases. En la primera fase se realizó una codificación dicotómica de las respuestas de los estudiantes a los cuatro problemas en cada uno de los cursos. Se codificó con un "1" aquellas respuestas cuyo proceso de resolución fue correcto, independientemente de que hubiera errores de cálculo o no, y con un "0" las respuestas incorrectas o en blanco. En una segunda fase se hizo un análisis cuantitativo a través de tablas porcentuales que permitió obtener el nivel de éxito obtenido por los estudiantes de cada curso y los niveles de éxito en los distintos ciclos.

En relación con las estrategias, se hizo un análisis cualitativo para identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes. Para ello, en primer lugar, dos investigadores analizaron conjuntamente una muestra de respuestas a fin de identificar las estrategias utilizadas en cada tipo de problema. Posteriormente, se discutieron las semejanzas y diferencias identificadas en cada problema, y se refinaron según se iban analizando nuevas respuestas. Este proceso se repitió para cada uno de los problemas hasta llegar a un consenso e identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes de los distintos ciclos en los cuatro problemas.

4. Resultados

Esta sección se ha organizado en dos secciones que dan respuesta a las dos preguntas de investigación planteadas. En la primera sección se presentan los niveles de éxito por problema y curso y, en la segunda, las estrategias usadas por los estudiantes en cada tipo de problema.

4.1. Niveles de éxito en los diferentes tipos de problemas por curso

La Tabla 5 muestra los porcentajes de respuestas correctas (niveles de éxito) obtenidos en los problemas de división reparto y división-medida en cada curso.

Tabla 5. Nivel de éxito por curso/ciclo y problema

Ciclo	Curso	Problema "Magdalenas" (DP1)	Problema "Chocolatinas" (DP2)	MEDIA	Problema "Pintura" (DM1)	Problema "Folios" (DM2)	MEDIA
1º	1º	8%	4%	6%	29%	46%	38%
	2º	17%	4%	11%	17%	17%	17%
2º	3º	23%	4%	14%	58%	0%	29%
	4º	79%	4%	42%	79%	8%	44%
3º	5º	32%	21%	27%	0%	0%	0%
	6º	58%	13%	36%	4%	4%	4%

En general, se observa como los estudiantes en primer y segundo ciclo tuvieron más éxito en los problemas de división-medida que en los de división reparto. Sin embargo, esta tendencia se invierte en el tercer ciclo, donde se logra mayor nivel de éxito en los problemas de división reparto que en los de división-medida.

En cuanto al nivel de éxito de los estudiantes en cada uno de los problemas de división reparto y división-medida, cabe señalar que el problema "Chocolatinas" (problema de división reparto) fue el que más dificultades generó a los estudiantes de todos los ciclos. El problema "Folios" (problema de división-medida) generó más dificultades a los estudiantes de segundo y de tercer ciclo que a los del primer ciclo. En particular, los estudiantes de 1º fueron los que tuvieron mayor nivel de éxito. También se observa que los dos problemas de división-medida generaron más dificultades a los estudiantes de tercer ciclo.

En cuanto a la evolución a lo largo de los cursos, se observa que el nivel de éxito en los problemas de división reparto aumenta progresivamente, desde un 6% en 1º hasta un 42% en 4º. Este progreso se invierte a partir de 5º curso pasando de un 42% en 4º a un 36% en 6º. Por lo que respecta a los problemas de división-medida, el nivel de éxito sigue un progreso descendente en el primer ciclo y una evolución ascendente en el segundo ciclo. En el tercer ciclo, aunque podría decirse que también es ascendente, esta es poco relevante (0% en 5º y 4% en 6º).

4.2. Estrategias utilizadas por los estudiantes en la resolución de los problemas

Esta sección se ha organizado en dos apartados. En el primer apartado se presentan las estrategias usadas por los estudiantes para resolver los problemas de división reparto y en el segundo apartado las estrategias usadas en los problemas de división-medida.

