Uso de las Tabletas Algebraicas como alternativa de enseñanza del proceso de factorización

Sandra Milena Jiménez
dma.sjimenez@pedagogica.edu.co

Dayana Giselle Guantiva
dma.dguantiva@pedagogica.edu.co

Duvan Camilo Sánchez
dma.dsanchez@pedagogica.edu.co

Estudiantes Universidad Pedagógica Nacional

Resumen. El objetivo de este taller es presentar una alternativa para la enseñanza del proceso de factorización mediante el uso de las tabletas algebraicas, material manipulativo que permite establecer una conexión entre la noción de área y la expresión de algunos polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{N}$, como producto de factores. Se hace especial énfasis en reducir a la mínima expresión los factores cuyo producto determina el polinomio que representa el área del rectángulo formado por las tabletas. Las actividades planteadas buscan un acercamiento al proceso de factorización introduciendo algunas definiciones y proponiendo ejercicios que aplican lo aprendido a lo largo del taller.

Palabras clave: materiales manipulativos, polinomios, sistema de representación algebraico, área.

1. Presentación

Este taller surge del trabajo realizado en el espacio académico E*nseñanza y aprendizaje de la aritmética y el álgebra*, del Componente Pedagógico y Didáctico en el Programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (cursado por los autores de este documento en 2011-I). El propósito del taller es incentivar el aprendizaje de la factorización, temática propia del álgebra escolar del grado octavo, mediante el uso de las ***Tabletas Algebraicas,*** material concreto (manipulativo) que corresponde a una particularización de los Algeblocks, este último diseñado para diversos fines en el aprendizaje y enseñanza del álgebra. Este taller utilizará las ***Tabletas Algebraicas*** como herramienta que puede contribuir al aprendizaje de factorización de algunos polinomios de segundo grado (de la forma $ax^2 + bx + c$; con $a, b, c \in \mathbb{N}$).

Los estudiantes de secundaria presentan dificultades de aprendizaje en álgebra, especialmente en factorización, debido a la dificultad de manejar nociones de variable cuando se trabaja con diferentes tipos de expresiones algebraicas, además no reconocen el método más apropiado para solucionar el problema (Morales, 2006). Además, se ha visto que algunos estudiantes no comprenden el significado de este procedimiento: en ocasiones no tienen en cuenta que los factores deben ser irreducibles, y se limitan a descomponer el polinomio como producto de dos factores nada más. El taller que se presenta, con el uso de las ***Tabletas Algebraicas***, proporciona una alternativa para la comprensión del proceso de factorización por parte del estudiante que a su vez permite establecer una relación entre representaciones algebraicas y geométricas, a partir de lo mencionado anteriormente, la expresión de polinomios dados como producto de polinomios irreducibles.

2. Referentes teóricos

Materiales didácticos en el aula. El uso de materiales didácticos en el aula ha sido siempre de interés para los maestros y estudiantes ya que, bajo una correcta orientación por parte del docente, puede convertirse en una herramienta que ayude a comprender las nociones del tema que se está abordando con el material.

Dienes (1960 citado en Resnick,1990a) se dedicó al diseño de materiales para la enseñanza de las matemáticas, lo que más caracterizó el enfoque de Dienes fue el empleo de materiales y juegos concretos, en secuencias de aprendizaje estructuradas cuidadosamente, es decir al utilizar materiales manipulativos se debe tener mucho cuidado con el seguimiento que se haga para que el alumno no se quede sólo en el proceso de familiarizarse con el material, sino que pueda extraer los conocimientos que el uso de éste le brindan. Dienes propone que se creen manipulativos (materiales didácticos) de enseñanza que materialicen relaciones y pautas matemáticas, y las acerquen al campo de la experiencia concreta (Dienes, 1960 citado en Resnick, 1990b).

> Duval (1999 citado en Morales y Sepúlveda, 2006, p. 1) argumenta que los conceptos se van construyendo mediante acciones que impliquen el uso de diferentes representaciones ya sea de los conceptos mismos, de los elementos asociados a ellos o de los objetos matemáticos, así como la manipulación de estas para promover una articulación coherente entre ellos y sus representaciones.

