Martín, J. C. y González, J. L. (2020). Elementos del análisis histórico de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Algunas consecuencias didácticas. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *3*(1), 12-21.

ISSN: 2603-9982

ELEMENTOS DEL ANÁLISIS HISTÓRICO DE LOS SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS. ALGUNAS CONSECUENCIAS DIDÁCTICAS

Juan Carlos Martín Molina, Universidad de Córdoba

José Luis González Marí, Universidad de Málaga

Resumen

Análisis histórico elemental, motivado por la búsqueda de sentido al uso y aplicaciones actuales de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, centrando la atención en el origen del concepto y en los métodos de resolución. El estudio forma parte del análisis fenómeno-epistemológico que permitirá configurar un modelo local para la interpretación de la comprensión del mismo. Destacar la estrecha relación con el desarrollo de las ecuaciones y el álgebra en general, participando de las cuatro etapas conocidas hasta llegar al simbolismo algebraico actual, así como la existencia de métodos de resolución diversos y diferentes formas de representación.

Palabras clave: *Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; análisis histórico, epistemológico y fenomenológico.*

Elements of the Historical Analysis of the Systems of Two Linear Equations With Two Incognites. Some Didactic Consequences

Abstract

Elementary historical analysis, motivated by the search for meaning to the current use and applications of the systems of two linear equations with two unknowns, focusing attention on the origin of the concept and on the methods of resolution. The study is part of the phenomenon-epistemological analysis that will allow to configure a local model for the interpretation of the understanding of the same one. Highlight the close relationship with the development of equations and algebra in general, participating in the four known stages up to the present algebraic symbolism, as well as the existence of diverse methods of resolution and different forms of representation.

Keywords*: Systems of two linear equations with two unknowns; historical, epistemological and phenomenological analysis.*

Recibido: 11/04/2020; Aceptado:27/04/2020

INTRODUCCIÓN

Desde sus orígenes, el ser humano ha intentado comprender los diferentes aspectos que forman parte del entorno y actuar sobre ellos con diferentes herramientas. En este sentido, los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (SE_2LI_2) forman parte de los modelos matemáticos que facilitan la tarea de la resolución de problemas en los que se dan diversas relaciones de dependencia lineal: fenómenos físicos que tienen que ver con magnitudes (escalares: masa, tiempo, longitud, dinero, ...) o situaciones en las que intervienen estructuras lineales (vectores: fuerza, velocidad, campo eléctrico, etc.).

El tratamiento didáctico de estos conocimientos requiere de múltiples análisis que permitan resituarlos/adaptarlos adecuadamente[1] al entorno individual, sociocultural y educativo actual. En el presente documento se presentan algunos de los resultados del análisis realizado desde un enfoque histórico, pero atendiendo, en función del interés didáctico, a criterios conceptuales y procedimentales más allá del mero desarrollo cronológico.

En lo que sigue se presentan, por este orden, las conclusiones del estudio realizado sobre los siguientes aspectos del conocimiento: 1º.- evolución del lenguaje algebraico hasta llegar al algebra simbólica actual, 2º.- procedimientos de resolución de SE_2LI_2 a lo largo de la historia, 3º.- representación de los SE_2LI_2 y tratamiento actual en las aulas de Educación Secundaria

EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO

El uso de un simbolismo adecuado favorece el desarrollo del pensamiento algebraico, razón por la cual en la historia del álgebra tiene importancia no sólo la historia de los conceptos sino también el sistema de símbolos utilizados para expresarlos (Arzarello et al, 1994). En este sentido, de acuerdo con Nesselman (citada por Elsa Malisani, 1999), se pueden determinar tres periodos distintos:

Etapa Retórica: caracterizada por el uso de descripciones en lenguaje ordinario (lenguaje natural). Existían símbolos para denotar cantidades pero no se usaban para desarrollar operaciones, es decir, existía una ausencia total de símbolos o de signos especiales para representar las incógnitas.

En esta etapa son conocidos hechos como los siguientes en distintas civilizaciones:

Los babilónicos (2000 a.C.) analizaron problemas matemáticos estrechamente relacionados con problemas cotidianos (agrícolas, reparto de terrenos, herencias, etc); las soluciones eran dadas en lenguaje natural, al igual que sus procedimientos.

