Razonamiento Algebraico en la Escuela Primaria

Walter F. Castro G.
wfcastro82@gmail.com
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia

Resumen. El curso comprende tres sesiones; en la primera se hace una revisión de la literatura sobre la problemática de la enseñanza del álgebra en la escuela; en la segunda se presentan ejemplos de enfoques de introducción del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) en el currículo de algunos países, se exhiben segmentos de videos que muestran niños de escuela elemental trabajando con "álgebra", también se dan algunos ejemplos de tareas RAE. En la tercera sesión se propone una herramienta de análisis epistémico para identificar objetos y significados matemáticos presentes y emergentes en tareas matemáticas.

Palabras Claves. Razonamiento Algebraico Elemental, análisis epistémico, algebra elemental, currículo, transición.

1. Primera sesión: Sobre la problemática del álgebra en la escuela

La enseñanza del álgebra en la escuela secundaria ha sido un campo activo de investigación en educación matemática durante las dos últimas décadas; parte de esta indagación se ha centrado en la transición desde la aritmética hacia el álgebra.

Algunos de los campos temáticos donde se reportan investigaciones sobre las dificultades manifestadas por alumnos de escuela secundaria, reportadas en la literatura se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Campos temáticos.

CAMPOS TEMÁTICOS	AUTORES
Lenguaje	MacGregor y Price, 1999; Warren, 2006
Sentido operativo	Linchevski y Livneh, 1999

Sentido de la estrucutra	Sfard y Linchevski, 1994; Esty, 1992; Linchevski y Livneh, 1999
Signo igual	Freiman y Lee, 2004; Carpenter et al., 2003; Knut, et al., 2006
Problemas de palabras	Hall, et al., 1989; Kamal y Ramzi, 2000; Weaver y Kintsch,1992; Yerushalmy y Golead, 1999; Cerdan, 2008)

En respuesta a las dificultades experimentadas por los niños de escuela secundaria con el aprendizaje del álgebra, algunos autores tales como Davis (1985,1989), Vergnaud (1988) han argumentado a favor de la inclusión temprana del razonamiento algebraico elemental en la escuela primaria. Como afirman Godino y Font (2003), no se trata de impartir un "curso de álgebra" a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el pensamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato (grados K-12). Para Kaput (2000) el razonamiento algebraico elemental hace referencia a la "algebrización del currículo", es decir, a la integración del razonamiento algebraico en las matemáticas escolares desde la primaria. Para Carraher y Schlieman, (2007) el álgebra en la escuela primaria no es simplemente un subconjunto del currículo del álgebra de la secundaria, sino un subdominio de educación matemática con enfoques y problemas propios.

La propuesta de inclusión del álgebra en el currículo de la escuela primaria no es una idea nueva; los currículos matemáticos de China y Rusia, incluyeron algunos conceptos algebraicos durante la década de los cincuenta y los sesenta.

Kaput (1998) propuso el álgebra como una componente transversal del currículo y como un elemento clave para dar coherencia, profundidad y poder a las matemáticas escolares de tal suerte que se eliminara la introducción tardía y abrupta del álgebra.

Lacampagne, (1995) propuso que el álgebra debería permear todo el currículo en lugar de aparecer en cursos aislados; Mason (1996) ha propuesto que la generalización debe enfatizarse en la escuela primaria. Argumentos en el mismo sentido han sido propuestos por Booth (1988), Brown y Coles (2001), Crawford (2001), Henry (2001) y Warren y Cooper (2001).

La inclusión del razonamiento algebraico en la escuela elemental tiene implicaciones curriculares, cognitivas y de formación de los maestros. La NCTM (2000) propone vertientes en donde el álgebra puede enmarcarse en el currículo escolar: el estudio de los patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo), las funciones, y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos.

No parece posible ni conveniente brindar una definición de lo que se entiende por razonamiento algebraico elemental, en tanto que una aproximación debe ser provista por las investigaciones. Carraher y Schlieman (2007) anotan la necesidad de llevar a cabo investigaciones en varios frentes: funciones, patrones, generalizaciones, entre otros, para determinar con certeza en que consiste el razonamiento algebraico elemental, cuáles son las dificultades y competencias que los estudiantes manifiestan en su estudio y finalmente, cómo incluirla en el currículo escolar.

