Gómez, B. (2021). La regla de dos y los problemas de acciones simultáneas. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *4*(1), 73-82

ISSN: 2603-9982

LA REGLA DE DOS Y LOS PROBLEMAS DE ACCIONES SIMULTÁNEAS[1]

Bernardo Gómez Alfonso, Universidad de Valencia

Resumen

La regla de dos es una regla extraordinaria y simple para resolver problemas de acciones simultáneas. Se presenta un panorama de esta regla, mostrando su uso, aplicación y explicación, a la vista de cómo ha sido recogida en una selección de libros de texto relevantes por su importancia histórica.

Palabras clave: *didáctica, matemáticas, historia, problemas aritméticos, regla de dos.*

The rule of two and the problems of simultaneous actions

Abstract

The rule of two is an extraordinary and simple rule for solving problems of simultaneous actions. An overview of this rule is presented, showing its use, application and explanation, in view of how it has been collected in a selection of relevant textbooks due to its historical importance.

Keywords: *didactics, mathematics, history, arithmetic problems, rule of two.*

[1] Este trabajo ha contado con el apoyo del proyecto EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE)

Recibido: 28/01/2021; Aceptado: 09/03/2021

INTRODUCCIÓN

Bajo el nombre de *Riegula de le do cose che se cazano po se cozongeno,* (abreviadamente: "Regla de las dos cosas"), se encuentra en la Aritmética de Treviso (1478) una regla extraordinariamente breve y simple para resolver un problema de "correos":

> *Correos entre Roma y Venecia.* El Padre Santo envió un mensajero desde Roma a Venecia, rogándole que debería de llegar a Venecia en 7 días. Y la más ilustre señora de Venecia también envió un mensajero de Venecia a Roma que debería de llegar en 9 días. Y de Roma a Venecia hay 250 millas. Ocurrió que por orden de estas personalidades estos dos mensajeros emprendieron su viaje al mismo tiempo. Se pide hallar a los cuantos días se encontrarán y cuantas millas habrá viajado cada uno de ellos (Swetz, 1989, p. 158).
>
> Sigue la regla así: 7+9 =16 es el divisor; 9×7=63 es el dividendo: 63÷16=$3\frac{15}{16}$ por tanto, en 3 días y $\frac{15}{16}$ se encontrarán.

Obsérvese que la formulación de la regla que se menciona en Treviso es la división de un producto por una suma; o sea: $\frac{7\times 9}{7+9}$. Cociente formado por los dos números que determinan el tiempo que tarda cada uno de los correos, 7 y 9 en hacer todo el viaje individualmente.

Para contestar a la otra pregunta, las millas que habrá viajado cada uno de ellos, en el texto de Treviso se utiliza el método de la proporción en términos de dos reglas de tres:

> Si quieres saber cuántas millas ha hecho cada uno, procede por la regla de tres así, primero para el de Roma [plantea la proporción y opera $\frac{250}{7} = \frac{x}{3\frac{15}{16}}; x = 140\,\frac{5}{8}$]. El que viene de Roma hace 140 millas y $3\frac{5}{8}$. Ahora arregla la regla para el correo de Venecia Roma [plantea la proporción y opera $\frac{250}{9} = \frac{x}{3\frac{15}{16}}; x = 109\,\frac{3}{8}$]. Por tanto, vemos que el que viene de Venecia a Roma ha hecho 109 millas y $\frac{3}{8}$. (Op. cit. pp. 158-159).

Aunque no podemos datar el origen de esta regla sabemos que se aplicaba desde antiguo a los problemas de alcanzar y perseguir. En Occidente, su primera aparición se sitúa en las *Proposiciones ad acuendos juvenes* de Alcuino de York (d. C. 775)[2] y en Oriente, mucho antes, por ejemplo, en el *Jiu zhang suan shu* del siglo I a.C., más conocido como los *Nueve capítulos* de la matemática china.

> *Dos caminantes, uno bueno y otro malo.* Un buen caminante hace 100 *bu*, mientras que un mal caminante hace 60 *bu* [supón que esos *bu* son recorridos en el mismo tiempo]. Teniendo en cuenta que el último va 100 *bu* por delante del primero, que lo alcanza, di en cuántos *bus* llegará uno al lado del otro.
>
> Respuesta: 250 bu. Método: De los 100 bu del buen caminante resta 60 bu del mal caminante, el resto es 40 bu, considéralo como el divisor. Multiplica 100 bu del buen caminante por 100 bu que va por delante el mal caminante, que es el dividendo. Divide, y tendrás el número de bu pedido. (Shen, Crossley, Lun, 1999, p. 329). O sea: $s = \frac{100\times 100}{100-60}$ que es la regla de dos.

