Experiencia didáctica para la introducción de la función cuadrática en nivel secundaria a parir de la modelización de un fenómeno físico con las tecnologías digitales.

Edwar Ortiz[1], Mawency Vergel Ortega[2], Freddy Yesid Villamizar Araque[3]

[1, 2] Universidad Francisco de Paula Santander, [3] Universidad Nacional Abierta y a Distancia

edwarortiz@gmail.com, mawency@ufps,edu.co, freddy.villamizar@unad.edu.co

Fecha de Recepción:27 de noviembre 2020
Fecha de Aceptación: 29 de diciembre 2020
El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática.
Año 11. Volumen 15. Julio-Diciembre 2020
Cinvestav-IPN© Ciudad de México.ISSN 2007-4107 P.p. 21-33

Resumen
El presente trabajo describe una estrategia didáctica guiada por el modelo Cuvima para promover la comprensión del concepto de función cuadrática, debido a la dificultad cognitiva en la interpretación de sus representaciones y la ausencia de propuestas de enseñanza que rompan los esquemas tradicionales para la aprehensión de los conceptos. La propuesta consiste en introducir la función cuadrática en sus distintas representaciones a partir de una actividad experimental donde se modela el fenómeno físico de la caída libre mediante dicha función. Se aplicó un pretest, actividades y postest a estudiantes de secundaria (entre 14 y 15 años) y posteriormente se realizó un análisis basado en un enfoque metodológico mixto. Los resultados evidencian que el desarrollo de actividades didácticas basadas en la modelización experimental generó un aprendizaje significativo en los estudiantes, quienes transitaron por los diferentes registros de representación de función cuadrática dándole un sentido dentro de la Física.
Palabras clave: modelación matemática, tecnologías digitales, función cuadrática, ideas previas, caída libre.

Abstract
The present work describes a didactic strategy guided by the Cuvima model to promote the understanding of the concept of quadratic function, due to the cognitive difficulty in the interpretation of its representations and the absence of teaching proposals that break the traditional schemes for the apprehension of the concepts. The proposal consists of introducing the quadratic function in its different representations from an experimental activity where the physical phenomenon of free fall is modeled by means of said function. A pre-test, activities and post-test were applied to high school students (between 14 and 15 years old) and later an analysis based on a mixed methodological approach was carried out. Results show that the development of didactic activities based on experimental modeling generated significant learning in the students, who went through the different registers of quadratic function representation giving it a meaning within Physics.
Key words: mathematical modeling, digital technologies, quadratic function, previous ideas, free fall.

Introducción

Diversas investigaciones reportan que parte de la problemática en el aprendizaje de las matemáticas va más allá de errores de tipo operativo; al respecto Cuevas y Moreno (2004) señalan la existencia de dificultades en la comprensión de significados alusivos al concepto de función, como: el dominio, rango, máximos, mínimos, raíces; donde generalmente el estudiante opta por una resolución donde se siguen esquemas algorítmicos de manera memorística.

En el caso de la función cuadrática, la cual, hace parte del currículo en Colombia (MEN, 2006), se ha reportado diversas dificultades en los estudiantes que van más allá de la parte operativa. Al respecto, Ellis y Grinstead (2008) argumentan diversas dificultades en los estudiantes referente a la función cuadrática, las cuales se manifiestan en la complejidad para interconectar los distintos tipos de representaciones (algebraica, tabular, y gráfica), visualizar la gráfica como un todo, comprender el significado de los coeficientes a partir de la representación algebraica y distinguir entre una función lineal y una cuadrática a partir de una representación geométrica.

Lo anterior hace referencia a la aprehensión del concepto, el cuál en una parte, está relacionado con el tratamiento y conversión de sus representaciones (Duval, 1998). En efecto, Duval indica que los conceptos matemáticos se manifiestan en distintos *Registros de Representación Semiótica*, y para el caso de la función, puede representarse mediante conjuntos, tabla de valores, una gráfica sobre el plano cartesiano o una expresión algebraica con variables independiente y dependiente, sin embargo, el transitar de una representación a otra puede generar dificultades cognitivas en el estudiante.

Por otra parte, Vinner y Dreyfus (1989) reportan dificultades en el concepto formal de función. Ellos reportan que los estudiantes, aunque sean capaces de reproducir la definición formal de función, siguen utilizando sus propias imágenes o esquemas para solucionar problemas. En Colombia, no es ajena la problemática mencionada; Villa y Ruíz (2009) y Villarraga (2012) reportan dificultades en la comprensión del concepto de función cuadrática, mencionando que la representación gráfica de la función cuadrática se limita a determinar el vértice y el eje de simetría, luego tomar algunos valores enteros a izquierda y derecha para construir una tabla de valores, con el único objetivo de formar parejas ordenadas que se ubican en el plano cartesiano y unir estos puntos y representar dicha función. Esta forma de concebir el concepto de función cuadrática como una formula estática ya establecida y como un producto acabado requiere de memorización (Vasco, 1999).

Aunado a lo anterior, otra problemática está relacionada con la forma cómo se enseña la función cuadrática, debido a que la forma tradicional se enfoca en el aprendizaje memorístico y operativo, y dejando a un lado los contextos. Al respecto, Hitt (2002) señala que los conceptos matemáticos surgen de ciertos contextos y no tenerlos en cuenta generan dificultades de aprendizaje en los estudiantes. En el mismo sentido, Cuevas y Pluvinage (2003) y Cuevas, Villamizar y Martínez (2017), argumentan que los procesos de formalización de la matemática deben ser en lo posible contextualizados como una tarea del docente, para darle un sentido aplicativo a los conceptos matemáticos y promover un aprendizaje significativo (Ausubel, Novak y Hanesian, 2012).