Los egipcios (1700 a.C.) desarrollaron un sistema numérico no posicional, lo cual no permitía un fácil manejo de las cantidades y sus operaciones. Emplearon los métodos de falsa posición o doble falsa posición para resolver problemas sobre ecuaciones. No obstante, al igual que los babilonios, sus procedimientos eran fundamentalmente orales ya que carecían de un lenguaje simbólico matemático.

Los chinos (1200 a.C.) indicaban con símbolos las cantidades, pero carecían de un símbolo para el cero (hueco en el tablero). Su contribución más notable fue la resolución de sistemas de ecuaciones mediante tablas (lo que hoy llamaríamos matrices). Trabajaron con los números negativos, pero no los consideraban soluciones válidas debido a la fuerte influencia del contexto del problema lo cual dificultó la generalización del estudio de las ecuaciones.

Etapa Lacónica (sincopada): en este período se introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero los cálculos se desarrollan en lenguaje natural. Se resolvieron ecuaciones pero variando entre los desarrollos orales antiguos y el nuevo simbolismo incipiente.

Los hindúes (200 a.C. – 1200 d.C.) usaron un sistema numérico posicional en base 10 muy similar al actual. No obstante, a pesar de que los problemas seguían emergiendo de problemas cotidianos concretos, desarrollaron un simbolismo para resolver algunas ecuaciones, la regla de tres o la regla de los signos. A pesar de este avance, mantuvieron muchos procedimientos de forma oral y no sacaron provecho a los avances en su notación simbólica, más sencilla que los sistemas numéricos no posicionales antiguos y más adecuada para construir algoritmos y fórmulas para las operaciones básicas.

Los griegos (600 a.C– 600 d.C), debido al complejo sistema numérico que usaban, prefirieron desarrollar procedimientos geométricos, a pesar de lo cual algunos autores griegos, como Herón o Diofanto, comenzaron a usar un tipo de simbología rudimentaria. Así, Diofanto introduce algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero desarrolla los cálculos en lenguaje natural. Este simbolismo lacónico de Diofanto no empieza a evolucionar hasta después de la conquista musulmana en el siglo VII, en el que los árabes (800 – 1300) se encargaron de difundir por Europa este conocimiento logrando un mayor desarrollo del álgebra de ecuaciones y estableciendo reglas de reducción y cancelación de ecuaciones de primer grado. Por lo demás, la notoria influencia de los trabajos egipcios y griegos les permitió desarrollar relaciones entre los procedimientos geométricos griegos, los procedimientos orales egipcios y el nuevo simbolismo y sistema de numeración árabe.

Etapa Simbólica: ya en el siglo XII, Fibonacci aporta ideas para el nuevo simbolismo matemático empleado para resolver ecuaciones. Pero no es hasta más adelante cuando el matemático alemán Johann Widmann (1489) inventa los símbolos “+” y “-” para sustituir las letras “p” y “m” que se utilizaban para expresar la suma y la recta. Por su parte, Robert Recorde (1557), matemático inglés, inventó el símbolo de la igualdad “=”, y hacia finales del 1500 el trabajo de Diofanto traducido al latín indujo a Vieta (1540-1603) a utilizar letras para las cantidades dadas y para las incógnitas y signos para representar las operaciones. Por otra parte, René Descartes (1637) fusionó la geometría y el álgebra inventando la “geometría analítica”, dándonos la notación algebraica moderna en las cuales las constantes están representadas por las primeras letras del alfabeto (a, b, c,…) y las variables e incógnitas por las últimas (x, y, z). En esta etapa se utiliza el lenguaje simbólico no sólo para resolver ecuaciones sino también para formular reglas para relaciones numéricas. De aquí que en el renacimiento europeo (s. XVI – s. XVIII) se comienza a desarrollar una nueva forma de resolver problemas asociados a ecuaciones.