Nota: Según Swetz (1989) *bu* es una medida de longitud equivalente a dos pasos, o 5 pies chinos, *chi.*

Aunque el nombre de esta regla ha sido poco utilizado a lo largo de la historia, no ocurre así con la regla que se aplicó también en otros problemas de "acciones simultáneas".

---

[2] Swetz (1989) atribuye el año 775 d.C. a las *proposiciones* de Alcuino (735-804), aunque Burholder (1993) señala que no fue convocado a la corte de Carlomagno hasta 782 d. C.

Objetivo y metodología

En este artículo, ofrecemos un panorama de esta regla mostrando su uso, aplicación y explicación tal y como ha quedado reflejada en la vieja tradición escolar reflejada en una selección de algunos de los libros de texto más importantes del pasado.

El estudio, es exploratorio, ya que no pretende confirmar ningún supuesto o hipótesis sino describir cómo se ha configurado un determinado contenido de enseñanza.

La metodología utilizada para presentar este panorama es la del análisis histórico y epistemológico propio de la Didáctica de la Matemática, donde el apelativo histórico y epistemológico adquiere un sentido particular. Es epistemológico, porque enlaza con los estudios relacionados con la constitución del conocimiento matemático y es histórico, porque enlaza con los estudios relacionados con la aparición y evolución de ese conocimiento (Gómez, 2018; 2020).

Esta metodología es cualitativa y descriptiva y toma los libros de texto, que han sido influyentes a lo largo de la historia como fuente principal de información, con un enfoque de aproximación global y a priori. Global, porque considera que estudiar textos aisladamente es insuficiente, y a priori, porque estudia los libros de texto como medio de instrucción, pero no para ver cómo estudiantes y profesores los usan sino para ver sus efectos en los resultados del aprendizaje.

Su ámbito de interés es la enseñanza de las matemáticas en su dimensión tradicional y de pasado. Su razón de ser es la de introducir referencias históricas para facilitar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

En el caso que nos ocupa, se persigue contribuir al desarrollo del pensamiento aritmético siendo sensibles a los métodos de resolución de problemas que los grandes matemáticos del pasado nos han legado.

LOS PROBLEMAS DE ACCIONES SIMULTÁNEAS

Bajo el nombre de problemas de acciones simultáneas se conoce una colección de problemas aritmético – algebraicos que tratan de agentes que emprenden varias acciones a la vez para lograr a un mismo fin o tarea.

Estos problemas se agrupan en tres categorías principales: la de dos móviles se mueven para alcanzar o encontrar uno a otro, que incluye los problemas de “correos”; la de varios agentes que cooperan para hacer un mismo trabajo, que incluye los problemas de grifos que llenan o vacían cisternas; y, la de varias tareas que se juntan para hacer una misma cantidad en un día, que incluye problemas como el de la fábrica de tejas.

A lo largo del tiempo los enunciados de estos problemas han ido cambiando, al adaptarse a los cambios sociales, desarrollos matemáticos, o incluso a los gustos o preferencias de los autores de los libros de texto, pero, conservando su contenido matemático de tal modo que han llegado a estandarizarse bajo una determinada forma que actúa como modelo, problema tipo o estereotipo con múltiples variantes. Ejemplos de estos problemas tipo son los siguientes:

Dos móviles que se mueven hasta alcanzarse en movimiento rectilíneo o circular.

> *El perro y la liebre.* Hay un campo que tiene 150 pies de largo. En una punta estaba un perro; y en la otra, una liebre. El perro persiguió a la liebre. Mientras que el perro hacía en un salto 9 pies por zancada, la liebre iba sólo a 7. ¿Cuántos pies, y cuántos saltos hizo

el perro persiguiendo a la liebre que escapaba hasta que fue atrapada? (Hadley y Singmaster, 1992, p. 115).

