
Objetivación del conocimiento matemático: el caso de la función y el caso de la parábola

Luz Adriana Cadavid Muñoz
adrica262000@yahoo.com

Sandra Yaned Cadavid Muñoz
sarapaulina22@yahoo.es

Diana Jaramillo
diana_jaramillo@hotmail.com

Grupo de Investigación "Matemáticas, Educación y Sociedad-MES"
Universidad de Antioquia

Resumen. Es nuestro interés en este curso discutir algunos aspectos teóricos y metodológicos relativos a la objetivación del conocimiento matemático, específicamente el relacionado con el concepto de función y con el concepto de parábola. Haremos esta discusión desde algunos resultados obtenidos de la investigación "El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en la aula de clase"¹. En dicho estudio empleamos una metodología a la luz del paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico y desde una investigación colaborativa. Nos apoyamos teóricamente en autores que asumen una perspectiva sociocultural de la educación y de la educación matemática, por ejemplo, Bajtin (2004, 2009), Caraça (1984), Moura (2001, 2010) y Radford (2004, 2006, 2008). Este estudio nos permitió comprender, entre otras ideas, que los conceptos que cada alumno objetivó con respecto al objeto *función* y al objeto *parábola* no fueron únicos; como no pueden serlo el proceso de objetivación, ni los conceptos mismos.

Palabras-clave: Perspectiva Sociocultural; Teoría de la Actividad; Subjetividad; Movimiento; Aretefactos; Geogebra.

¹ Este proyecto fue financiado por la Universidad de Antioquia y por el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación (COLCIENCIAS), según el contrato 212-2008. El proyecto fue desarrollado por Diana Jaramillo, Gilberto de Jesús Obando Zapata, Yolanda Beltrán de Covaleda, Luz Adriana Cadavid Muñoz, Claudia Quintero Quintero, Sandra Yaned Cadavid Muñoz, Cruz Amparo Restrepo Restrepo, Astrid Cano Zapata, Luz Marina Díaz Gaviria, Richard Nixon Cuellar Lamos, Francisco Martínez, Abelardo Tascón Vélez, Diego Alejandro Pérez Galeano, Walter Hernando Gómez Muñoz, Lady Katerinne Berrío Londoño.

1. Desde donde hablamos: algunos referentes teóricos y metodológicos

En una perspectiva sociocultural de la educación, el conocimiento deja de ser visto como un producto externo que debe ser apropiado por los individuos —trasgrediendo el paradigma de la modernidad— pasando a ser comprendido como una interpretación que los sujetos hacen del mundo, en una dialéctica continua con su entorno social, cultural, histórico y político. Es decir, el conocimiento es producido desde el sujeto en sus interrelaciones con el mundo.

Bajo esta perspectiva sociocultural, la educación matemática asume el conocimiento matemático como una *actividad* social, cuya *objetivación* y legitimación es resultado de la explicación de diferentes prácticas sociales en las que están involucrados los sujetos, a partir de los sentidos y significados compartidos, respetando, así, los diferentes saberes constituidos por los diversos grupos socioculturales al interior de los mismos. Comprendemos aquí las prácticas sociales como lo enuncian Miguel y Miorim son:

Un conjunto de actividades o acciones físico-afectivo-intelectuales que se caracterizan por ser: (1) conscientemente orientadas por ciertas finalidades; (2) espacio-temporalmente configuradas; (3) realizadas sobre el mundo natural y/o cultural por grupos sociales cuyos miembros establecen entre sí relaciones interpersonales que se caracterizan por ser relaciones institucionales de trabajo organizado; (4) productoras de conocimiento, saberes, tecnologías, discursos, artefactos culturales o, en una palabra, de un conjunto de normas simbólicas (Miguel y Miorim, 2005, p.27).

El conocimiento matemático, en esta perspectiva sociocultural, y como lo apuntan algunos autores (Moura, 1998; Radford, 2000, 2006, 2008) es visto como producto de la *actividad* humana que se forma durante el desarrollo de soluciones a problemas creados en las interacciones que producen el modo humano de vivir socialmente, en un determinado tiempo y contexto.

Bajo este abordaje, son otras las relaciones que empezamos a considerar entre la cultura, el currículo y la Educación Matemática, cuando de enseñar y aprender matemáticas se trata. La discusión de estas relaciones puede posibilitarse desde varias indagaciones.