En la Tabla 2 se referencian algunos estudios sobre temáticas específicas del razonamiento algebraico en la escuela elemental. Las temáticas consideradas son: generalización, patrones, signo igual, incógnitas, variables y cuasi-variables.

Carpenter y Levi (2000) señalan dos aspectos centrales en el álgebra en la primaria: el primero, la generalización y el segundo, el uso de símbolos para representar y resolver problemas matemáticos.

Tabla 2. Temáticas específicas.

RAZONAMIENTO ALGEBRAICO	AUTORES	RESUMEN
Generalización	Mathematics Education Vol. 40, número 1, 2008; Blanton y Kaput, 2001; Lannin, et al., 2006	Se ofrece una perspectiva sobre la generalización, hallazgos, tareas y propuestas sobre su inclusión en el currículo de la escuela elemental.
Patrones	Zazkis y Liljedahl, 2002; Stacey, 1989; English y Warren, 1998; Cañadas, et. al., 2008; Radford, 2003	Se informa sobre diversos enfoques acerca del uso de los patrones en la escuela primaria y de los resultados de investigaciones. Se ofrecen conclusiones y propuestas para su inclusión curricular.
Signo igual	Carpenter, et al., 2003; Perry, et al., 1988; Molina, 2007; Knut, et al., 2006; Freiman y Lee, 2004	Informan sobre los resultados de investigaciones donde se explora el trabajo con “sentencias numéricas” y con el signo igual en su acepción como relación de equivalencia.
Incógnitas, variables y cuasi-variables	Schoenfeld y Arcavi, 1988; Radford, 1996; Tall, 2001; Carraher, et al., 2001; Fujii, 2003	Estudian los procesos de simbolización, asociados con el uso de incógnitas y de variables, efectuados por niños de escuela elemental.
	Kücheman, 1981	El concepto de variable pasa por el de

		incógnita, en tanto que "*el concepto de variable claramente implica alguna clase de comprensión de la incógnita así como de sus valores*" (p. 110). Así, la atención podría concentrarse en el concepto de incógnita para pasar posteriormente a la formalización del concepto de variable.
	Fujii y Stephens, 2001	Proponen el uso de "cuasi-variables" (números que se pueden quitar de una sentencia numérica válida, y reemplazarlos por otros sin que la validez sea alterada) para promover el uso de variables e iniciar a los niños en su estudio. Un ejemplo de una tal sentencia numérica es: 78-49+49 =78 (p. 259).

2. Segunda sesión: Ejemplos de inclusión curricular del razonamiento algebraico elemental.

2.1 Ejemplos de inclusión del razonamiento algebraico elemental, en los currículos de algunos países. Los desarrolladores del currículo y los responsables de políticas educativas, en algunos países, informados sobre los resultados de investigación en el RAE de más de una década, han iniciado la implantación del razonamiento algebraico elemental en la escuela primaria. Cai (2004) reporta que la idea de ecuación y resolución de ecuaciones comienza desde el primer grado de primaria en los libros de texto chinos; la idea de ecuación y resolución de ecuaciones se aborda desde la concepción de la resta como un procedimiento inverso a la suma. Un ejemplo de una ecuación que se pide resolver en primer grado es: "*Encontrar el número en ( ) tal que 9 + ( ) = 16*"; (Cai, 2004, p. 110).

En los grados cuatro, cinco y seis (11 a 13 años de edad), "x" se introduce como lugar para poner números desconocidos en el contexto de resolución de ecuaciones. En grado cinco, se introduce: (1) El uso de letras para representar números y relaciones cuantitativas; (2) La resolución de ecuaciones sencillas, y (3) La resolución de ecuaciones para resolver problemas de modelación. Para el currículo chino "*el propósito dominante del aprendizaje del álgebra es ayudar a los estudiantes a representar mejor y a entender las relaciones cuantitativas*", (Cai, 2004, p. 127).

Lew (2004) informa sobre cinco clases de habilidades matemáticas relacionadas con el álgebra que son enfatizadas en el currículo matemático coreano de la educación primaria. Estas son: generalización, abstracción, pensamiento analítico, pensamiento dinámico y organización. Además, para Lew "*…todos los tipos de pensamiento algebraico son enfatizados uniformemente a largo de todos los grados desde el primero hasta el sexto.*" (p. 100). Para el currículo coreano el álgebra se concibe como una manera de pensar, donde el principal foco de atención es el desarrollo de habilidades de pensamiento.