En este período se desarrollan fundamentalmente las ideas de incógnita (usando letras para estas), signos que denoten operaciones entre cantidades numéricas y diferentes tipos de resolución para ecuaciones de distinto grado (primer, segundo, tercer y cuarto grado). Las ecuaciones comenzaron a ser el objeto de estudio sin que, necesariamente, tengan una conexión con algún problema cotidiano. En el proceso de resolución de ecuaciones de grado superior se encontraron con raíces cuadradas cuya cantidad sub-radical era negativa, aunque no se le dio mucha importancia. También se desarrolló el estudio de las matrices de diversos órdenes.

En cuanto a los sistemas de ecuaciones, Euler fue uno de los primeros en mencionar que un sistema "*n* x *n*" no tiene necesariamente "*n*" ecuaciones ya que depende de las características de las ecuaciones (indicios de la dependencia lineal), también define los conceptos de variables independientes y dependientes, dando pie a generar otros conceptos matemáticos tales como el de función. Por último, aparece la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en términos de determinantes (Maclaurin (1698-1746) y Cramer (1704-1752) y, posteriormente, mediante el método de eliminación de Gauss (1777-1855) y Jordan (1838-1922).

Etapa abstracta: en este período las ecuaciones son estudiadas desde una teoría más general y abstracta en donde ya no se buscan las soluciones particulares de una ecuación, sino que se estudia el comportamiento de las soluciones de una familia de ecuaciones. Esta etapa se inicia en Europa durante el s. XIX y llega hasta nuestros días.

Por ejemplo, el concepto inicial de función como proceso de entrada y salida dado, se reemplazó por uno estructurado. En 1830 Dirichlet modifica el concepto euleriano de función para definirla como una correspondencia arbitraria entre números reales. Cien años más tarde, Bourbaki generaliza el concepto de función definiéndola como una relación entre dos conjuntos. Este cambio de enfoque nace producto de los escritos de Galois (1811-1832) antes de morir, que fueron publicados por Liouville (1809-1882) en el *Journal de mathématiques pures et appliqées*. A partir de estos trabajos algunos matemáticos pudieron desarrollar la teoría de grupos y anillos, destacando Lagrange (1736-1813), Jordan y principalmente Cauchy (1789-1857). Ante la imposibilidad de encontrar las soluciones de la ecuación de quinto grado (demostrado por Abel (1802-1829)) Galois tomó un rumbo distinto de investigación. Ya no se centró en cómo resolver ecuaciones de mayor orden sino en cómo se comportaban las soluciones de determinadas ecuaciones. Estas ideas las adoptan Cayley (1821-1895) y Hamilton (1805-1865) y desarrollan el álgebra de matrices y los cuaterniones, respectivamente. Estas nuevas estructuras matemáticas jamás habían sido analizadas antes. El estudio de estas nuevas estructuras no euclidianas y no conmutativas dio lugar a la definición de cuerpo. Sin embargo, no fue hasta principios del s. XX que se desarrollaría una teoría abstracta de cuerpos.

El uso del simbolismo algebraico permitió la eliminación de información superflua y facilitó su desarrollo, lo mismo que la relación entre el álgebra y la geometría. Malisani (1999) sugiere que

> […] el desarrollo del lenguaje algebraico ha sido muy lento y dificultoso, se pasa de ciertos nombres para designar a la incógnita y algunas relaciones, a las abreviaturas de estas palabras, a los códigos intermedios entre el lenguaje retórico y el sincopado y por último, a los símbolos. Es decir, estas abreviaturas y estos códigos se van depurando gradualmente hasta que se llega a elaborar un simbolismo algebraico correcto sintácticamente y más eficiente operativamente, en este proceso se observa el abandono progresivo del lenguaje natural como medio de expresión de las nociones algebraicas. (p. 19)

Con todo ello podemos concluir los siguientes períodos y las principales tareas desarrolladas en ellos:

- Resolución de problemas ligados a una situación cotidiana mediante ecuaciones y métodos empíricos o retóricos (2000 a.C. – 600 d.C.).

- Resolución de problemas ligados a una situación cotidiana mediante ecuaciones y métodos casi simbólicos (200 a.C. – 1300 d.C.).

- Resolución de problemas no necesariamente ligados a una situación cotidiana mediante ecuaciones y métodos simbólicos (s. XVI. – s. XVIII).

- Resolución de ecuaciones polinómicas (s. XVI. – s. XVIII).

- Estudio de estructuras algebraicas (s. XIX en adelante).