Planetas en conjunción. Si hoy se hallasen juntas dos estrellas, o planetas juntos, y en conjunción, cómo sabríamos por aritmética, sin ser Astrónomos, en cuanto tiempo se volverían a hallar juntos, como sucede en el presente año, entre Júpiter y Saturno, que se hallan juntos la víspera de Navidad, el cual ayuntamiento llaman los Astrónomos conjunción magna, por los grandes, y terribles efectos que suele causar, según ellos dicen, y la experiencia lo demuestra. (Cortés, 1724, p. 456)

Relojes en conjunción de agujas. Las dos agujas de un péndulo de minutos parten juntas del punto del mediodía. Se pide, ¿en qué puntos del cuadrante se encontrarán sucesivamente, durante una revolución completa de la de las horas? (Ozanam, 1778, p. 75).

Dos móviles que se mueven en sentido contrario hasta encontrarse en movimiento rectilíneo o circular.

El pato y el ganso que vuelan a encontrarse. Un pato salvaje vuela del mar del sur al mar del norte en 7 días, y un ganso salvaje vuela del mar del norte al mar del sur en 9 días. Teniendo en cuenta que las dos aves comienzan en el mismo momento, di: ¿Cuándo se encontrarán? (Shen, Crossley y Lun, 1999, p. 337).

Dos correos que se encuentran de Padua a Turín. Supongamos que hay 400 leguas de Pada a Turín, & que dos correos parten en un mismo instante, uno de Padua para ir a Turín y el otro de Turín para venir a Padua, & el que va de Padua a Turín, se ofrece a llagar en a Turín en 11 días, & e que va de Turín a Padua se ofrece a llegar a Padua en 9 días. Se pide (los correos cumpliendo su promesa) en cuántos días se encontrarán, & cuántas leguas habrán hecho cada uno. (Tartaglia, 1613, 2º parte, cap XI, fo. 6r).

Dos navíos que circundan una isla. Una isla tiene 50 leguas de circunferencia y salen dos navíos a un mismo tiempo de un puerto de dicha isla por partes contrarias; el primero la circuye en 8 días; el segundo en 3, se pregunta ¿en cuánto tiempo y en qué distancia se encontrarán? (Corachán, 1719, p. 293).

Trabajo cooperativo para hacer una misma tarea. Se conoce el tiempo que necesita cada uno para completar la tarea por separado y se pide el tiempo que necesitan juntos para completarla.

Barril que se vacía por dos agujeros. Un barril tiene dos caños de tal modo que destapando el primero se vaciaría el barril en 4 horas y destapando el segundo se vaciaría el barril en 6 horas. Se pide, destapando los dos a una, en cuántas horas se vaciaría el barril. (Calandri, 1974, p. 91).

Nave con dos velas. Un barco tiene dos velas en tal lugar que al izar la primera vela haría un viaje en 12 días y al izar la segunda haría el mismo viaje en 15 días. Se quiere saber, elevándolas a una en cuántos días harán la travesía antes mencionada. (Calandri, 1518, s/n).

Tareas que se juntan para hacer una misma cantidad. Se pide, que si se hiciera el mismo número de ambas tareas en un mismo tiempo cuántas se harían de cada una.

Uno que fabrica tejas. Una persona fabrica 38 tejas convexas o 76 tejas cóncavas al día. Si fabricara un número igual de ambas clases de tejas al día, di cuántas tejas haría. (Shen, Crossley y Lun, 1999. p. 340).

El mercader que cambia florines en dos clases de dineros. Es un mercader que le pide a un cambiador que le cambie un florín de oro con el pacto de que se lo cambie con dos monedas. Esto es, que le de la mitad de ese florín de oro en moneda Perpiñanesca, costando el florín en Perpiñán a razón de 21 sueldos y 7 dineros, y que le cambie la otra mitad del florín en moneda de catalana según el florín que el mercader le dio, que vale a

> razón de 17 sueldos y 3 dineros. Y que de estas dos monedas le cambie el florín dándole tantos sueldos y dineros de una como de la otra, ni más ni menos, y que el florín sea cambiado justamente (Nota: 1 sueldo = 12 dineros). (Santcliment, 1998, pp. 275-276).

LA REGLA DE DOS

Muchos de los problemas de acciones simultáneas pueden admitir acciones en el mismo sentido o en el contrario. Esto se ve claramente en los problemas de móviles, que pueden ser para alcanzarse o para encontrarse. En el primer caso la regla de dos se formula como la división de un producto por una suma (forma aditiva) y en el segundo como la división de un producto por una diferencia (forma sustractiva).