Por su parte, Fong (2004) reporta que en el currículo para la escuela primaria en Singapur, se adoptan tres enfoques para desarrollar el razonamiento algebraico elemental: resolución de problemas; generalizar y especializar[1], y finalmente "hacer y deshacer". En primaria, los niños resuelven problemas de carácter algebraico (construcción y solución de ecuaciones) mediante el uso de modelos para representar la situación.

Los niños resuelven problemas aritméticos (con valores conocidos) en los primeros grados de la primaria, y en tanto que progresan, resuelven problemas para hallar valores desconocidos. En estos problemas, tratan las cantidades desconocidas como si fueran conocidas.

Tareas en donde los niños deben identificar, entender y extender patrones geométricos, y numéricos están presentes en todo el currículo matemático de la primaria. Adicionalmente, el currículo ofrece tareas en las que se usa la construcción de reglas mediante dos procesos: Hacer-deshacer y "operaciones hacia delante", que se ubican en el contexto del enfoque funcional.

En Japón también se han introducido algunos componentes del razonamiento algebraico elemental en el currículo de la escuela primaria. Los contenidos se pueden dividir en tres categorías (Watanabe, 2008): Ideas acerca de funciones, escritura e interpretación de expresiones matemáticas. Estas categorías de contenidos se distribuyen a lo largo del currículo propuesto para los seis años de escuela primaria. A manera de ejemplo, en el contenido correspondiente a expresiones matemáticas, se proponen tareas tales como: Escribir e interpretar expresiones matemáticas que usan las cuatro operaciones fundamentales; comparar números y cantidades; escribir y comparar expresiones matemáticas que usan paréntesis, y finalmente, el uso de los símbolos (rectángulo y triángulo) y la letra "x" en expresiones matemáticas y la evaluación de tales expresiones mediante la sustitución de valores numéricos.

Según Watanabe -*ibid*- "*el estudio del álgebra en la escuela primaria pretende no sólo desarrollar competencia algebraica sino también promover una comprensión más profunda de otros contenidos en el currículo de matemáticas*" (p. 192).

1 Explorar una estructura o idea que apoya un concepto matemático particular o un objeto físico. Fong (2004, p. 42).

Moyer, et. al., (2004) reportan un caso de introducción del razonamiento algebraico elemental en la escuela primaria, en Estados Unidos, por medio de una propuesta curricular que ofrece a los niños experiencias formales e informales con el álgebra. Las ideas algebraicas centrales en esta propuesta son: El cambio, patrones y relaciones, representación y modelación. Por medio de las actividades contenidas en la propuesta curricular, se pretende "*promover procesos mentales que constituyen el hábito de pensamiento algebraico conocido como construcción de reglas para representar funciones*" (p. 6).

En Hong Kong, el álgebra se introdujo para desarrollar el sentido simbólico en los grados inferiores y el uso de ecuaciones en los superiores (Wong, 2005). Los contenidos algebraicos en la escuela primaria, de acuerdo con Wong -*ibid*- tienen una fuerte influencia del álgebra de la secundaria, en tanto que consideran el estudio de: manipulación simbólica, balanceo de ecuaciones, planteamiento de ecuaciones y búsqueda de la incógnita. En el currículo matemático de la primaria el "*álgebra, particularmente los símbolos, están lado a lado con la aritmética*" (Wong, 2005, p. 29).

Los autores concluyen que:

> *Si los niños son expuestos tanto a métodos aritméticos como algebraicos para resolver ecuaciones simples y se les da la oportunidad de discutir y comparar estos métodos, los niños finalmente comenzarán a considerar problemas sencillos desde perspectivas múltiples y llegarán a ser más abiertos de mente. (p. 29).*

Esta hipótesis está en línea con algunas que han sido comprobadas empíricamente por algunos estudios longitudinales sobre la inclusión del razonamiento algebraico desde la escuela elemental (Derry, et al., 2007; Schliemann, et al., 2003) y cuyos resultados alientan la iniciación de la enseñanza del álgebra en la escuela primaria.