Debido a la problemática planteada nos cuestionamos: ¿cómo diseñar una estrategia didáctica que promueva una mejor comprensión de la función cuadrática?

Para tratar de responder a dicho planteamiento se propone introducir la función cuadrática a partir de situaciones en contexto, particularmente del fenómeno físico de la caída libre el cual se puede modelizar con la función cuadrática. Para la modelización de un fenómeno físico se considera importante la experimentación y la acción por parte del estudiante la cual es mediada con la tecnología digital para potenciar los conocimientos y visualizar las representaciones del fenómeno.

Marco teórico

La presente propuesta se enmarca didácticamente en los siguientes tópicos teóricos:

El primero, *las ideas previas,* definidas como conocimientos que usan los estudiantes para interpretar los diversos fenómenos antes de recibir una enseñanza escolarizada científica. Se relacionan con los errores conceptuales cometidos en algún área de la ciencia. Sin embargo, no siempre son un conocimiento erróneo, sino incompleto o no compatible del todo con el conocimiento o conceptos científicos (Hierrezuelo y Montero, 2006). Las ideas previas se toman como punto de partida para el diseño de actividades didácticas y toma de conocimientos iniciales del estudiante.

El segundo, la modelización matemática, definida como el proceso de transitar un fenómeno en el mundo real a un modelo matemático que lo represente (interpretación inductiva), y que dicha representación ya sea aritmética, geométrica o algebraica permita interpretar deductivamente el fenómeno (Confrey y Maloney, 2007; Cirillo et. al, 2016; Cuevas, Villamizar y Martínez, 2017). Existen diversos modelos para la modelización matemática de un fenómeno (Cirillo et al., 2016), sin embargo, en el presente, haremos uso del modelo Cuvima (Cuevas, Villamizar y Martínez, 2017; Villamizar, Cuevas y Martínez, 2018; Villamizar, Martínez, Cuevas y Espinosa-Castro,2020) como columna vertebral para el diseño de una actividad experimental para la modelización del fenómeno de la caída libre mediante la función cuadrática. El modelo Cuvima, contiene 4 marcos para la modelización de un fenómeno físico, dentro de los cuales se incluye notablemente el uso de las tecnologías digitales para la toma de datos experimentales y obtención de un modelo matemático de un fenómeno en cuestión.

El tercero, *el cambio conceptual,* definido como el proceso de transitar las ideas previas hacia aquellas más aceptadas desde el conocimiento científico (Posner, Strike, Hewson y Gertzog, 1982). Sin embargo, Pozo (2007), expone una propuesta menos radical, mencionando que existen diferentes tipos de cambio conceptual; y lo deslinda como un proceso de reestructurar el conocimiento en el aprendizaje y la enseñanza de la ciencia, considerando que las ideas previas no necesariamente deben ser reemplazadas, sino reestructuradas a través del uso de las representaciones, las cuales pueden ser matemáticas.

La propuesta que se describirá parte de la recopilación de las ideas previas que poseen los estudiantes, como punto de partida para el diseño de actividades de modelización matemática, en la intención de promover el cambio conceptual en los estudiantes, es decir, reestructurar las ideas previas.

Metodología

Los pasos en el diseño metodológico fueron los siguientes:

1. Análisis del programa escolar de matemáticas y física. Se revisaron los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2006).

2. Para el desarrollo experimental, se analizaron diversos artefactos digitales, software y apps adecuadas que sirvan como mediadores de la experimentación del fenómeno físico, la toma de datos, la modelización del experimento físico real.

3. Diseño de un cuestionario de ideas previas, como instrumento basado en los aportes de Hierrezuelo y Montero (2006), para explorar las ideas previas de concepto de la física. En el mismo

instrumento, se exploran conceptos matemáticos asociados a la función cuadrática.

4. Diseño de actividades didácticas (incluyendo los experimentos físicos), guiados bajo el modelo metodológico Cuvima. Las actividades didácticas se presentan por medio de guías impresas, el docente siempre es guía en cada etapa de la actividad.

5. Diseño de un instrumento o test, posterior a las actividades para determinar que cambio conceptual evidencian los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

6. Aplicación de los instrumentos de medición y actividades didácticas, el cual se desarrolló con 39 estudiantes de nivel secundaria (14 y 15 años).

Para la recopilación de información, se utilizaron: bitácora, videograbaciones, fotos, guías impresas, y su análisis se realizó mediante un enfoque cualitativo al describir los resultados de las acciones ejecutadas por los estudiantes en el desarrollo de las actividades; el tratamiento de datos del pretest y postest fue bajo un enfoque cuantitativo para determinar el porcentaje de respuestas adecuadas o inadecuadas de las ideas previas y posteriores a las actividades.

Resultados

Resultados del pretest de ideas previas

En el cuestionario de ideas previas o pretest, se les planteó una situación problema a los estudiantes, que consiste en: al lanzar una bola con determinada velocidad verticalmente hacia arriba. ¿Cómo sería la gráfica que representa la posición de la bola respecto del tiempo?; ¿Cómo describes la aceleración de la bola, ésta crece, decrece o se mantiene constante?

De 39 estudiantes, las respuestas se analizan a de la siguiente manera:

Respecto a la representación gráfica del fenómeno de lanzamiento vertical, se evidenció que, un 95%, de los estudiantes presentó la dificultad para establecer cuál es la gráfica de posición en función del tiempo en el movimiento de caída libre; en consecuencia, los estudiantes asociaron que la función gráfica de la posición dependiente del tiempo en un experimento de caída libre, corresponde a una línea vertical y no una parábola.