Así, por ejemplo, mientras que el problema del *perro y la liebre*, que es de alcanzar, se resuelve con la forma sustractiva, el problema del *pato y el ganso*, que es de encontrar, se resuelve en la forma aditiva:

> *El perro y la liebre.* Hay un campo que tiene 150 pies de largo. En una punta estaba un perro y en la otra, una liebre. El perro persiguió a la liebre para cazarla. Mientras que el perro hacía en un salto 9 pies por zancada, la liebre iba sólo a 7. Diga, quién quiera, cuántos pies, y cuántos saltos hizo el perro persiguiendo a la liebre hasta que fue atrapada.
>
> Medio campo son 75 pies y el perro recorre 75x9 = 675 pies, mientras que la liebre recorre 75x7=525 pies y que la encuentra (Burkholder, 1993, s/n).

Obsérvese que 75 pies viene de $\frac{150}{2}$; 2 viene de la diferencia entre las velocidades: 9-7. Luego, la regla que aplica Alcuino debe ser: el perro $\frac{150\times 9}{9-7}$ pies y la liebre $\frac{150\times 7}{9-7}$ pies, como manda la regla de dos sustractiva.

> *El pato y el ganso.* Un pato salvaje vuela del mar del sur al mar del norte en 7 días, y un ganso salvaje vuela del mar del norte al mar del sur en 9 días. Teniendo en cuenta que las dos aves comienzan en el mismo momento, di: ¿Cuándo se encontrarán?
>
> Suma el número de días, como divisor, su producto como dividendo. Divide, tendrás el número de días demandado. (Shen, Crossley y Lun, 1999, p. 337).

En notación simbólica $t = \frac{7\times 9}{7+9}$, que es la regla de dos aditiva.

Lo mismo ocurre en el movimiento circular:

> *Dos planetas en conjunción.* Si hoy se hallasen juntas dos estrellas, o planetas juntos, y en conjunción, cómo sabríamos por aritmética, sin ser Astrónomos, en cuanto tiempo se volverían a hallar juntos, como sucede en el presente año, entre Júpiter y Saturno, que se hallan juntos la víspera de Navidad, el cual ayuntamiento llaman los Astrónomos conjunción magna, por los grandes, y terribles efectos que suele causar, según ellos dicen, y la experiencia lo demuestra.
>
> Esta demanda bien la pudieras haber dejado para los Astrónomos, pues a ellos toca, pero todavía quiero darte contento, y advierte que primero se ha de saber cuánto tiempo tarda cada estrella, o planetas en darle la vuelta a su orbe. Y pues has hecho memoria de la magna conjunción de Júpiter y Saturno, propongamos el ejemplo de ellos. Y sepas que Júpiter tarda en dar la vuelta a su orbe doce años, y Saturno al suyo tarda treinta años, según parecer de Cardano, porque unos escriben que tardan más, y otros menos, y tomando el parecer de Cardano, digo, que multipliques los 12 años de Júpiter por los 30 de Saturno, y montarán 360 años, que partidos por 18, que es la diferencia que hay de 12 a 30, saldrán 20 años, y al cabo de tantos años se hallarán en conjunción los dichos planetas, que será el año de 1623. (Cortés, 1724, p. 456).

Cortés aplica la regla de dos sustractiva. En notación simbólica $t = \frac{12\times30}{30-12} = \frac{360}{18} = 20$ años

En el caso de los problemas del siguiente problema de juntar tareas se aplica la regla de dos aditiva

> *Uno que fabrica dos clases de tejas.* Una persona fabrica 38 tejas convexas o 76 tejas cóncavas al día. Si fabricara un número igual de ambas clases de tejas al día, di cuántas tejas haría.
>
> Respuesta: $25\frac{1}{3}$ tejas. Método: Suma las dos clases como divisor; multiplica las dos clases como dividendo. Divide, tendrás el número de tejas. (Shen, Crossley y Lun, 1999. p. 340).

En notación simbólica $\frac{38\times76}{38+76} = 25\frac{1}{3}$, que es la regla de dos aditiva.

Lo mismo ocurre con el problema del *mercader que cambia florines*.