En este apartado se han presentado casos de introducción del razonamiento algebraico elemental en los currículos de la escuela primaria de varios países (China, Corea, Singapur, Japón, Estados Unidos, Hong Kong). La Tabla 3 exhibe un compendio de los enfoques comentados en este apartado.

Tabla 3. Resumen sobre Algunos Enfoques Curriculares sobre el RAE.

AUTOR	PAÍS	APROXIMACIÓN
Fong (2004)	Singapur	Resolución de problemas, generalizar y especializar, hacer y deshacer.
Watanabe (2008)	Japón	Funciones, relaciones y escritura de representaciones.
Cai (2004)	China	Uso de letras, resolución de ecuaciones y modelación.
Lew (2004)	Corea	"Todos los modos de pensamiento algebraico son

		uniformemente cobijados".
Moyer, Huinker and Cai (2004)	Estados Unidos	Cambio, patrones, relaciones, representación y modelación.
Wong (2005)	Hong Kong	Manipulación simbólica, resolución de ecuaciones y modelación.

Los casos muestran que existe consenso en la comunidad de investigadores y de gestores de políticas educativas en relación con la introducción del razonamiento algebraico en la escuela elemental. De un lado parece que no existe acuerdo en relación con una respuesta a las preguntas: ¿Qué es el razonamiento algebraico elemental?, ¿Qué tipo de actividades matemáticas favorecen reconocer los elementos básicos del álgebra? y que a su vez favorezcan la superación de algunas de las dificultades reportadas en la literatura.

De otro lado, parece que existe acuerdo en la comunidad de investigadores en que algunos temas son propicios para la introducción del razonamiento algebraico elemental (patrones, generalización, pensamiento relacional, signo igual, entre otros). La pertinencia de la introducción del razonamiento algebraico desde la escuela primaria para que los alumnos en la escuela secundaria superen algunas de las dificultades atávicas reportadas en la literatura parece estar aceptada.

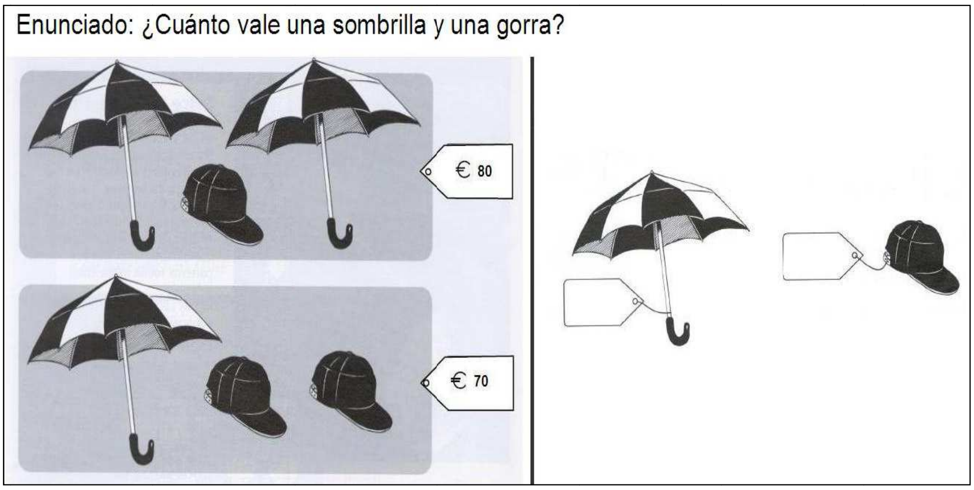
2.2 Ejemplos de tareas tipo RAE. En esta sesión del curso se ofrecen algunas tareas extraídas de propuestas de materiales didácticos y de investigaciones realizadas con niños de escuela elemental.

Blanton y Kaput (2001) sugieren que el cambio en algunas variables de tarea puede generar oportunidades de usar el álgebra. Existe una enorme variedad de propuestas sobre tareas que pueden ser propuestas a niños de escuela elemental en cada uno de los grados. Dos libros que ofrecen una gran variedad de ejercicios agrupados por categorías son: "*Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*", escrito por Thomas Carpenter, Megan Loef Franke y Linda Levi en 2003 y, "*Developing Thinking in Algebra*", escrito por John Mason, Alan Graham y Sue Johnston-Wilder en 2005.