Hay temas que se prestan para abordar por medio de materiales, es por esta razón que aquí se aborda, en particular, el tema de factorización de algunos polinomios por medio del material ***Tabletas Algebraicas***, el cual es una modificación de los Bloques de Dienes o de los Algeblocks.

Se tendrá en cuenta para este taller la teoría de Duval (1999), coincidiendo en que

> Las representaciones y la visualización están en el corazón de la comprensión en matemáticas" [Además] las representaciones semióticas son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento.

Las configuraciones con las fichas son un ejemplo para lo que Duval (1999a) define como "representación que facilita la interiorización de un objeto", pues se hace un proceso de conversión entre el registro figural (representación del polinomio con fichas) y el registro algebraico (escritura del polinomio en términos algebraicos como producto de factores), lo cual, al establecer una relación entre el área de una figura y un polinomio, permite que el participante encuentre una forma de interpretar la factorización diferente a la manipulación de expresiones algebraicas. Además, se tendrá en cuenta la aprehensión conceptual de un objeto (1999b), en este caso, dicha aprehensión se realiza de manea intuitiva y sin demostraciones, asumiendo el polinomio que surge de la suma de las áreas de las fichas que constituyen el rectángulo igual al producto de la longitud de la base por la altura de dicho rectángulo.

Álgebra geométrica en la historia. A través de la historia se ha utilizado la geometría como herramienta para solucionar diferentes problemas aritméticos o algebraicos. En la época antigua, el lenguaje algebraico se encontraba en su fase retórica.

> Los babilonios (≈2000 a.C.), los egipcios (≈1700 a.C.), los griegos (≈600-200 a.C.) y los chinos (300 a.C.-300 d.C.) utilizaban exclusivamente el lenguaje natural, sin recurrir a algún signo. Se registraron intentos aislados de introducir algún nombre o alguna abreviatura para representar la incógnita, pero estas pruebas no fueron efectuadas de manera sistemática (Malisani, 1999, p. 5).

A los pitagóricos se les considera los creadores del álgebra geométrica, por la relación que establecieron entre la adición de áreas y las ecuaciones, y entre y sus representaciones con mediante configuraciones geométricas (Covas, 2009). Esta herramienta ayudó a resolver ecuaciones de segundo grado, las cuales fueron resultado del trabajo de los pitagóricos.

En el año 300 a.C., Euclides publica su libro *Los Elementos*, tratado geométrico y aritmético que aún hoy es fundamental en la enseñanza de la geometría. El libro II, que ha sido llamado Álgebra Geométrica, ya que las 14 proposiciones se pueden expresar en términos algebraicos (Fernández, s.f.), contiene catorce proposiciones, representadas como cuestiones geométricas (y escritas en lenguaje retórico), así como sus demostraciones. Navarro (2003) señala que:

> Once de esas proposiciones tratan de relacionar el área con unos cuadrados o rectángulos que tienen por lados unos segmentos dados con la superficie de otros cuadriláteros que tienen por lados sumas o restas de dichos segmentos (…) Las once primeras proposiciones de este libro se podrían considerar propiedades algebraicas, si en lugar de segmentos en él se hablara de cantidades (p. 13).

Euclides es considerado un "algebrista geométrico", pues sus trabajos con nociones geométricas se pueden interpretar como identidades algebraicas. La proposición IV que originalmente dice "*If a straight line is cut at random, then the square on the whole equals the sum of the squares on the segments plus twice the rectangle contained by the segments*" (Joyce, 1996, 6) fue interpretada como la identidad $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Asociar las representaciones geométricas (o diagramas) de las proposiciones de Euclides con álgebra es una distorsión histórica, ya que letras como *a* o *b* no aparecían en sus diagramas. Dicha identidad no aparece en *Los Elementos*, ésta pertenece a la herencia de Euclides, es decir, hace parte del impacto que tuvieron estas proposiciones y sus demostraciones netamente geométricas tanto en el momento como en los trabajos posteriores (Grattan-Guinness, 2004/s.f.). Así, los aportes de Euclides a la geometría e indirectamente al álgebra, mostraron una alternativa para representar expresiones algebraicas mediante la suma de áreas de cuadrados y rectángulos.