En relación con los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se produjo una evolución paralela a la descrita, tal y como se detalla en el apartado siguiente.

RESOLUCIÓN DE LOS SE_2LI_2 A LO LARGO EN LA HISTORIA

Los procedimientos de resolución de los SE_2LI_2 constituyen uno de los aspectos centrales de este conocimiento, aunque resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es aplicar un algoritmo[2], a diferencia de lo que se conoce como "procesos heurísticos"[3]. Podemos decir que la resolución de los SE_2LI_2 con algoritmos no aparece hasta que no llega le etapa simbólica del álgebra, ya que antes dicha resolución podría considerarse dentro de los procesos heurísticos.

La aparición histórica y el desarrollo de los métodos de resolución algorítmicos actuales están relacionados con el simbolismo algebraico dominante en cada etapa, es decir con la sintaxis dominante. Los principales métodos de resolución de sistemas de ecuaciones son los que se detallan a continuación ordenados cronológicamente (Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1989):

a) Método de eliminación o reducción (Babilonios).

En este tipo de procedimiento se denomina a las incógnitas con palabras tales como "longitud", "anchura", "área" o "volumen", sin que el problema tuviera relación con problemas de medidas. Un ejemplo, tomado de una tablilla babilónica es el siguiente:

¼ anchura + longitud = 7 manos

longitud + anchura = 10 manos

Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una mano y observa que la solución puede ser, anchura = 20 y longitud = 30. Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. En notación actual sería:

$$\left.\begin{array}{l} y + 4x = 28 \\ y + x = 10 \end{array}\right\}$$

restando la segundo de la primera, se obtiene 3x = 18, es decir, x = 6 e y = 4.

b) Método geométrico (griegos).

Su resolución fue a base de construcciones geométricas (Libro II de los Elementos, de Euclides "300 a. de C."). Hay 14 proposiciones que permiten resolver geométricamente problemas algebraicos que el álgebra simbólica actual los resolvería rápidamente; sin embargo, somos conscientes del valor didáctico del álgebra geométrica.

c) Método de la fórmula (Thymaridas 400 a. de C.).

Se puede resolver un sistema de "n" ecuaciones con "n" incógnitas mediante una fórmula. Así, es fácil comprobar que la expresión:

$$x = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_{n-1}) - s}{n-2}$$

permite obtener las siguientes soluciones del sistema:

$$\begin{array}{llllll} X + X_1 & + X_2 + & \dots & + X_{n-1} & = S \\ X + X_1 & & & & = K_1 \\ X + & + X_2 & & & = K_2 \\ & . & & & \\ X + & \dots & & + X_{n-1} & = K_{n-1} \end{array}$$

d) Método de las matrices.

Los 9 libros del arte matemático (Liu Hui siglo III d.C.) contienen algunos problemas donde se resuelven sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, para resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{array}\right\}$$

se utilizaba el "método de cálculo en el tablero", consistente en plantear la siguiente matriz y operar con ella como se describe a continuación:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Mediante operaciones entre las columnas de la matriz se obtiene un sistema más sencillo cuya solución es inmediata:

(2ª col. x 3) (2ª col. - 3ª col.) (2ª col. – 3ª col.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

Y así sucesivamente hasta obtener la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

correspondiente a las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 36x = 99 \\ 5y + z = 24 \\ 3x + 2y + z = 39 \end{array}\right\}$$

que constituyen un sistema equivalente al inicial. Una vez calculado el valor de x (99/36), se vuelve a operar de la misma manera con el sistema resultante.

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales usando matrices y determinantes aparece en Europa con los trabajos de McLaurin (1698-1756) y Cramer (1704-1752), aunque la idea de colocar ecuaciones en forma de filas y columnas fue mencionada por Leibniz (1646-1716) en una carta al marqués de L'Hopital (1661-1704). Inicialmente sólo se usaban determinantes, pues las teorías sobre matrices son posteriores (Sylvester, 1850), y métodos numéricos basados en diversos métodos de iteración que se ven favorecidos por la automatización de los cálculos.

e) Método parecido al algebraico (por sustitución) (Diofanto de Alejandría (250 d.C.)