En lo que sigue se exhiben algunas tareas, se indica la fuente y el nivel para el cual están propuestas. Las tareas se exhiben con ánimo de ilustración y no pretenden ser ni modelos ni ejemplificar categorías. Durante la tercera sesión de este curso, se utilizará una herramienta que facilita el análisis del contenido matemático-algebraico de las mismas.

Tarea 1: Gorras y Sombrillas.

Esta tarea ha sido adaptada del libro texto Positive Algebra, recopilado y editado por Martin Kindt (2004). Se propone para quinto o sexto año.



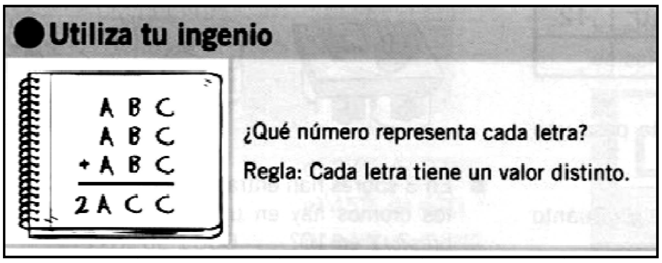
Tarea 2: Ejercicio sobre "Reglas"

Carpenter et al., (2003) proponen tareas a las que denominan "representación simbólica de conjeturas". Se propone para niños de tercer y cuarto año de escuela primaria.

Los autores afirman "una posibilidad es retar a los niños a escribir sentencias numéricas abiertas que sean ciertas para todos los números" (p. 79) Para los autores una sentencia numérica hace referencia a expresiones del tipo: 4+3=7, o, 6= 4+ 2; abierta hace referencia al uso de espacios en blanco, para escribir los números. El uso de las letras será propuesto por los niños de manera espontánea. Algunas de las representaciones simbólicas propuestas por los niños, y reportadas por los autores: a-a=0; 1x a=a; a/1=a.

Tarea 3: Ejercicio de Suma

Este ejercicio ha sido tomado del libro texto español Anaya 6. Ferrero, L., y otros, p. 12, para sexto grado.



3. Tercera sesión: Análisis epistémico de algunas tareas. Niveles y grados de algebrización.

Russel, et al., (2011, p. 43) plantean la pregunta ¿Cuáles son las formas de razonamiento y las comprensiones esenciales que tienen sus raíces en la aritmética y que son esenciales para el álgebra? Durante esta tercera sesión se propone una herramienta de análisis epistémico, denominada Guía para identificar Objetos y Significados (GROS) y se aplicará a algunos ejemplos. Se proponen niveles y grados de algebrización. Tal vez la Guía pueda ser usada para aproximarse a una respuesta a la pregunta de Russel, Schifter y Bastable -*ibid*-.

3.1 Análisis epistémico. La propuesta del Enfoque Ontosemiótico de la instrucción y la cognición-EOS- (Godino, et al., 2007), permite efectuar tres tipos de análisis en el marco de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Análisis epistémicos y cognitivos, análisis curriculares y de los aprendizajes y finalmente, análisis instruccionales y ecológicos.

Si bien se enumeran por separado, ellos dan cuenta de procesos íntimamente vinculados en contextos de formación matemática. El análisis epistémico y cognitivo es un constructo teórico complejo que pone en interacción, con motivo del estudio de problemas matemáticos, dos nociones teóricas: las entidades primarias y las secundarias. La primera está conformada por los "conocimientos matemáticos" que comprende: lenguajes, situaciones, procedimientos, argumentos, proposiciones y definiciones; la segunda comprende las entidades duales: unitario-sistémico, expresión-contenido, institucional-personal, intensivo-extensivo, no ostensivo-ostensivo.

El análisis de objetos y significados, potenciado por el constructo teórico formado por las entidades primarias, ha sido estudiado en varios documentos (Castro y Godino, 2009; Godino, et al., 2008).

El análisis epistémico tiene tres objetivos: El primero, explorar objetos y significados puestos en juego en la solución de un problema, que se asume como un análisis de referencia; el segundo, identificar posibles conflictos de significado y predecir dificultades y errores que podrían surgir en las soluciones que los niños dan al problema, y el tercero, explorar cómo el uso de las entidades primarias favorece predecir e identificar conflictos potenciales.