4.2.1. Estrategias empleadas en los problemas de división reparto

Para resolver los problemas de división reparto, los estudiantes han utilizado estrategias no anticipatorias, estrategias de coordinación aditiva y de coordinación multiplicativa. También se han usado estrategias sin sentido y se han dejado problemas sin contestar.

A continuación, evidenciamos el uso de algunas de estas estrategias por parte de los estudiantes. Para resolver el problema "Magdalenas" (DP1), un estudiante de 1º usó la estrategia de coordinación aditiva formando dos grupos con dos elementos en cada uno y, a continuación, partió la magdalena restante por la mitad, obteniendo como respuesta al problema dos magdalenas para cada niño y una mitad de otra (Figura 7).



Figura 7. Ejemplo de estrategia de coordinación aditiva (1º curso, problema DR1)

En el mismo problema, planteado para 6º curso, un estudiante usó la coordinación multiplicativa. Este estudiante consideró que las 15 magdalenas (cantidad total) las tenía que repartir entre 10 niños (nº de grupos) para obtener el número de elementos por grupo (una magdalena y media) (Figura 8).

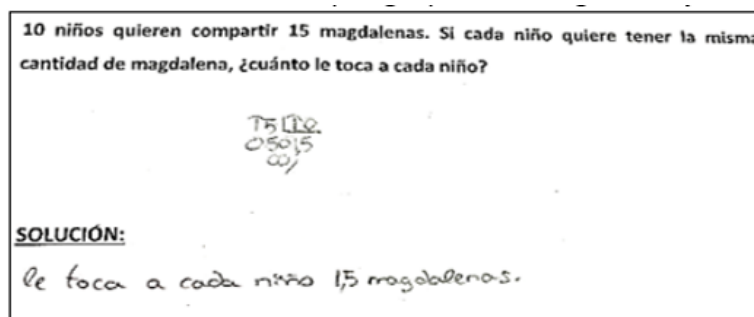


Figura 8. Ejemplo de la estrategia de coordinación multiplicativa (6º. curso, problema DR1)

4.2.2. Estrategias empleadas en los problemas de división-medida

En los problemas de división-medida se han utilizado las estrategias de modelaje directo, de adición repetida, de agrupamiento y combinación, y la estrategia multiplicativa. También en este tipo de problemas se han usado estrategias sin sentido y han dejado problemas sin contestar.

Para resolver el problema "Pintura" de división-medida, un estudiante de 3º usó la estrategia de modelaje directo. Este estudiante representó gráficamente los dos botes de pintura (cantidad total) y los dividió en dos partes al necesitarse $\frac{1}{2}$ bote de pintura para pintar una pared (cantidad de elementos por grupo), obteniendo que podría pintar cuatro paredes (número de grupos) (Figura 9).

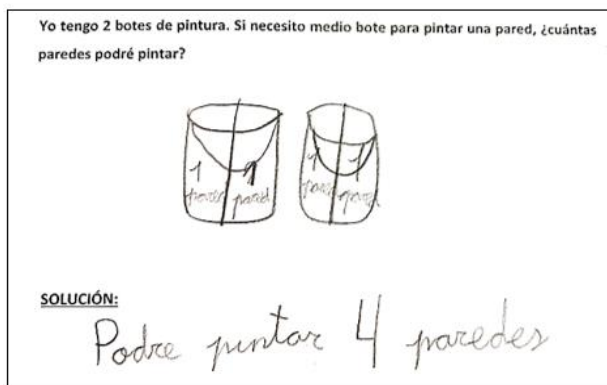


Figura 9. Ejemplo de la estrategia de modelaje directo (3º curso, problema DM1)

Este mismo problema fue resuelto por otro estudiante de 3º mediante la estrategia adición repetida. Para resolver el problema se apoyó en representaciones simbólicas (Figura 10).