El 89.7% de los estudiantes consideraban que la aceleración disminuye al lanzar hacía arriba una bola por el del plano inclinado o aumenta cuando desciende por el plano.

Para explorar los conocimientos matemáticos se propuso problemas donde se suministra una gráfica de la función cuadrática y se pedía hallar la representación algebraica adecuada, por otra parte, se indagó sobre el significado de los parámetros a, b y c de una función cuadrática dada de forma gráfica, es decir, a partir del registro gráfico de una función cuadrática se indagó sobre el signo de los parámetros. Las respuestas fueron:

El 84.6% presentó dificultades correspondientes a la conversión de un registro gráfico al algebraico de la función cuadrática y dificultades en el significado de los parámetros de la función cuadrática, donde no identificaban el signo adecuado de los parámetros para determinada gráfica.

Resultados de la actividad experimental guida con el modelo Cuvima

Los estudiantes desarrollaron un proceso de modelización matemática del fenómeno de la caída libre, mediante una guía didáctica, fundamentada en los cuatro marcos del modelo Cuvima (Figura 1)

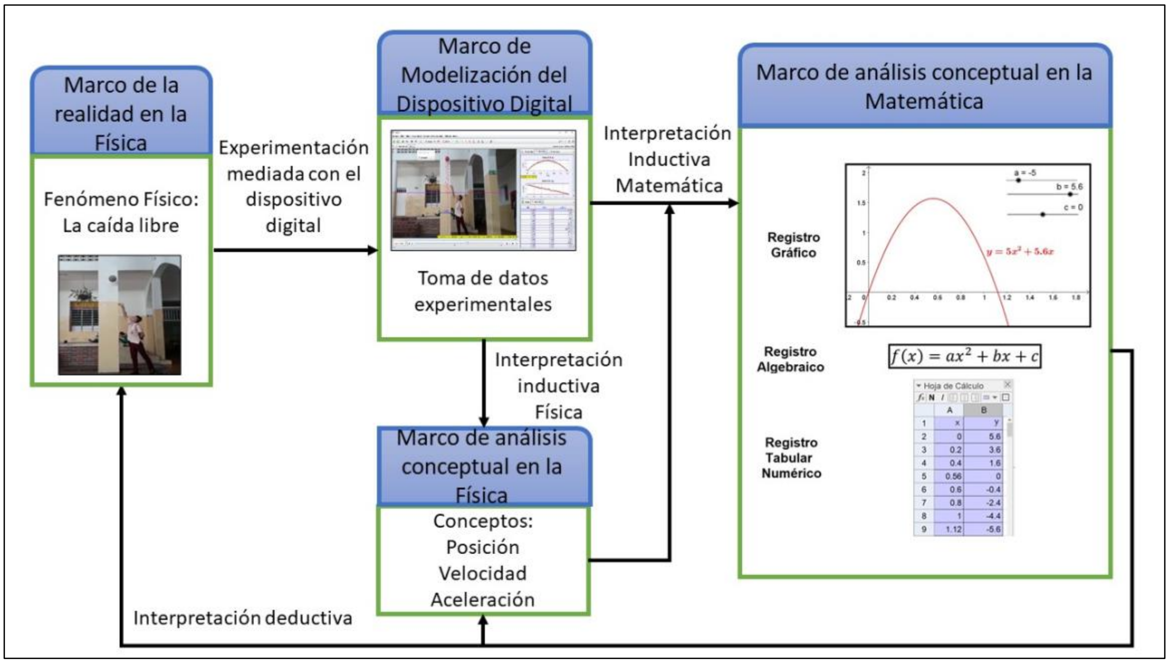


Figura 1. Adaptación del modelo Cuvima (Cuevas Villamizar y Matrínez, 2017) para guiar la modelación del fenómeno de caída libre

Marco de la Realidad en la Física (MRF).

En este marco, se parte de una situación problema del mundo real, en la cual, los estudiantes observan y experimentan el fenómeno físico de la caída libre de una bola (Figura 2). El experimento consiste en lanzar una bola verticalmente hacia arriba y tomar el video del lanzamiento (utilizando una cámara de teléfono inteligente o tableta con un tripoide). Para la toma del video, los estudiantes en grupos de tres establecen un patrón de medida sobre la grabación, es decir identifican la medida de un objeto que esté en el video.

Figura 2. Experimentación real del lanzamiento vertical en caída libre de una bola

Marco de modelización del Dispositivo Digital (MMDD).

En este marco, los estudiantes capturan los datos de la experimentación con el apoyo de recursos digitales, en este caso algunos utilizaron la herramienta de análisis de video *Vidanalysis* (en un teléfono inteligente) o *Tracker Physics* (en la pc) para la toma de datos. La aplicación o software de análisis de video les facilitó a los estudiantes obtener una representación de los datos experimentales a través de tablas de valores y gráficos en el plano cartesiano de la posición de la bola versus el tiempo y de la velocidad versus tiempo como se muestra en la Figura 3.