A partir del siglo VII los hindúes crearon un simbolismo algebraico que permitió el estudio de nuevos procedimientos para desarrollar ecuaciones, aunque algunos autores como al-Khowârismî (≈780-≈850) (…) desarrollaban un álgebra netamente retórica (Malisani, 1999). Al-Kwarizmi, en el año 830 realizó un tratado con ejemplos y demostraciones, en el que desarrolló un sistema para dar solución a expresiones cuadráticas donde incluía principios geométricos para complementar los cuadrados (Fernández, s.f.). Muestra de la articulación entre estas áreas de las matemáticas es la regla llamada "el rompecabezas geométrico de Al-Kwarizmi", que fue diseñada con la intención de resolver la ecuación $x^2+10x = 39$ pero que posteriormente sería extendida para resolver otras ecuaciones de ese tipo (sin valores negativos) (Fernández, et al., s.f.). En ésta, las operaciones realizadas son de tipo geométrico, dando valores cuando la representación estaba hecha, lo que implica que el uso de nociones geométricas se evidencia como herramienta útil para la solución de ecuaciones de segundo grado.

En el siglo XVII aparece el lenguaje simbólico, introducido por Viète (1540-1603), donde abandona el uso de palabras en el álgebra y las cantidades (conocidas o desconocidas) se representan mediante letras, además de asociar un signo y una operación (Malisani, 1999). En el libro primero de su *Geometría*, René Descartes (1637) presenta la resolución geométrica de algunas ecuaciones de segundo grado con una incógnita. El álgebra en La Geometría es más abstracta, se usa una notación simbólica simple y se da especial atención a las relaciones matemáticas entre los elementos que estructuran un problema (Meavilla, s.f.). Aquí, se ve una marcada diferencia entre el álgebra geométrica desarrollada en la edad antigua y en la edad media, ya que en ésta última la geometría no se usa como referente teórico sino como una herramienta para ilustrar el problema.

Meavilla (s.f.) afirma que los enfoques visuales como el que ofrece la geometría son una herramienta que facilita la comprensión de los conceptos matemáticos y que da una visión nueva y diferente de las matemáticas y, particularmente, del álgebra escolar a los estudiantes. Además:

> Los programas de enseñanza han prestado poca atención a los aspectos visuales de las Matemáticas (…) Este enfoque presenta algunas deficiencias, entre ellas: no cubre las necesidades de aquellos alumnos cuya orientación cognitiva es eminentemente visual, oculta los aspectos visuales que ayudan a conseguir la comprensión de conceptos y procedimientos e ignora las representaciones visuales como herramientas potentes para la resolución de problemas no necesariamente geométricos (Meavilla, 1995, p. 97).

Como afirma Thom (s.f. citado en Viviente, 1988, p. 4):

> La geometría es un intermediario natural y posiblemente insustituible, entre el lenguaje ordinario y el formalismo matemático, donde cada objeto puede ser reducido a un símbolo. Además, ésta ofrece unos valores insustituibles desde el punto de vista utilitario intelectual o técnico con que la sociedad ve la matemática, dichos valores son: la geometría proporciona uno o más puntos de vista, aproximadamente en todas las áreas de la matemática, las interpretaciones geométricas continúan proporcionando visiones directoras del entendimiento intuitivo y avances en la mayoría de las áreas de las matemáticas y las técnicas geométricas proporcionan eficaces útiles para resolver problemas en casi todas las áreas de la matemática y ciencias.

Trabajos con álgebra geométrica. La idea de realizar la actividad surge del taller *Áreas mágicas"* realizado por el grupo del Proyecto matemáticas y física básicas en Antioquia de la Universidad Nacional. En este taller se plantea la construcción de las mismas fichas que en las ***Tabletas Algebraicas***, pero sin la ficha de área *ab*. Las reglas de manejo de material son explicadas por el profesor para todos los estudiantes y luego ellos manipulan el material para formar rectángulos e identificar los factores que representarán la factorización. A medida que los encuentran, van llenando una tabla la cual proporciona el área de las fichas que se deben usar y tiene espacios en blanco para anotar la factorización.

Barreto (2009) propone trabajar productos notables del cuadrado de una suma y de una diferencia con rectángulos de área a^2, b^2 y ab para representar geométricamente el cuadrado de la suma o de la diferencia de dos cantidades cuando los valores son positivos.