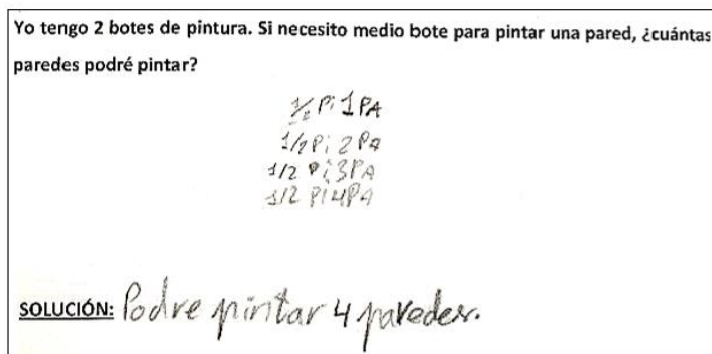


Figura 10. Ejemplo de la estrategia de adición repetida (3º. curso, problema DM1)

Además, dicho problema fue resuelto por otro estudiante de 4º mediante la estrategia multiplicativa. Para resolver el problema calculó el doble de las cantidades planteadas para facilitar la resolución.

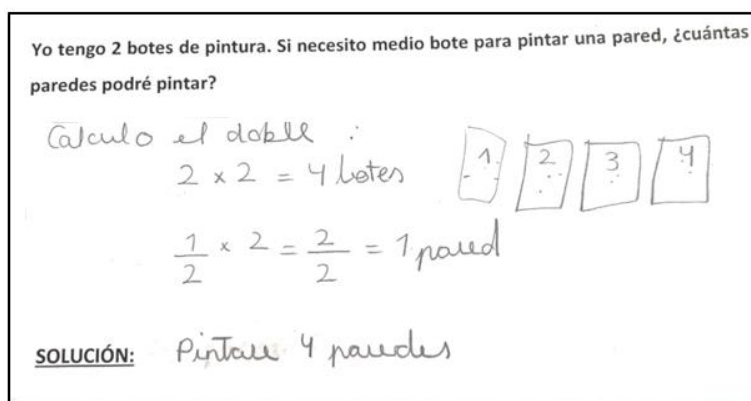


Figura 11. Ejemplo de la estrategia multiplicativa (4º curso, problema DM1)

5. Discusión y conclusiones

El objetivo de este estudio ha sido identificar el nivel de éxito y las estrategias usadas por estudiantes de Educación Primaria al resolver problemas de grupos múltiples con fracciones. En cuanto a los niveles de éxito, los resultados obtenidos parecen entrar en contradicción con los modelos implícitos subyacentes a la división (Fischbein Deri, Nello y Marino, 1985), al haberse obtenido mayor nivel de éxito en los problemas de división-medida que en los de división reparto en el primer ciclo.

En el segundo ciclo, los niveles de éxito no arrojan diferencias muy relevantes entre ambos tipos de problemas, aunque se siguen resolviendo los de división-medida con mayor nivel de éxito. Finalmente, en el tercer ciclo la tendencia se invierte, obteniéndose un nivel de éxito muy bajo en los problemas de división-medida (por debajo del 5%). Estos resultados podrían explicarse considerando las cantidades involucradas en cada problema. En los problemas de división-medida del primer ciclo se usaron fracciones unitarias ($1/4$ y $1/2$) y la incógnita era un número natural, mientras que en los problemas de división reparto la incógnita (número de grupos) era una fracción. En cuanto a los resultados obtenidos en el segundo ciclo, los problemas que incluían las mismas cantidades que los del primer ciclo obtuvieron niveles de éxito altos y similares (problema DP1 y DM1). Sin embargo, los problemas en los que se variaron las cantidades obtuvieron niveles de éxito muy bajos (DP2 y DM2 con 4% de media en este ciclo). La incógnita en ambos problemas era una fracción impropia o un número mixto. Tal vez el alumnado de este nivel educativo identificó los números mixtos como fracciones impropias y no como una parte entera y una fracción que les hubiese permitido emplear otras estrategias distintas al algoritmo. Según Downton (2009), la estructura semántica o el rango de los números del problema influyen en las estrategias de resolución que utilizan los estudiantes. Los bajos porcentajes de éxito en todos los ciclos ponen de manifiesto las dificultades que los estudiantes de Educación Primaria tienen para resolver problemas de estructura multiplicativa con fracciones.