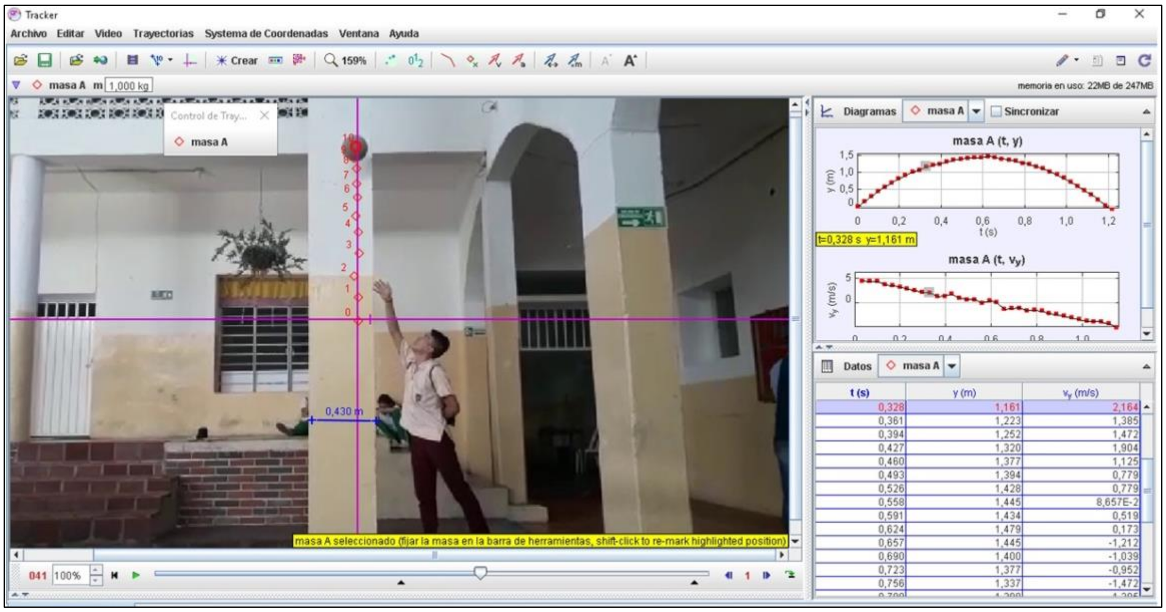


Figura 3. Toma de datos experimentales y modelización del dispositivo digital en Tracker Physics

Marco de Análisis Conceptual en la Física (MACF).

En este marco, el docente orientó a los estudiantes al estudio de los conceptos de caída libre, aceleración y velocidad a partir de las representaciones obtenidas en el dispositivo digital que se pueden observar en la parte derecha de la Figura 3.

En la socialización los estudiantes discutieron el tipo de representaciones que obtuvieron del experimento, asociando que la curva que representa la posición versus el tiempo se asemeja a una parábola (sin embargo, era sujeto a comprobación) y que la representación de la velocidad versus el tiempo es una línea recta que corta al eje *y* en un punto distinto de cero debido a que la velocidad inicial no parte del reposo. Como *interpretación inductiva en la Física* los estudiantes interpretaron que en el lanzamiento vertical o de caída libre la bola recorre espacios diferentes en tiempos iguales, y que la magnitud de la velocidad cambia igual en tiempos iguales.

Marco de Análisis Conceptual en la matemática (MACM).

Los estudiantes obtienen el modelo matemático en diversas representaciones del fenómeno físico, mediado con el software de análisis de video (Figura 3) y analizan el concepto de función cuadrática con ayuda del docente.

El software Tracker Physics, permitió capturar los datos numéricos de la altura y tiempo de vuelo de la bola, para luego ser exportados al software de geometría dinámica GeoGebra, en el cual, los estudiantes procedieron a crear una lista de puntos y realizar un ajuste polinómico para obtener una modelación del fenómeno físico, en un ambiente interactivo mediante deslizadores en GeoGebra; éstos, permitieron modificar dinámicamente los parámetros de la función cuadrática. Para ello, crearon tres deslizadores (parámetros a, b y c) con un rango de valores enteros y luego introdujeron en el campo de entrada del programa la expresión algebraica de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$; automáticamente se visualiza en la pantalla el registro gráfico y algebraico de dicha función con sus respectivos parámetros a, b y c (observar parte izquierda de la Figura 4).

El docente orientó a los estudiantes en la interacción con el recurso Geogebra, de modo que, al mover los deslizadores se obtenía dinámicamente diversas curvas parabólicas, hasta llegar a ajustar la curva con los puntos del experimento, como se muestra en la parte derecha de la Figura 4. Una vez ajustada la curva se obtuvo que los parámetros que mejor ajustan la curva son aproximadamente *a=5, b=5.6 y c=0*, es decir, obtuvieron la expresión $x(t) = 5t^2 + 5.6t$ o función $y = 5x^2 + 5.6x$ El ajuste de curva corresponde al proceso de *interpretación inductiva en la Matemática*, es decir, aquel que consiste en traducir el fenómeno físico a alguna representación en el campo de las matemáticos o modelo matemático.