> *El mercader que cambia florines en dos clases de dineros.* Es un mercader que le pide a un cambiador que le cambie un florín de oro con el pacto de que se lo cambie con dos monedas. Esto es, que le de la mitad de ese florín de oro en moneda Perpiñanesca, costando el florín en Perpiñán a razón de 21 sueldos y 7 dineros, y que le cambie la otra mitad del florín en moneda de catalana según el florín que el mercader le dio, que vale a razón de 17 sueldos y 3 dineros. Y que de estas dos monedas le cambie el florín dándole tantos sueldos y dineros de una como de la otra, ni más ni menos, y que el florín sea cambiado justamente (Nota: 1 sueldo = 12 dineros).
>
> Para esta y todas las semejantes razones que te surjan, debes ajustar el valor de los dos florines y hallar la suma. La cual será el partidor. Después multiplicarás las dos monedas, una con la otra, y es la cantidad que has de partir por la suma ajustada de las dos. Lo que a la partición vendrá será la cantidad que habrá de tener el mercader de cada moneda. Esto harás según se muestra en la práctica figurada [Adjunta las operaciones] (Santcliment, 1998, pp. 275-276).

Santcliment, adjunta en el lateral las operaciones para hallar el valor en dineros de 1 florín de Perpiñán que a 21 sueldos y 7 dineros vale 259 dineros y también las de 1 florín catalán que a 17 sueldos y 3 dineros vale 207 dineros.

Con estos datos aplica la regla de dos: $\frac{259\times207}{259+207} = 115 + \frac{23}{466}$.

EXPLICACIONES DE LA REGLA

Apoyando la regla en un múltiplo común

Liu Hui, el comentarista del s. III de los *Nueve Capítulos* (100 a. de C.), en el problema del *pato y el ganso* ofrece un razonamiento que justifica la regla.

Su argumentación se basa en que si el pato vuela durante *p* días para hacer un viaje y el ganso durante *g* días para el mismo viaje, entonces en *pg* días el pato hará *g* veces el viaje y el ganso lo hará *p* veces, por lo que juntos en *pg* días lo harán *p*+*g* veces; y [por regla de tres] un viaje lo harán en $\frac{pg}{p+g}$ días ((Shen, Crossley y Lun, 1999, p. 340).

Este mismo razonamiento se usa utiliza en textos posteriores, como por ejemplo en el problema de las *naves* de Pier Maria Calandri (1480), que es de trabajo cooperativo. Aunque Calandri lo enmarca en la regla de "falsa posición", ya que considera que el producto de los datos *pq*, es un valor supuesto.

> *Dos naves que se encuentran entre Pisa y Génova.* Son dos naves, una es de Pisa y va a Génova en 5 días y la segunda es de Génova va a Pisa en 3 días. Se pide, partiendo la de Génova y la de Pisa a la vez, en cuántos días se encontrarán.
>
> Haremos posición de que se encontrarán en la cantidad de días que queramos. Pongamos que se encontrarán en 15 días, de donde la primera que sale de Pisa y va a Génova en 5 días, en 15 días irá 3 veces y la que se parte de Génova y va a Pisa en 3 días, en 15 días irá 5 veces. Entre los dos habrán hecho este viaje 8 veces y queremos una vez, para lo que multiplicarás 1 por 15, hacen 15 y esto dividido por 8 viene 1 7/8. Y dirás que en 1 día 7/8 se encontrarán juntos, y haz esto en los semejantes. (Calandri, 1974, pp. 89-90).

Obsérvese que la regla para hallar el tiempo hasta el encuentro se sigue la proporción habitual en la falsa posición simple: $\frac{pg}{p+g} = \frac{t}{1}$. O sea, $\frac{5\times 3=15}{5+3} = \frac{t}{1}$; de donde $t = \frac{5\times 3=15}{5+3}$ que es la regla de dos.

Como alternativa a usar el múltiplo común *pg* se puede usar el mínimo común múltiplo de *p* y *g*. El siguiente ejemplo de trabajo cooperativo tomado del texto de Pier Maria Calandri (1480) ilustra el proceso.