Para la suma, Barreto propone la unión de las fichas teniendo en cuenta la *aprehensión operativa de reconfiguración* que él define como:

> "Cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle, donde puzzle se considera como sinónimo de un rompecabezas y se refiere a piezas planas según la Real Academia."(2009, Agosto)

De la anterior definición nosotros tomamos a la palabra subconfiguraciones como el polinomio dado representado por fichas.

Con ayuda de los cuadrados se puede comenzar a resolver ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c$ o $x^2 + bx$ pero de forma más general se pueden resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c$ que es la ecuación cuadrática genérica.

Un punto muy importante para la factorización y solución de ecuaciones es lo que Barreto denomina como *anclaje visual* al *anclaje discursivo* que él define como: "*Asociación de un dibujo a una afirmación matemática*" (2009, Agosto).

De la anterior definición nosotros tomamos a la palabra afirmación matemática como la manipulación algebraica que se hace para llegar a la solución de la ecuación.

Para el producto notable del cuadrado de una diferencia, Barreto propone trabajar ecuaciones de la forma $x^2 - bx + c$ como lo hacían los antiguos griegos, lo cual indicaba que de un área mayor se restaba una menor; esta parte es importante ya que él trabaja con la sobreposición de cuadrados para representar la sustracción. Las ecuaciones propuestas se resuelven igual que en el de los productos notables del cuadrado de una suma utilizando la *aprehensión operativa de reconfiguración.*

Siguiendo la idea de Socas (1989), el aspecto algebraico que se utiliza en la escuela es de simbología algebraica lo cual nos indica que no hay relación en la escuela entre simbología visual y verbal porque no se ha encontrado un modelo que los ligue de forma adecuada, resalta la potencialidad de los gráficos; durante la historia se ha mostrado la visualización como una herramienta que permite una mayor comprensión de formulas algebraicas. Cabe aclarar que las generalizaciones algebraicas no surgen de la visualización sino que ésta complementa el entendimiento de tales generalizaciones.

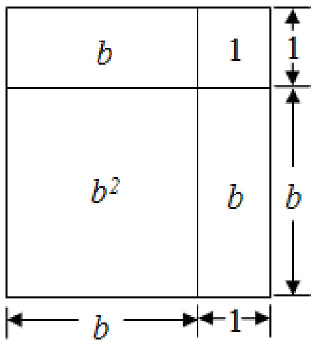
En esta actividad el lenguaje visual cumple un papel muy importante en la transformación que se da en el registro algebraico en el momento de dar solución al problema: dado el polinomio, se hace la representación con las Tabletas Algebraicas y se hace una discriminación visual del área de las figuras constitutivas del rectángulo, de sus dimensiones y de las longitudes de los lados del rectángulo. Luego, esta información se traduce a lenguaje algebraico expresando dicho polinomio como producto de factores.

3. Metodología del taller

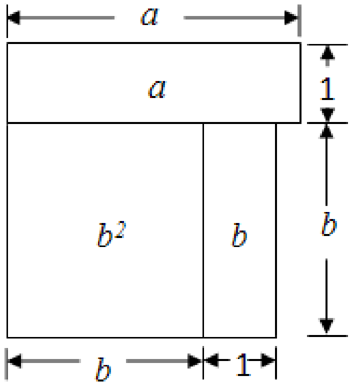
Los participantes se organizarán en grupos de dos personas. Para el desarrollo del taller primero se hará una presentación del material por parte de los talleristas a los participantes, con fichas de mayor área que las originales que servirán de referencia durante el desarrollo del taller. A continuación se repartirá a cada grupo una guía a desarrollar y un paquete de fichas. Cada grupo irá resolviendo el taller con asistencia de los talleristas. Es importante hacer un registro en hojas de las actividades propuestas para que los talleristas puedan verificar que las reglas de manejo de material, de interpretación de longitudes y las definiciones se comprendan. Finalmente, se hará una socialización. Las actividades que se propondrán se presentarán a través de una guía que contiene lo que sigue:

UNIÓN DE FICHAS

Sólo se pueden ubicar fichas consecutivas cuando los lados compartidos sean de la misma longitud



Forma correcta

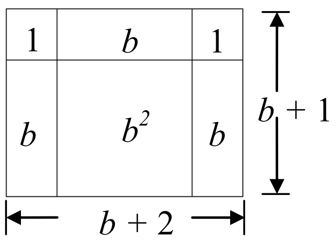


Forma incorrecta

a. De acuerdo con el anterior ejemplo, represente con el material, un caso en donde se muestre una forma correcta y otra forma incorrecta de unir fichas.