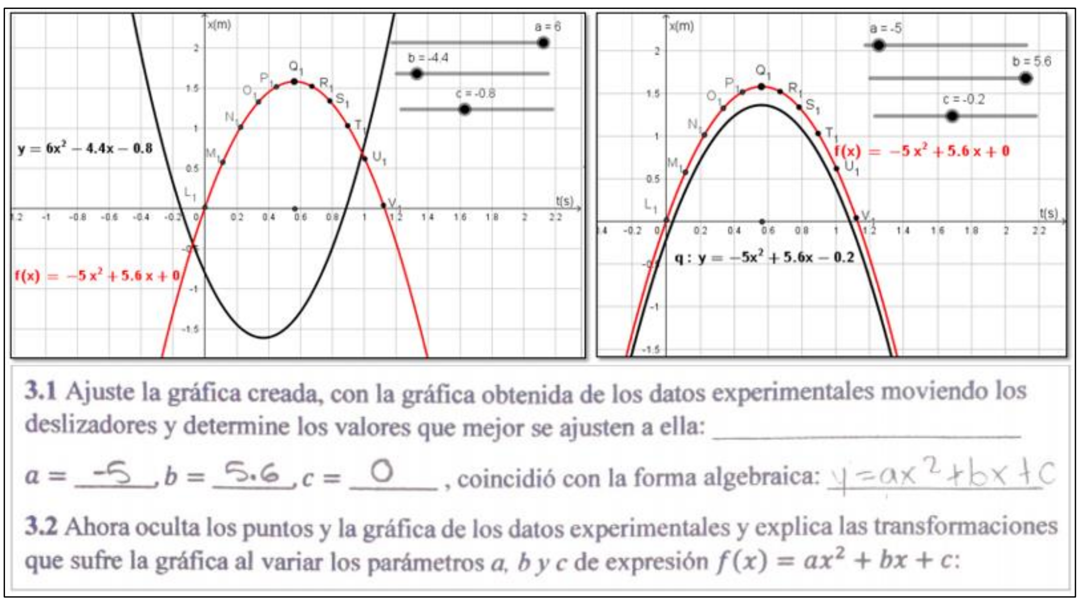
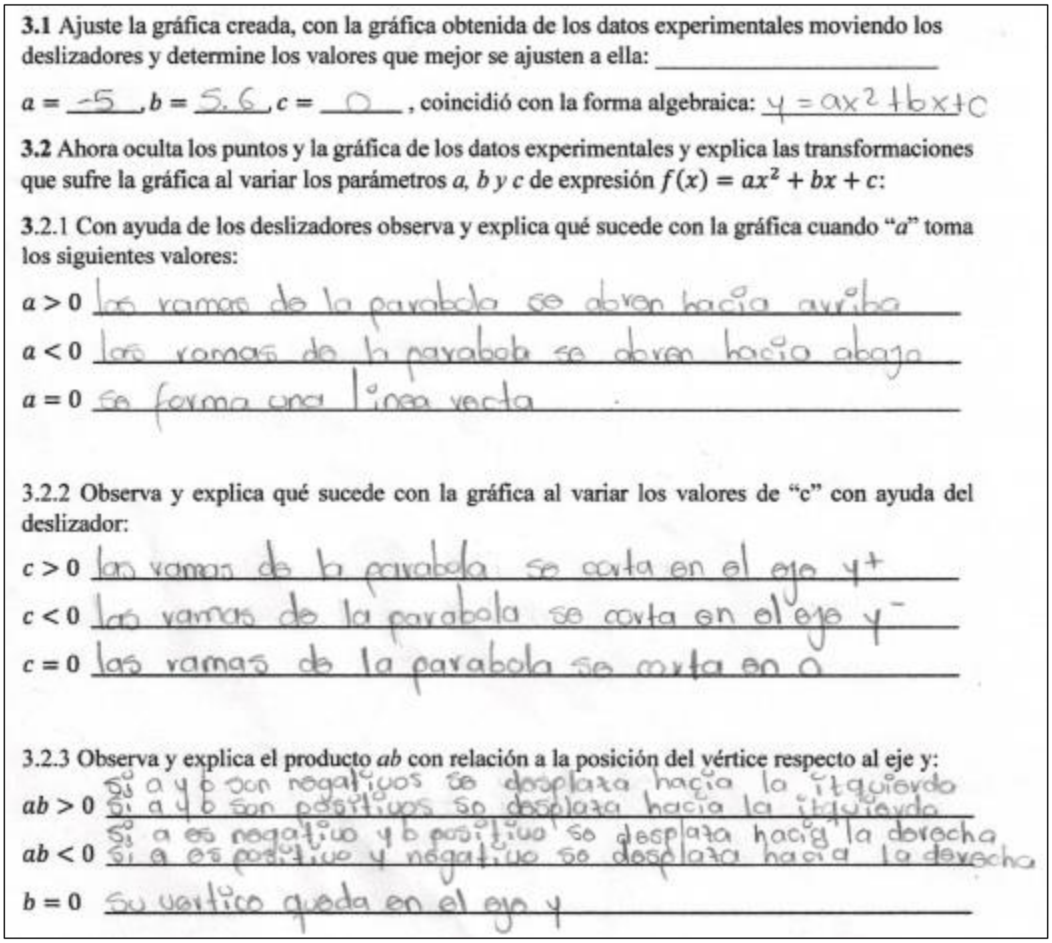


Figura 4. Ajuste de la gráfica de posición versus tiempo de manera dinámica en Geogebra

Posterior al ajuste de curva, se estudió el significado de los parámetros a, b y c de la función cuadrática indagando lo que sucede cuando se modificaban dinámicamente los valores de los parámetros (Figura 5)



3.1 Ajuste la gráfica creada, con la gráfica obtenida de los datos experimentales moviendo los deslizadores y determine los valores que mejor se ajusten a ella: ____________________

a = -5, *b* = 5.6, *c* = 0, coincidió con la forma algebraica: y = ax² + bx + c

3.2 Ahora oculta los puntos y la gráfica de los datos experimentales y explica las transformaciones que sufre la gráfica al variar los parámetros *a, b y c* de expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$:

3.2.1 Con ayuda de los deslizadores observa y explica qué sucede con la gráfica cuando "*a*" toma los siguientes valores:

$a > 0$ las ramas de la parabola se abren hacia arriba

$a < 0$ las ramas de la parabola se abren hacia abajo

$a = 0$ se forma una linea recta

3.2.2 Observa y explica qué sucede con la gráfica al variar los valores de "c" con ayuda del deslizador:

$c > 0$ las ramas de la parabola se corta en el eje y+

$c < 0$ las ramas de la parabola se corta en el eje y-

$c = 0$ las ramas de la parabola se corta en 0

3.2.3 Observa y explica el producto *ab* con relación a la posición del vértice respecto al eje y:

$ab > 0$ si a y b son negativos se desplaza hacia la izquierda / si a y b son positivos se desplaza hacia la izquierda

$ab < 0$ si a es negativo y b positivo se desplaza hacia la derecha / si a es positivo y negativo se desplaza hacia la derecha

$b = 0$ su vertice queda en el eje y

Figura 5. Significados de los parámetros *a, b* y *c* de la función cuadrática, dados por un grupo de estudiantes

A partir de la curva de posición versus tiempo ajustada, el estudiante ubicó un punto dinámico (que se puede mover a lo largo de la curva) y registró tanto para el ascenso como descenso de la bola, un primer intervalo de tiempo $\Delta t=0.11s$ con una distancia vertical recorrida de $QR \approx 0.060m$, de modo que, para diferentes los siguientes intervalos de 0,11 segundos, se registraron valores de factores impares de QR, como se muestra en la Figura 6.

El proceso de la Figura 6, fue orientado por el docente a través de intervenciones y anotaciones en el pizarrón, encontrando junto con los estudiantes, el patrón de los números impares en las distancias recorridas de la bola, al ascender y descender en intervalos de tiempos iguales. Las distancias se iban aumentando de acuerdo con factores impares distancia QR, 3QR, 5QR, 7QR, 9QR, Finalmente al acumular los valores de dichas distancias recorridas por la bola, se observa en el mismo análisis de la Figura 6, que los valores acumulares en determinados tiempos son 1QR, 4QR, 9QR, 16QR, 25QR, lo cual concuerda con el aporte de Galileo, quién descubrió que para el movimiento uniforme disforme (movimiento acelerado y de caída libre), la distancia recorrida por un cuerpo es directamente proporcional al cuadrado del tiempo (Fernández y Rondero, 2004; Feynman, 2008).

	Intervalo de tiempo: $\Delta t = t_0 - t$	Desplazamientos $\Delta y = y - y_0$	Tiempo acumulado	Distancia acumulada Por cada intervalo
Ascendente	Δt_1= 0,11	0,579 = 9QR	0,112	16QR + 9QR = 25QR
	Δt_2= 0,11	0,437 = 7QR	0,224	9QR + 7QR = 16QR
	Δt_3= 0,11	913 = 5QR	0,336	4QR + 5QR = 9QR
	Δt_4= 0,11	0,189 = 3QR	0,448	1QR + 3QR = 4QR
	Δt_5= 0,11	0,060 = 1QR	0,560	1QR = 1QR
Descendente	Δt_1= 0,11	0,059 = 1QR	0,672	1QR = 1QR
	Δt_2= 0,11	9183 = 3QR	0,784	1QR + 3QR = 4QR
	Δt_3= 0,11	0,307 = 5QR	0,896	4QR + 5QR = 9QR
	Δt_4= 0,11	0,415 = 7QR	1,004	9QR + 7QR = 16QR
	Δt_5= 0,11	0,555 = 9QR	1,116	16QR + 9QR = 25QR

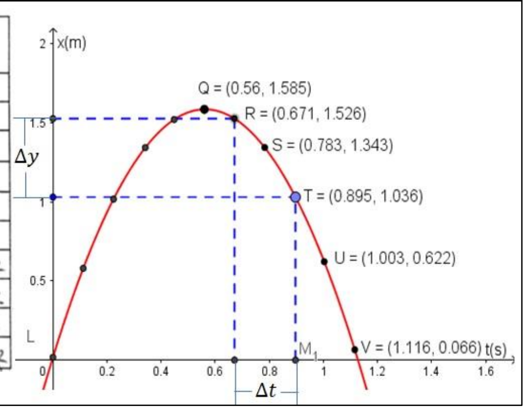


Figura 6. Registro y tabular de los datos experimentales del ascenso y descenso del objeto.

Interpretación deductiva del fenómeno físico a partir del modelo matemático

La interpretación deductiva como paso final del modelo Cuvima expuesto en la Figura 1, consistió en interconectar el modelo matemático obtenido en el marco de análisis conceptual *en la matemática* con la realidad, es decir, utilizar el modelo matemático del fenómeno para interpretar nuevamente los conceptos en la Física y el fenómeno de caída libre.

La Figura 7, muestra el análisis del modelo físico y matemático de la posición versus tiempo y la velocidad versus tiempo.