> *El barril que se vacía por dos agujeros*. Un barril tiene dos caños de tal modo que destapando el primero se vaciaría el barril en 4 horas y destapando el segundo se vaciaría el barril en 6 horas. Se pide, destapando los dos a una, en cuántas horas se vaciaría el barril.
>
> Debemos hacer la posición de que el barril se vacía en 12 horas, entonces dirás: el primero vaciaría el barril en 4 horas, luego en 12 horas lo vaciaría 3 veces y, el segundo vaciaría el barril en 6 horas, luego en 12 horas lo vaciaría 2 veces. De donde juntos lo vaciarían 5 veces y nosotros queremos que se vacía una vez: por lo tanto, multiplica 1 por 12, hacen 12 y divídelo por 5, viene 2 $\frac{2}{5}$, y dirás que dicho barril se vaciaría en 2 horas $\frac{2}{5}$de hora, y haz esto en los similares. (Calandri, 1974, p. 91).

Obsérvese que 12 es el mínimo común múltiplo de 4×6, por lo que en vez de formar la regla tomando como dividendo de 4×6 y como divisor 4+6, Calandri toma como dividendo $\frac{4\times 6}{2}$ y como divisor $\frac{4+6}{2}$, de modo que, en definitiva, la regla que aplica Calandri es: $\frac{\frac{4\times 6}{2}}{\frac{4+6}{2}}$, que es equivalente.

También es posible usar un múltiplo común mayor que *pg*. Eso es lo que hace Ventallol (1521) que dobla el dividendo y el divisor para evitar operar con fracciones.

> *Dos que corren alrededor de una ciudad redonda*. Dos hombres corren al derredor de una ciudad que está murada redonda, y juntos los dos comienzan a correr de un mismo lugar, pero el uno rodea la ciudad en 4 horas, el otro a menester para rodearla 5 1/2 horas y corren tanto los dos que el mayor corredor alcanza a juntarse con el otro, y todavía perseveran de correr tanto que los dos juntos en un mismo punto y tiempo se hallan en el mismo lugar de donde partieron. Pregunto, en cuántas horas se hallaron juntos en el lugar de donde partieron.
>
> La regla es esta**.** Multiplica 4 por 5 $\frac{1}{2}$, y hallarás 22, dóblalos y serán 44 y tanto rodea la ciudad. Ahora parte 44 por 4 y te vendrán 11, y aquél de las 4 horas habrá rodeado la ciudad 11 veces en 44 horas. Después, parte 44 por 5 $\frac{1}{2}$ y te vendrán 8. Y tantas veces habrá rodeado la ciudad el de 5 $\frac{1}{2}$ en las 44 horas. Ahora mira cuánto hay de 8 hasta 11 y hallarás 3. Y de tanto alcanza el uno al otro. Ahora parte 44 por 3 y te vendrán 14 $\frac{2}{3}$ y en tantas horas se habrá juntado con él. (Ventallol, 1619, pp. 391-392)

Obsérvese que en vez de: $\frac{4\times5\frac{1}{2}}{5\frac{1}{2}-4}$ Ventallol toma $\frac{2\times4\times5\frac{1}{2}}{2(5\frac{1}{2}-4)}$ que es equivalente.

Apoyando la regla en la proporción

Otra explicación a la regla se encuentra en Ortega (1552), quién se apoya directamente en el método de la proporción.

> *El galgo y la liebre.* Un galgo va corriendo para alcanzar una liebre. Cada salto que da el galgo tiene ocho pies y cada salto que da la liebre tiene cinco. La liebre le lleva cien pies de ventaja al galgo. Demando en cuántos pies alcanza el galgo a la liebre
>
> Lo harás así: porque el galgo en cada salto que tiene 8 pies va alcanzando a la liebre en 3 [8-5]. Di por regla de 3: si 3 ha venido de 8, de qué vendrá cien. Multiplica 8 por 100 y resultará 800, pártelo por 3 y tendrás 266 y $\frac{2}{3}$, los pies en que alcanzará el galgo a la liebre. Si quieres saber en cuántos saltos alcanzará a la liebre, parte 266 y $\frac{2}{3}$ por 8, y tienes 33 y $\frac{1}{3}$ saltos (Ortega, 1552, fo. 205v).

Obsérvese que la proporción aplicada es: $\frac{8-5=3}{8}=\frac{100}{s}$, siendo *s* el número de pies que salta el galgo hasta alcanzar a la liebre. De donde resuelta que $s=\frac{8x100=800}{8-5=3}$, que es una regla de dos.