INTERPRETACIÓN DE LONGITUDES DE LADOS

Suma

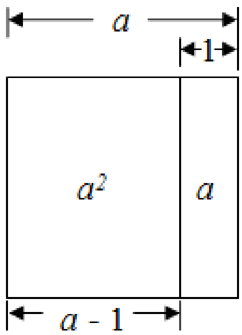


b. Construir algunos rectángulos con varias fichas siguiendo las reglas de unión, e indique la longitud de cada lado.

Sobreposición de fichas

Una ficha se puede colocar sobre otra siempre y cuando compartan, al menos, la longitud de uno de sus lados.

Aquí, tomamos una ficha a x a y sobreponemos una ficha a x 1, y las longitudes las podemos ilustrar así:



Obtenemos una región cuyas longitudes de lados son a y a-1. Se puede asumir este proceso como resta de longitudes de lados.

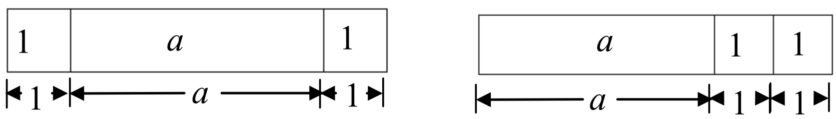
c. *De acuerdo con el anterior ejemplo represente con el material, un caso en donde se muestre una forma correcta y otra incorrecta de sobreposición de fichas indicando las longitudes de los lados como muestra la figura.*

d. *¿se puede sobreponer más de una ficha? si se puede, ¿Qué interpretación se le puede dar?*

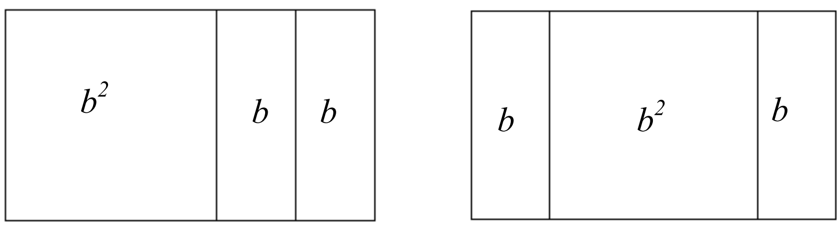
REPRESENTACIONES EQUIVALENTES

Las siguientes representaciones son equivalentes:

a)



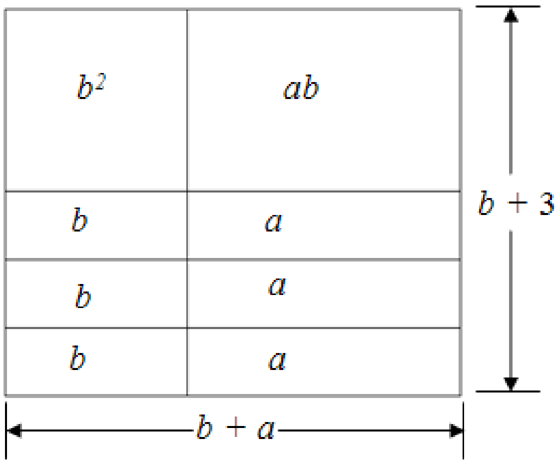
b)



e. *¿Cuándo considera que dos representaciones son equivalentes?*

f. Proponer, de acuerdo a su definición, un ejemplo de representaciones equivalentes y uno de representaciones no equivalentes.

ÁREAS



Este rectángulo está formado por una ficha b x b, una ficha a x b, tres fichas b x 1 y tres fichas a x 1. Si sumamos el área de las fichas tenemos $b^2 + ab + 3a + 3b$, un polinomio.

Recordemos que el área de un rectángulo se halla multiplicando la longitud de la base por la de la altura entonces el área de ese rectángulo se halla multiplicando $a + b$ y $b + 3$.