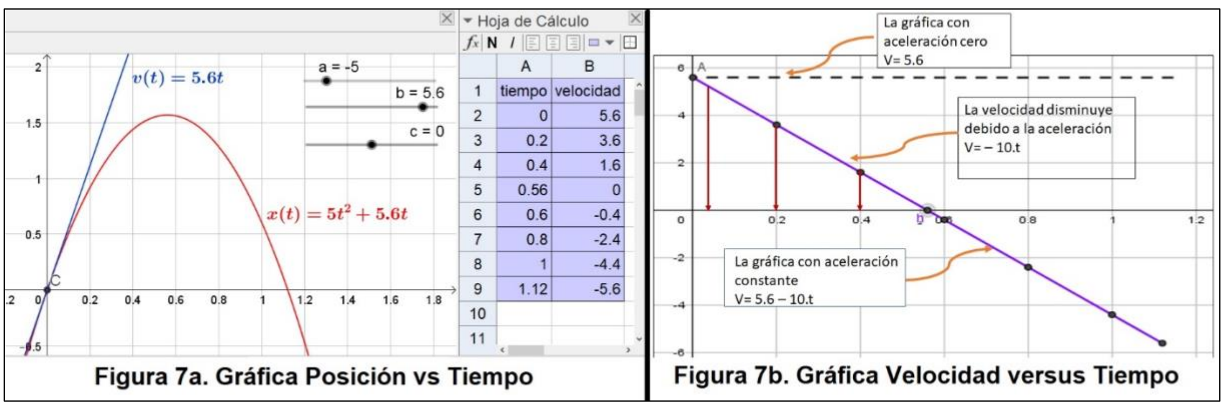
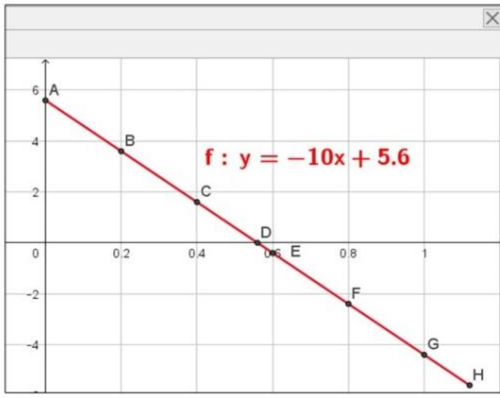


Figura 7. Representación del modelo físico de posición y velocidad versus tiempo

Los estudiantes utilizando GeoGebra, trazaron la recta tangente a la curva de posición versus tiempo (Figura 7a). El software les provee la representación algebraica de dicha recta tangente y el valor de la pendiente. Los estudiantes de forma dinámica en GeoGebra, ubicaron en el origen la recta tangente a la curva de posición versus tiempo, y observaron que el valor de la pendiente *m* fue igual a 5.6, es decir, es igual valor del parámetro *b* de la función cuadrática $y= 5x^2 + 5.6x$, de modo que, el valor del parámetro *b*, coincide con el valor de la ordenada al origen de la gráfica de velocidad versus tiempo mostrada en la Figura 7b.

Como parte de la interpretación deductiva, los estudiantes de manera grupal socializaron junto con el docente guía, que el valor y signo de la pendiente de la recta tangente a la curva de posición versus tiempo, corresponde al parámetro *b,* y que en la Física, éste representa la velocidad inicial con la que es lanzada la bola. Así mismo, concluyeron que el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de posición versus tiempo (función $y = 5x^2 + 5.6x$) representa la velocidad instantánea del movimiento de caída libre.

La Figura 8, muestra otra construcción realizada por los estudiantes, donde se registró en una tabla de valores la velocidad y el tiempo. Los valores de la velocidad, fueron obtenidos registrando el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de posición versus tiempo.



	A	B
1	tiempo	veloc...
2	0	5.6
3	0.2	3.6
4	0.4	1.6
5	0.56	0
6	0.6	-0.4
7	0.8	-2.4
8	1	-4.4
9	1.12	-5.6
10		
11		
12		

Intervalo de tiempo: $\Delta t = t - t_0$	Velocidad: $\Delta v = v - v_0$	$m = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]}$
0.2 - 0 = 0,2	3.6 - 5,6 = -2	$\frac{-2}{0,2} = -10$
0.4 - 0.2 = 0,2	1.6 - 3,6 = -2	$m = \frac{-2}{0,2} = -10$
0.6 - 0.56 = 0,04	0 - 1,6 = 1,6	$m = \frac{-0,4}{0,04} = -10$
0.56 - 0.8 = 0,24	-2,4 + 0,4 = -2	$m = \frac{-2,4}{0,24} = -10$
1.00 - 0.8 = 0,2	-4,4 + 2,4 = -2	$m = \frac{-2}{0,2} = -10$
1.12 - 1.00 = 0,12	-5,6 + 4,4 = 1,2	$m = \frac{-1,2}{0,12} = -10$

Tabla 3

Figura 8. Interpretación deductiva de fenómeno de caída en términos de velocidad en función del tiempo

A partir de la gráfica y valores de velocidad y tiempo mostrados en la Figura 8, los estudiantes encuentran el valor de la pendiente y sus dimensiones, descubriendo que, la pendiente es constante (-10 m/s^2), es decir, el lanzamiento vertical de la bola se trata de un movimiento con aceleración constante, cuyo valor representa la aceleración de la gravedad terrestre. Dichas argumentaciones se evidencian en la Figura 9.

15. De acuerdo con la tabla 3 y las dimensiones de la pendiente de la recta, qué me representa esta magnitud en el fenómeno estudiado:
gravedad porque las dimensiones fueron m/s²

16. Escribe la ecuación que provee GeoGebra de la tabla 2: y= 5. 6 - 10X   V=Vi - g.t

17. Qué significado tiene cada valor de los parámetros de la ecuación en el marco de la realidad física, compara con los ítems 5 y 15: velocidad inicial 5,6 y aceleracion de la gravedad de la tierra -10

18. Reescribe la ecuación del ítem 16 en el contexto de la física (cinemática): V = 5,6 - 10 t

Figura 9. Interpretación de la gráfica velocidad vs tiempo en el marco de la realidad de la física

Finalmente, los estudiantes asociaron el valor de la aceleración de la gravedad, con el valor de la pendiente de la recta de velocidad versus tiempo, y así mismo relacionaron que el valor de la aceleración de la gravedad corresponde a la mitad del parámetro *a* de la función cuadrática.