En el proyecto “El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase” la pregunta que nos convocó estuvo referida a qué interrelaciones se tejen, a través del conocimiento matemático, entre los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje, al interior del aula de clase de matemáticas.

En el marco de esta pregunta problematizadora, comprendimos el conocimiento matemático como resultado de una práctica social, resultado de la *actividad* humana, en el sentido anteriormente explicitado. Una práctica que posibilita explicar las relaciones entre la acción humana y las situaciones sociales, culturales, políticas e históricas en donde tienen lugar tales acciones, y que posibilitan la emergencia de dicho conocimiento. Por su parte, comprendimos el aula de clase como un encuentro, donde convergen diversos sujetos en un determinado espacio, tiempo y contexto sociocultural —los tres históricos y políticos— donde ha de desarrollarse un acontecimiento interlocutivo, en la perspectiva de Geraldi (2000), en torno a unos conocimientos específicos.

De modo más concreto, fue nuestro objetivo de investigación identificar interrelaciones que se tejen, al interior del aula de clase de matemáticas, desde los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje, y cómo el conocimiento matemático —en dialéctica con la *actividad*— posibilita dichas interrelaciones. Además, planteamos también dos objetivos específicos: uno, identificar características de la *actividad* que posibiliten interrelaciones en la clase de matemáticas; y, dos, identificar mediadores de la *actividad* matemática en el aula que posibiliten la *objetivación* del conocimiento matemático.

Los fundamentos teóricos para comprender estas interrelaciones, la *objetivación* del conocimiento matemático y la *actividad* matemática, al interior de aula, los abordamos desde estudios socioculturales en la educación y, particularmente, de la educación matemática, destacamos entre ellos: Bajtin (2004, 2009), Vygostki (1995), Freire (2000), Davidov (1988), Wertsch (1991), Caraça (1984), D'Ambrosio (1998, 2001), Knijnik (1996, 1998, 2004; 2007), Lizcano (2004), Monteiro (2005), Jaramillo (2009), Valero (2006), Skovsmose y Valero (2007), Moura (1998), Radford (2000, 2006, 2008), entre otros.

Apoyados en estos aportes teóricos nos aproximamos a la práctica pedagógica de siete maestros que enseñan matemáticas en la educación básica y media. Maestros de cinco instituciones diferentes: dos en contextos urbanos de alta vulnerabilidad (Medellín y Bello); una en un contexto rural (Barbosa); y dos en contextos indígenas (Necoquí y Valparaíso).

El método de investigación escogido para el desarrollo de este proyecto fue el de la "investigación colaborativa", comprendida como el proceso de indagación donde maestros de instituciones escolares e investigadores de la universidad *co-laboran* para responder a un interrogante común, cada uno desde el lugar que ocupa (Pinto, 2002). Este tipo de investigación involucra varias fases de acción y reflexión, que requieren de un plan general de trabajo, y en ese plan se deben indicar los papeles que cada uno de los participantes han de desempeñar (Boavida & Ponte, 2002). Apostamos por un abordaje metodológico desde una perspectiva crítico-dialéctica como es abordada por Sánchez (1998), toda vez que era nuestra intencionalidad producir transformaciones al interior de las aulas de clase, desde las interrelaciones tejidas.

Para el desarrollo de esta investigación colaborativa conformamos un grupo de trabajo colaborativo en el que estaban involucrados, además de los siete maestros, cuatro

profesores universitarios, cuatro estudiantes de maestría y seis estudiantes de pregrado. Además de las continuas interacciones que sostuvimos en las cinco instituciones escolares, este grupo se reunió mensualmente durante dos años en el campus universitario.

Los maestros, protagonistas de este estudio, estuvieron convidados a realizar un trabajo sistemático sobre su práctica pedagógica que, atendiendo siempre a los objetivos propuestos, involucró un trabajo reflexivo, investigativo y colaborativo sobre ella.

Los datos producidos —de manera conjunta— tuvieron su origen en registros como autobiografías, narrativas, diarios reflexivos, discusiones de lecturas, planeación y elaboración conjunta de las *actividades* (Moura, 1998), memorias de los encuentros del grupo colaborativo, y análisis de episodios del cotidiano escolar en las respectivas instituciones escolares, registrados en videograbaciones.