Por este método se resuelven los sistemas de ecuaciones transformándolos en una ecuación lineal. Ejemplo: para hallar dos números x e y cuya suma sea 20 y la suma de sus cuadrados 208, el autor realiza los cálculos que figuran en el cuadro de la figura 1.

Diofanto	**Mediante sistemas**
$x \approx 10 + x$ $y \approx 10 - x$ $(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208$ $100 + 20x + x^2 - 100 - 20x + x^2 = 208$ $200 + 2x^2 = 208$ $2x^2 = 8$ $x^2 = 4$ $x = 2$	$x + y = 20$ $x^2 + y^2 = 208$ Sustituyendo $x = 20 - y$ en la segunda ecuación, $(20 - y)^2 + y^2 = 208$ nos aparece una ecuación de segundo grado.

Figura 1.- Cálculos correspondientes al método de sustitución de Diofanto

Con relación a los números positivos y negativos (todavía no existían los enteros), Diofanto sólo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Utilizó ya un álgebra sincopada, como hemos señalado anteriormente, y carecía de método general, utilizando métodos diferentes para cada problema, a veces excesivamente ingeniosos.

f) El método de la doble falsa posición (Malisani, 1999)

Este procedimiento consiste en considerar dos valores particulares de la incógnita (de aquí el nombre de doble falsa posición), efectuar los cálculos necesarios para encontrar los errores cometidos utilizando estos valores y por último aplicar una interpolación lineal. Este método se aplicaba generalmente a la resolución de: ecuaciones de primer grado con la incógnita en ambos miembros, sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de segundo grado (de manera aproximada).

En la obra *Trattato d'Algibra*[4] se resuelven sistemas de ecuaciones lineales mediante la aplicación de la doble falsa posición. Así, por ejemplo, utilizando el lenguaje simbólico moderno, el problema 38 de dicho libro se puede traducir en un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que el autor transformó mediante sustituciones sucesivas en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (Franci e Pancanti, 1988):

$$7y = 13x + 4 \quad [1]$$
$$4y = 2x + 176 \quad [2]$$

que resolvió de este modo:

1- Adoptó la falsa posición $y_1 = 40$ y en la ecuación [1] calculó $x_1 = 21 + 3/13$.
2- Sustituyó estos dos valores en la ecuación [2] obteniendo 160 en el primer miembro y $218 + 6/13$ en el segundo miembro. Como los dos miembros deben ser iguales, la diferencia es $d_1 = 58 + 6/13$.
3- Igualmente adoptando la falsa posición $y_2 = 80$, calculó $x_2 = 42 + 10/13$ e $d_2 = -(58 + 6/13)$.
4- Aplicó la fórmula de interpolación lineal y obtuvo:

$$y = [(y_2 \cdot d_1) - (y_1 \cdot d_2)] / (d_1 - d_2)$$
$$y = [80 (58+ 6/13) + 40 (58+ 6/13)]/(58+ 6/13 + 58+ 6/13) = 60 .$$

5- Sustituyendo $y = 60$ en la ecuación [1] encontró $x = 32$

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DE LOS SE_2LI_2

Teniendo en cuenta que el manejo de varias representaciones semióticas sobre un conocimiento matemático implica mayor comprensión, “se ha adquirido un concepto determinado, cuando se es capaz de transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo” (Duval, 1999, p. 30), es decir, manipular e identificar la solución de un SE_2LI_2 en cualquier contexto, es indudable la importancia que tiene la representación en el tratamiento didáctico de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Los SE_2LI_2 involucran a una gran variedad de sistemas de representación semiótica (de entre los que destacamos como más importantes: la representación algebraica, geométrica, numérica y verbal) que interfieren e interactúan entre si ante la resolución o la traducción sintáctica o las transformaciones que aparecen en la manipulación de los mismos y su resolución. Por lo tanto, no podemos dejar de considerar cómo se han desarrollado a lo largo de la historia las distintas representaciones de los sistemas. De dicho análisis incluimos a continuación una breve pincelada que se ampliará en posteriores presentaciones de estos estudios.

En la etapa retórica las representaciones más utilizadas fueron la verbal (babilónicos) y numérica (egipcios y chinos); en la etapa sincopada predomina la verbal (hindúes), aparece la representación geométrica (griegos) y por último la representación casi algebraica (árabes); en la etapa simbólica y abstracta recientes se desarrollan todas las representaciones (algebraica, geométrica, numérica y verbal).