Al obtener la función *y=mx+b* (*V(t)=-10t+5.6)* los estudiantes lograron franquear la idea previa, de que la aceleración de la gravedad disminuye a medida que la bola sube, al observar que el valor de ésta corresponde a la pendiente m=-10, y permanece constante siempre.

Resultados del test posterior a las actividades

En el postest, se propuso a los 39 estudiantes, una serie de ejercicios, donde se buscó analizar de qué manera los estudiantes interpretan los parámetros de la función cuadrática a partir de la representación gráfica y algebraica. Además, de analizar la interpretación del significado de la función cuadrática dentro del campo de la Física. De la aplicación del postest a los 39 estudiantes, se obtuvieron los siguientes resultados:

El 64.8% de los estudiantes seleccionaron la opción correcta, encontrando la conexión de los parámetros *a*, *b*, y el desplazamiento del vértice con respecto al eje vertical de la función cuadrática.

El 91.8% identificaron la concavidad de la función cuadrática partir de su representación algebraica. En otro sentido, la misma cantidad de estudiantes lograron identificar los parámetros de la función cuadrática a partir de la representación gráfica.

En el análisis conceptual en la física, 75.7% de los estudiantes, seleccionaron correctamente la gráfica de posición en función del tiempo asociada a la representación gráfica del fenómeno de caída libre (lanzamiento vertical), lo cual es una evidencia del cambio conceptual. El 73% de los estudiantes interpretó la aceleración como una constante cuando un objeto en caída libre asciende o desciende.

Conclusiones

Como propuesta didáctica, la estrategia para introducir la función cuadrática de manera significativa se realizó a través del proceso de modelización matemática.

La modelización matemática como proceso que integra las Matemáticas con la Física u otras áreas del conocimiento, promueve el aprendizaje significativo debido a que el estudiante realiza experimentaciones y los objetos matemáticos como la función cuadrática, son utilizados para representar, interpretar y dar solución a una situación en contexto como se observó en el fenómeno de movimiento de la caída libre. En este sentido, el modelo Cuvima sirvió como un modelo metodológico para que el docente guiara el proceso de modelización, y a través del uso de la tecnología digital obtener las diversas representaciones de la función cuadrática, en la cual se manifiesta el concepto.

Referencias y bibliografía

Ausubel, D., Novak J., y Hanesian, H. (2012). *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* (trad. M. Sandoval). México: Trillas.

Confrey, J., y Maloney, A. (2007). A Theory of Mathematical Modelling in Technological Settings. In Modelling and Applications in Mathematics Education (pp. 57–68). US: Springer.

Cirillo, M., Pelesko, J., Felton-Koestler, M. y Rubel, L. (2016). Perspectives on Modeling in School Mathematics. In C. Hirsch & A. McDuffie (Eds.), Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics (p.p. 3–16).

Cuevas, C., y Moreno, S. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. *Educación Matemática. Redalyc*, 16(2), 93–104

Cuevas, C.A., y Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, elements d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, 273–292

Cuevas C.A., Villamizar, F.Y., y Martínez, A. (2017). Aplicaciones de la tecnología digital para actividades didácticas que promuevan una mejor comprensión del tono como cualidad del sonido para cursos tradicionales de física en el nivel básico. *Enseñanza de las Ciencias,* 35(3), 129–150.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (trad.), *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 173–201). México: Iberoamérica

Ellis, A. M. y Grinstead P. (2008). Hidden lessons: How a focus on slope-like properties of quadratic functions encouraged unexpected generalization. The Journal of Mathematical Behavio, 27, 277–296.

Fernández, G. M., y Rondero, C. (2004). El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 7(2), 145–156

Feynman, R. (1964/2008). La conferencia perdida de Feynman. El movimiento de los planetas alrededor del Sol. Barcelona: Tusquets editores.

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto.* México: Prentice Hall.

MEN (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Disponible en http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-340021_recurso_1.pdf

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., y Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66(2), 211–227.

Pozo, J. (2007). Ni cambio ni conceptual: la reconstrucción del conocimiento científico como un cambio representacional. En Pozo, J. y F. Flores (eds.). *Cambio conceptual y representacional en la enseñanza de la ciencia* (pp. 73-89). Madrid: A. Machado libros y cátedra UNESCO de educación científica para América Latina y el Caribe.

Vasco, C. (2002). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías.* Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas, 61–70. Bogotá: Colombia.

Villa, J., A., y Ruiz, H., M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*. Disponible en línea: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194215432007> [Fecha de consulta: 14 de diciembre de 2017].

Villarraga, S. P. (2012). *La función cuadrática y la modelación de fenómenos físicos o situaciones de la vida real utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de medición* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogota: Colombia.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20(4), pp. 356–366.

Villamizar, Cuevas y Martínez (2018). A Proposal of Instrumental Orchestration to Integrate the

Teaching of Physics and Mathematics. In V. Gitirana, T. Miyakawa, M. Rafalska, S. Soury-Lavergne, & L. Trouche (Eds.), *Proceedings Re(s)sources 2018 International Conference* (pp. 352–355). Lyon, France: ENS de Lyon. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01764563.

Villamizar, F., Y., Martínez, A., Cuevas, C. y Espinosa-Castro, J. (2020). Mathematical modeling with digital technological tools for interpretation of contextual situations. *Journal of Physics: Conference Series,* 1415, p.p. 1–6. *DOI*:10.1088/1742-6596/1514/1/012003

Vosniadou, E. (2014). Reframing the Classical Approach to Conceptual Change: Preconceptions, Misconceptions and Synthetic Models. En J. Barry, G. Kenneth y J. Campbell (Eds.), S*econd International Handbook of Science Education* (vol 2, pp. 119–130). New York.