Apoyando la regla en el método cartesiano

Recordemos que en el método cartesiano se asignan letras a las cantidades que se buscan, las incógnitas, y se aplican éstas a las relaciones entre cantidades para dar lugar a la ecuación que permite resuelve el problema.

Con este método, Rubio (1878) ofrece el método estándar para los problemas de grifos en términos cartesianos.

> *Un estanque con dos caños.* Hallar el tiempo que tarda en llenarse un estanque por dos caños a la vez, sabiendo el tiempo que tarda en llenarse por cada uno de ellos.
>
> Llamemos a los tiempos conocidos *t*, *t'* y *x* al tiempo desconocido. Si uno de los caños llena el estanque en el tiempo *t*, en una unidad de tiempo llenará una porción de su capacidad igual a $\frac{1}{t}$, y en *x* tiempo llenará una porción $\frac{x}{t}$. Por igual razón el otro caño llenará en el tiempo *x*, una fracción de la capacidad del estanque representada por $\frac{x}{t'}$; pero estas dos fracciones componen toda la capacidad del estanque que podemos tomar por unidad; luego la ecuación es: $\frac{x}{t}+\frac{x}{t'}=1$.
>
> Solución.- Resuelta la ecuación nos da la fórmula $x=\frac{tt'}{t+t'}$ (Rubio, 1878, p. 351)

Obsérvese, como era de esperar, que al final lo que se obtiene es la fórmula general de la regla de dos.

Igualmente, Justo (1814) ofrece un método de la proporción para los problemas de móviles en términos cartesianos.

> *Galgo y liebre.* Un galgo a 100 varas de una liebre, ¿cuándo le alcanzará? En la suposición de que el perro anda 3 varas, mientras que la liebre anda 2.
>
> Supongamos que la liebre anda *x* varas antes de ser cogida; andará el perro *100+x*: y como estas dos distancias están en razón 2 a 3, será $\frac{2}{3}=\frac{x}{100+x}$ luego *3x=200+2x* ó *x=200*. Si

> hubiera sido *m:n* la razón de las distancias, hubiera resultado, suponiendo 100 = a, $\frac{m}{n} = \frac{x}{a+x}$ y *nx=am+mx, nx-mx=am,* y *x*= $\frac{am}{n-m}$ (Op. cit., p. 181).

Nótese que finalmente la solución viene dada por una regla de dos: x= $\frac{\mathrm{am}}{\mathrm{n-m}}$.

Para terminar con este panorama sobre la regla de dos, se recoge un tipo de problema que no es de móviles, ni de grifos, ni de juntar tareas, pero que si es de acciones simultáneas y también se resuelve con una regla de dos.

> *Las dos vasijas*. Dos vasijas contienen; 60 litros de vino de Benejama la una y 40 litros de vino de la Condomina (Partida de la Huerta de Alicante) la otra. Se quiere sacar simultáneamente de cada vasija una misma cantidad de vino y que sea tal, que echando en cada vasija el vino sacado de la otra, quede idéntico vino en los dos recipientes. ¿Cuánto es el vino que se ha de sacar?
>
> Sacando de la 1.ª vasija *x* litros y reemplazándolos por *x* litros de vino de la Condomina, la relación de la cantidad de Benejama a la cantidad de la Condomina es $\frac{60-x}{x}$.
>
> Sacando de la 2.ª vasija *x* litros y reemplazándolos por *x* litros de vino de Benejama, la relación del Benejama al Condomina es $\frac{x}{40-x}$.
>
> La ecuación, pues, del problema es $\frac{60-x}{x} = \frac{x}{40-x}$, $\frac{60}{x} = \frac{40}{40-x}$, o, $\frac{100}{40} = \frac{60}{x}$, de donde $x = \frac{60\times 40}{100}$ (Pérez, 1895, pp. 161-162).

Obsérvese que de $\frac{60}{x} = \frac{40}{40-x}$ se obtiene x(60+40)=60×40, y de aquí que $x = \frac{60\times 40}{60+40}$ que es la regla de dos.