En cuanto a la segunda pregunta de investigación, identificar las estrategias empleadas por estudiantes de Educación Primaria cuando resuelven problemas de división-medida y división reparto con fracciones, cabe señalar que los estudiantes han empleado diferentes estrategias para los distintos tipos de problemas y, además, usaron más estrategias en los problemas de división-medida que en los de división reparto. En los problemas de división reparto se emplearon las estrategias no anticipatorias, y las de coordinación aditiva y multiplicativa. En cuanto a los problemas de división-medida, se emplearon las estrategias de modelaje directo, adición repetida, agrupación y combinación, y estrategia multiplicativa. El hecho de que ambos problemas presentaran un alto uso de estrategias sin sentido y en blanco podría explicar los bajos porcentajes de éxito obtenidos.

A pesar de los bajos niveles de éxito obtenidos, los resultados de esta investigación extienden los obtenidos por Li y Silver (2000) y Downton (2009) con números naturales, ya que muestra que los estudiantes a los que no se les ha introducido el algoritmo de la división con fracciones también resuelven mejor los problemas de división-medida que aquellos que ya conocen el algoritmo. Además, son una muestra de que más allá del currículo se pueden introducir de manera temprana las fracciones y los problemas de estructura multiplicativa en las aulas de matemáticas.

En futuras investigaciones sería interesante introducir en el instrumento problemas de grupos múltiples con fracciones y con números naturales. Esto permitiría analizar si las fracciones son un elemento diferenciador, o por el contrario las dificultades se generan a causa de no establecer relaciones entre las cantidades del problema. Una enseñanza basada en las relaciones que se establecen entre las cantidades y en el uso de estrategias intuitivas de los estudiantes, vinculadas a estrategias más eficientes, podría ayudar a los estudiantes a superar la necesidad de encontrar la "operación correcta" que resuelve el problema (Molina, 2009).

Esta enseñanza favorecería la introducción de un pensamiento relacional desde etapas iniciales de la educación que no solo permitiría a los estudiantes comprender el significado de las operaciones, sino que, además, en las siguientes etapas favorecería el aprendizaje en torno al álgebra (Molina, 2009). Además, esta enseñanza permite a los docentes conectar y relacionar el aprendizaje que se trabaja en las diferentes etapas educativas y no tratar el conocimiento de manera aislada (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, & Empson, 1999).

Referencias

- Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L. y Empson, S.B. (1999). *Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Correa, J., Nunes, T. y Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology*, 90(2), 321-329. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.90.2.321>.
- Empson, S.B. y Levi, L. (2011). *Extending Children Mathematics Fractions and Decimals*. Portsmouth, Reino Unido: Heinemann.
- Empson, S.B., Levi, L. y Carpenter, T.P. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education* (409-427). Berlin: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_22.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. y Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.16.1.0003>.
- Li, Y. y Silver, E.A. (2000). Can younger students succeed where older students fail? An examination of third graders' solutions of a division-with-remainder (DWR) problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, 19(2), 233-246. [https://doi.org/10.1016/s0732-3123\(00\)00046-8](https://doi.org/10.1016/s0732-3123(00)00046-8).
- Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M.C. Chamorro (coord.). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. (p.187-220). Pearson-Prentice Hall: Madrid.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Napaphun, V. (2012). Relational thinking: Learning arithmetic in order to promote algebraic thinking. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 35, 84-101.
- Vergnaud, G. (1983). "Multiplicative structures". En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (p. 127-174). New York: Academic Press.
- Vergnaud, G. (1997). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Elisa Sanjuán Cremades. Ibi, España.

Email: elisasanjuan.maestra@gmail.com