CONCLUSIONES

Para finalizar estas breves reflexiones histórico-epistemológico-fenomenológicas tenemos que destacar la necesaria interacción entre los diferentes modos de pensamiento que predominaron en cada momento a lo largo de la historia. Se necesitó volver al análisis geométrico o gráfico para dar el salto desde el estudio de las soluciones de una ecuación al estudio del comportamiento de estas soluciones. Dicha interacción enriqueció, y hoy día enriquece, la comprensión del objeto matemático en estudio.

Los conceptos y métodos del álgebra lineal, en especial los SE_2LI_2, contribuyen al desarrollo de otras áreas de conocimiento, resolviendo una gran variedad de problemas: en física (masa, tiempo, velocidad, coordenadas y posición…), en química (mezclas, aleaciones, …), en economía (modelo de renta nacional, precio de equilibrio, cambio de monedas, …), en dietética (dietas, proporciones, …), etc.

La transformación de un problema concreto en términos del álgebra lineal ha sido, y sin duda seguirá siendo, uno de los métodos más efectivos para hallar la solución.

Por todo ello, no basta con conocer y presentar el concepto en cuestión, sino que se requiere, además, tomar en consideración las interacciones mencionadas y los elementos de carácter histórico que motiven al alumnado a continuar estudios superiores y les permitan solucionar problemas concretos que surgirán con posterioridad.

REFERENCIAS

Arzarello F., Bazzini L. y Chiappin G., (1994). *El álgebra como instrumento de pensamiento. Análisis teórico y consideraciones didácticas*. CNR – Proyecto TID, cuaderno nº. 6.

Duval R (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales.* Traducción al español a cargo de Myriam Vega Restrepo. Universidad del Valle, Colombia,

Franci R. y Pancanti M., (1988). *Introducción de "El Trattato d´Algibra".* En: anónimo, página I – XXIX.

Gairín, J. M. y Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos.* Madrid: Síntesis.

Grupo Azarquiel (1991*). Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid: Editorial Síntesis.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días (3).* Madrid, España: Alianza.

Labraña A., Plata A., Peña C., Crespo E. y Segura R. (1995). *Álgebra lineal. Resolución de sistemas lineales.* Madrid: Editorial Síntesis.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión Histórica. *Revista IRICE*, 13, 105-134.

Moreno, M. F. (1998). *Manual (6) para la formación inicial del profesorado de secundaria*. Almería: servicio de publicaciones Universidad de Almería.

Nesselman, G. H. F. (1842). *Intentando una historia crítica de Álgebra, parte 1. El álgebra de los griegos*. Berlín: G. Reimer

Socas M, Camacho M., Palarea M. y Hernández J. (1989). *Iniciación al álgebra*.

Madrid: Editorial Síntesis.

---

[1] A efectos de optimizar el aprendizaje

[2] "es una prescripción, una orden o sistema secuenciado de órdenes que encadena una serie de operaciones elementales que llevan desde los datos iniciales al resultado" (Gairín y Sancho, 2002, p. 83)

[3] "visto como el arte de inventar con la intención de procurar estrategias, métodos, criterios, que permitan resolver problemas a través de la creatividad, pensamiento divergente o lateral"

[4] "El Trattato d'Algibra, escrito a fines del siglo XIV, representa mucho más que un clásico tratado de ábaco, es un testo de álgebra amplio y orgánico: ya que no sólo desarrolla todos los temas mercantiles que caracterizan este tipo de tratado, sino que también contiene una entera sección dedicada al álgebra. La misma constituye un importante aporte a la teoría de la resolución de ecuaciones. Franci y Pancanti (1988, pág. VI) consideran que es uno de los mejores textos medievales y renacentistas que ellas hayan analizado y señalan que los capítulos correspondientes al álgebra son esenciales para la reconstrucción de la historia de esta disciplina entre los siglos XIII y XVI".

Juan Carlos Martín Molina
Universidad de Córdoba
carlosmm69@gmail.com

José Luis González Marí
Universidad de Málaga
gmari@uma.es