CONCLUSIONES

El panorama que se ha descrito en lo anterior sobre la regla de dos, su uso, aplicación y explicación, pone de manifiesto su simplicidad algorítmica y su complejidad analítica. La regla es fácil de aplicar y difícil de comprender en sus fundamentos. Como regla aprendida “sin razones” carece de interés educativo, no así, discerniendo el razonamiento aritmético que la sustenta. Eso es, en última instancia, lo que se pretende con el tipo de trabajo que se acaba de presentar aquí, al pretender aprovechar las referencias históricas para incentivar el razonamiento aritmético, siendo sensibles a los métodos de resolución de problemas que los grandes matemáticos del pasado han pensado y nos han legado.

REFERENCIAS

Alcuino (735-804 d.C.). Propositiones ad acuendos juvenes, en J. P. Migne, *Patrologiae Cursus Completus: Patrologiae Latinae*. Vol. tomus 101, columnas 1143-1160. Paris.

Burkholder, P. J. (1993). Alcuin of York’s Propositiones Alcuini Doctoris Caroli Magni Imperatoris ad Acuendes Juvenes (“Propositions for Sharpening Youths”): Introduction and Commentary; Translation. *Bulletin for the History and Philosophy of Science and Technology, HOST Bulletin 1*(2). https://arxiv.org/pdf/1308.0892.pdf

Calandri, F. (1518). *Pictagoras Arithmetrice introductora*, Florencia: Bernardo Zucchecta. 1491.

Calandri, P. M. (1974). *Tractato d’abbacho.* A cura e con introduzione di Gino Arrighi. Pisa: Domus Galileana. 1480

Corachán, J. B. (1719). *Arithmetica demonstrada theorico-practica para lo mathemático y mercantil. Explicanse las monedas, pesos y medidas de los hebreos, griegos, romanos y de estos Reynos de España, conferidas entre sí*. Barcelona: Juan Piferrer.

Cortés, J. (1724). *Arithmetica Practica muy útil y necesaria para todo género de tratantes y mercaderes, la cual contiene todo el arte menor y principio del mayor…,*. Compuesto y ordenado por Gerónimo Cortés. Zaragoza: Herederos de Diego de Larumbe.

Gómez, B. (2018). El uso de la historia en la educación matemática: El caso de los gemelos póstumos. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1*(1), 11-21.

Gómez, B. (2020). Prólogo. En *Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores*. Carmen López-Esteban, Alexander Maz-Machado (eds.), (pp. 9-13). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Hadley, J. & Singmaster, D. (1992). Problems to sharpen the young. *Mathematical Gazette 76*(475), 102-126.

Justo, J. (1814). *Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría*. Tomo I. cuarta edición. Salamanca: En la imprenta de D. Vicente Blasco.

Ortega, J. de (1552). *Tractado subtilissimo d'arithmetica y geometría*. Granada. Impreso en casa de René Rabut.

Ozanam, M. (1692). *Récreations Mathématiques & Phisiques*. Nueva edición por M de CGF. Paris: Jombert. 1778.

Pérez, F (1895). *Lecciones de Aritmética elemental y de Álgebra elemental*. Alicante: Tip. De Galdó Chapulí Hnos.

Rubio, V. (1878). *Elementos de matemáticas*. *Tomo II. Aritmética y álgebra*. Tercera edición. Cádiz: Imprenta de la revista médica, de D. Federico Joly.

Santcliment, F. (1998). *Summa de l'art d'aritmètica*. Introducció, transcripció i notes a cura d'Antoni Malet. Vic: Eumo Editorial. 1482.

Shen, K. S., Crossley, J. N., y Lun, A. (1999). *The Nine Chapters on the Mathematical Art.* Beijing: Oxford, U. P. & Science Press.

Swetz, F. J. (1987). *Capitalism and arithmetic: The new math of the 15th century*. Chicago: Open Court. 1478.

Tartaglia, N. (1613). *L'Arithmetique de Nicolas Tartaglia Bresciangran mathematician et prince des practicien*. Divisée en deux parties. Recueillie & traduite d'italien en François, par Guillaum Gosselim. Premier partie. Paris: Chez Adrian Perier.

Ventallol, I. (1621). *Arismetica de Juan Ventallol*, traducida de la lengua catalana en castellano por el doctor Juan Bautista Tolrá. Va añadido un tratado de la Arte Mayor llamado Algebra o Regla de la Cosa. Tarragona: Gabriel Roberto. 1521.

Bernardo Gómez Alfonso
Universidad de Valencia
bernardo.gomez@uv.es