3.2 La guía de reflexión de objetos y significados. En Godino et. al., (2008) se ofrece un ejemplo del uso del instrumento denominado Guía para la Reflexión de Objetos y Significados (GROS). Se entiende el "análisis epistémico" como una caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. Se trata de descomponer la configuración epistémica en unidades de análisis para caracterizar el tipo de actividad matemática que se implementa. Esto requiere identificar los objetos matemáticos puestos en juego, las relaciones entre ellos, los modos de organización en que se agrupan y las relaciones ecológicas que se establecen entre los mismos.

La identificación permite ampliar la atención desde las entidades referidas hasta el papel que juegan en el seno de la actividad matemática. La concreción de la identificación de los objetos y la asignación de significados presentes y emergentes en la actividad matemática de resolución se logra mediante una tabla, que se denomina la Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS). En Castro, et al., (2011) se informa cómo la GROS favorece dar cuenta de un proceso complejo y dinámico, y que puede ser cumplimentada de varias maneras; lo cual pone de manifiesto la relatividad de los objetos y significados matemáticos.

Referencias bibliográficas

- Blanton, M. L., & Kaput, J. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. In H. L. Chick & K. Stacey (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI* (Vol. 1): 344-352. Melbourne: University of Melbourne.
- Booth, L. R. (1988). Children´s difficulties in beginning algebra. The Ideas of Algebra, K-12: 1988 Yearbook, 20-32. *A. F. Coxford and A. P. Shulte, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics*.
- Brown, L., & Coles, A. (2001). Natural algebraic Activity. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the Twelfth ICMI Study Conference*: *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*: Vol. 1: 20-127. Melbourne, Australia, University of Melbourne Press.
- Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the chinese elementary school curriculum. *The Mathematics Educator, 8*(1): 107-130.
- Cañadas, M. C., Castro, E., y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de educación secundaria obligatoria en el problema de las baldosas. *Pensamiento Numérico y Algebraico, 2*(3): 137-151.
- Carpenter, T., & Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. *Madison, MA: Wisconsin University,Madison.National Center for Improving*. Reporte Eric 470 471.
- Carpenter, T. P., Frankle, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*: Heinemann, Portsmouth, NH.
- Carraher, D. W., Schlieman, A., & Brizuela, B. (2001). Can young students operate on unknowns? In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1): 130-140. Utrecht.
- Carraher, D. W., & Schlieman, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester & K. Jr (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Vol. 2: NCTM.
- Castro, W. F., & Godino, J. D. (2009). Cognitive configurations of pre-service teachers when solving an arithmetic-algebraic problem. *Artículo presentado en Congress of European Research In Mathematics Education (CERME 6)*, Université Claude Bernard, Lyon, France. Retrieved 25 july, 2010, from http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg4-04-castro-godino.pdf.
- Castro, W. F., Godino, J. D., y Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 25, 73-88.*

- Cerdan P, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos.* Tesis doctoral. Universitat de Valencia, Valencia.
- Crawford, A. R. (2001). Developing algebraic thinking: Past, present, and future. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the Twelfth ICMI Study Conference*: *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*: Vol. 1: 192-198. Melbourne, Australia, University of Melbourne Press.
- Davis, R. B. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior, 4*: 195-208.
- Davis, R. B. (1989). Theoretical considerations: Research studies in how humans think about algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4: 266-274. Reston, VA: NCTM y Laurence Erlbaum Associates.
- Derry, S. J., Wilsman, M. J., & Hackbarth, A. J. (2007). Using constrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3): 305-329.
- English, L. D., & Warren, E. (1998). Which is larger, t+t or t+4? *The Mathematics Teacher, 91*(2): 166-170.
- Esty, W. W. (1992). Language concepts of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics 22(3): 170-218.*
- Fong, N. S. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of the Singapore primary mathematics curriculum. *The Mathematics Educator, 8*(1): 39-59
- Freiman, V., & Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equality sign. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2: 415-422. Bergen, Norway: PME.
- Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. In H. L. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra,* Vol. 1: 258-264. Melbourne: University of Melbourne.
- Fujii, T. (2003). Probing students´s understanding of variables through cognitive Cconflict: Is the concept of a variable so difficult for students to understand. In N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1: 47-64. Honolulu, HI.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2): 127-135.
- Godino, J. D. & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico para maestros. En, Godino, J. D. (Dir.) (2004). *Matemáticas para maestros* (pp. 379-421). Granada: Los autores. (Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/welcome.html
- Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., & Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. In *ICME 11*. Morelia: ICME
- Hall, R., Kibler, D., Wenger, E., & Truxaw, C. (1989). Exploring the episodic structure of algebra story problem solving *Cognition and Instruction, 6*(3): 223-283.
- Henry, V. (2001). An examination of educational practices and assumptions regarding algebra instruction in the United States. The Future of the Teaching and Learning of Algebra. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, Melbourne, Australia.*
- Kamal, A., & Ramzi, N. (2000). *The role of presentation and response format in understanding, preconceptions and alternative concepts in algebra problems*: ERIC Number 438 174.
- Kaput, J. (Ed.). (1998). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum*. Washington D.C: National Academy Press.

- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum*: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA.
- Kindt, M. (2004). Positive algebra: a collection of productive exercises. *Freudenthal Institute. Utrecht*.
- Knuth, E. J., Alibali, M., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4): 297-312.
- Kücheman, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children´s understanding of mathematics: 11-16* , 102-119. London: John Murray.
- Lacampgne, C. B. (1995). The Algebra Initiative Colloquium. U.S Departament of Education OERI. Washinton, DC.
- Lannin, J. K., David, B., & Townsend, B. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding? *Journal of Mathematical Behavior, 25*: 299-317.
- Lew, H. C. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of Korean elementary school mathematics. *The Mathematics Educator, 8*(1): 88-106.
- Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relation between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*: 173-196.
- MacGregor, M., & Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4): 449-467.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In C. K. Nadime Bednarz, Lesley Lee (Ed.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching,* 65-86. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Mason, J., Graham, A. T., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: Paul Chapman Publishing, 336 pp.
- Molina, G. M. (2007). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Moyer, J., Huinker, D., & Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the U.S investigations curriculum. *The Mathematics Educator, 8*(1): 6-38.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Perry, M., Church, R. B., & Goldin-Meadow, S. (1988). Transitional Knowledge in the aquisition of concepts. *Cognitive Development 3: 359-400*.
- Radford, L. (1996). The role of geometry and arithmetic in the development of algebra:Historical remarks from a didactic perspective. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra,* 39-53. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1): 37-70.
- Russel, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. En Cai, J y Knuth, E.(Eds.), Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. 43-69. Springer-Verlag, Dordrecht.
- In H. L. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra,* Vol. 1: 258-264. Melbourne: University of Melbourne.
- Schlieman, A., Carraher, D. W., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., & Peled, I. (2003). Algebra in elementary school. In N. Pateman, B. Dougherty & J. Zillion (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA. CRDG, College Educatio,* Vol. 4: 127-134. Honolulu, HI: University of Hawaii.

- Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher, 81*, 420-427.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191-228.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2): 147-164.
- Tall, D. (2001). Reflections on early algebra. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1: 149-152. Utrech, Netherlands.
- Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l' apprentissage de l'algebre*. Articulo presentado en las Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des matematiques et de l' informatique,* 189-199, Paris: La Pensée Sauvage.
- Warren, E., & Cooper, T. J. (2001). Theory and practice: Developing an algebra syllabus for P-7. *Articulo presentado en The future of the Teaching and Learning of Algebra.Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, Melbourne*: Australia.
- Warren, E. (2006). Comparative mathematical language in the elementary school: A longitudinal study. *Educational Studies in Mathematics, 62*: 169-189.
- Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A japanese perspective. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics. Seventieth Yearbook*. Reston, VA: NCTM.
- Weaver, C. A., & Kintsch, W. (1992). Enhancing students´ comprehension of the conceptual structure of algebra word problems. *Journal of Educational Psychology, 84*(4): 419-428.
- Wong, N.Y. (2005). The positioning of algebraic topics in the Hong Kong elementary school mathematics curriculum. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematic, 37*(1): 23-33.
- Yeap, B.-H., & Kaur, B. (2008). Elementary school students engaging in making generalization: A glimpse from a Singapore classroom. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematic, 40*(1): 55-64.
- Yerushalmy, M., & Golead, S. (1999). Structure of constant rate word problems: A functional approach analysis. *Educational Studies in Mathematics, 39*: 185-203.
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*: 379-402.

Volver al índice Cursos