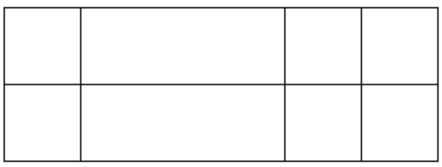
g. Desarrollen ese producto, y digan qué relación existe entre el área hallada por la suma de las fichas y el área hallada mediante el producto.

h. Construya con las Tabletas Algebraicas el área representada por el rectángulo formado por: 2 fichas a x b, 2 fichas a x 1*, 3 fichas b x* 1 *y 3 fichas unidad y escriba el polinomio que resulta por la suma de las fichas.*

FACTORES REDUCIBLES

La longitud de un lado del rectángulo será llamada factor. Un factor es reducible cuando tiene al menos dos representaciones con las tabletas no equivalentes

El monomio $2b + 6$ tiene las siguientes representaciones con las fichas

i) 

Área del rectángulo: (b + 3) (2)

ii) 

Área del rectángulo: (2b + 6) (1)

Como vemos, las longitudes de los lados correspondientes de las dos representaciones no son iguales, entonces las representaciones no son equivalentes, luego el monomio 2b + 6 es reducible. Como es reducible, debemos escoger una de las dos expresiones para su área, pero ¿Cuál?   ¿$(b + 3)$ (2) ó $(2b + 6)$ (1)?

Vamos a elegir aquella en la cual una de las longitudes no sea a, b o 1.

En i. ninguna de las longitudes es a, b o 1, en cambio, en ii. hay una longitud que es 1, entonces diremos que $2b + 6 = (b + 3)\ (2)$

Factorización es el proceso de expresar un polinomio como producto de factores irreducibles

i. Represente con las fichas el monomio 3b + 9 y escriba la factorización.

ACTIVIDAD FINAL

Represente con las tabletas los siguientes polinomios y escriba su factorización. Si encuentra factores reducibles, buscar y escribir la expresión que sea irreducible.

j. $2a^2 + 2ab + 2a + 2b$
k. $a^2 + 8a + 16$
l. $b^2 – 1$
m. $a^2 + 5a - 14$
n. $b^2 – 3b + 2$

4. Referencias bibliográficas

Barreto, J. (2009). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica [Versión electrónica]. *Números, 71,* 57-74.

Covas, M., Bressan, A. (2009). *La enseñanza del álgebra y los modelos de área*. Argentina: Fundación GEB.

Duval, R. (1999). *Registros de representación, comprensión y aprendizaje*. En semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Fernández, L. (s.f.). *El Álgebra. Su Historia desde las Civilizaciones Babilónicas hasta el Siglo XVII*. Extraído el 17 Abril 2011, de http://www.institutovanguardia.com.mx/system/tareas_uploads/meses/36/2007/4/Historia_del_algebra_I.doc

Grattan-Guinness, I. (1994). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage [Versión electrónica]. *Historia Mathematica, 31*(2), 163-185.

Joyce, D. (1996). *Euclid's Elements.* Extraído el 06 Mayo 2011 de http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookII/bookII.html

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica [Versión electrónica]. *Revista IRICE, 13.*

Meavilla, V. (s.f.). *Álgebra geométrica: notas históricas.* Extraído el 05 Mayo, 2011 de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/Topicos/AlgebraGeometrica/AlgebraGeometrica1.asp

Meavilla, V. (1995). Estudio sobre el comportamiento visual en álgebra de los alumnos del segmento educativo 14-16 [Versión electrónica]. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 13*(1)*,* 97-106.

Montoya, E., Montoya, J. (1999). *Áreas mágicas* (Proyecto matemáticas y física básicas en Antioquia). Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Morales, I., Sepúlveda, A. (2006). *Propuesta para la enseñanza de la factorización en el curso de álgebra.* En: Memorias 3 XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas.

Navarro, J. (2003). *Los "Elementos" de Euclides*. En: Un paseo por la Geometría - Año 2002/2003. Extraído el 06 Mayo, 2011, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=504&Itemid=75

Resnick L. y Ford W. (1990). La enseñanza de la matemática y sus fundamentos psicológicos. México: Paidós.

Socas, M.; Camacho, M.; Palarea, M.; Hernández, J. (1989). *Lenguaje visual y lenguaje algebraico*. En Iniciación al álgebra. Madrid: Editorial Síntesis.

Viviente, J. (1988). Geometría y/o Álgebra geométrica [versión electrónica]. *Zubía, 6,* 91-97.

Volver al índice
Talleres