Para el análisis de estos registros y datos realizamos el estudio de cuatro casos seleccionados desde los conocimientos matemáticos abordados al interior de las diferentes aulas de clase. Estos conceptos y conocimientos matemáticos fueron producidos en dialéctica con las *actividades* propuestas, respetando las especificidades propias del contexto donde cada institución escolar estaba inmersa. Los casos identificados fueron: “El caso de la parábola”, “El caso de la función”, “El caso de los polígonos”, “El caso de la medida”. Para cada uno de los casos identificamos características de las *actividades* propuestas, identificamos también los *mediadores* de las *actividades* en cuestión, para, finalmente, identificar los diferentes tejidos producidos desde las interrelaciones al interior del aula de clase de matemáticas. Para cada uno de los casos realizamos triangulaciones teóricas, de datos y de investigadores.

Estas triangulaciones nos posibilitaron llegar a algunas conclusiones. En el camino hacia estas conclusiones la clase de matemáticas se tornó una unidad de análisis en la búsqueda de la comprensión de las interrelaciones tejidas entre maestros, alumnos y conocimiento matemático. Para realizar este análisis, bajo una perspectiva sociocultural de la educación matemática, nos apoyamos en presupuestos teóricos como: *la teoría de la actividad* (Davidov, 1988), *la teoría de la objetivación y la subjetivación* (Radford, 2006; 2008) y *las Actividades Orientadoras de Enseñanza* (Moura, 1988).

La *Teoría de la Actividad* atiende a una concepción del hombre como ser histórico y social, como un sujeto activo que “conoce” y que construye el conocimiento en dialéctica con la naturaleza. Esta *Teoría* tiene sus orígenes en el materialismo dialéctico e histórico, el cual se apoya en la filosofía Marxista-Leninista. El materialismo dialéctico aborda los fenómenos de la naturaleza desde el método dialéctico, donde se entiende que ningún fenómeno de la naturaleza es estático, y que no puede ser comprendido si se le toma aisladamente, sin conexión con los fenómenos que le rodean. Para Leontiev (1978) la *actividad* está en relación *al conjunto de acciones socialmente dirigidas (orientadas) con el objetivo de alcanzar un fin*. Es decir, la actividad se constituye de acciones organizadas, estructuradas, orientadas a la consecución de una finalidad. En este sentido no es una reacción al medio, sino por el contrario, una forma de control sobre dicho medio. Debido a

esta orientación hacia una finalidad, la actividad es de naturaleza social, y es la vía por la que el hombre ejerce control sobre los demás hombres, y sobre sí mismo, a través de los procesos de intercambio que permiten la reconstrucción interna de lo que, primariamente, ha sido una construcción social.

En palabras de Radford (2004), la *actividad* es una forma de organización de las acciones de un grupo de individuos que están orientadas a un fin bien definido. Una *actividad* produce acciones y se comprende por medio de las acciones. Sin embargo, la *actividad* no es reducible a las acciones. Los sistemas de *actividad* evolucionan dependiendo de periodos socio-históricos y económicos, tomando a menudo la forma de instituciones y organizaciones. La *actividad* colectiva se conecta para objetar y motivar los asuntos individuales que son a menudo inconscientes, y que emergen del grupo en el cual están inmersas.

Las *actividades* que propusimos, desde las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, posibilitaron que los estudiantes pudieran realizar el procedimiento de ascensión de lo abstracto a lo concreto (Davidov, 1988) a través de las abstracciones y generalizaciones que los llevaron a la *objetivación* de los respectivos conceptos.

De esta manera, la ascensión de lo abstracto a lo concreto de cada uno de los alumnos participantes se fue posibilitando en cada acercamiento de ellos al objeto, a través de las abstracciones establecidas durante cada *actividad*. Abstracciones que dependieron, a su vez, de los diferentes artefactos que estuvieron presentes en cada una de las *actividades* propuestas, de las acciones que se desarrollaron con los artefactos por los estudiantes e investigadoras y, de las relaciones entre las diferentes *actividades*. Relaciones que se fueron tejiendo a lo largo del proceso investigativo, y que les posibilitó, a los estudiantes, ir *objetivando* los respectivos conceptos.

El proceso de objetivación de los conceptos, en los protagonistas de la investigación, se fue dando en cada una de las acciones mediatizadas por artefactos o, como diría Radford (2008), en cada una de las acciones mediatizadas por el conjunto de los instrumentos culturales; acciones que les fueron posibilitando la producción de sentidos y significados de los conceptos desde cada una de las *actividades*. Así, cada uno de los artefactos utilizados fue parte constitutiva de los sujetos investigados. De esta manera, en cada aproximación a los conceptos, cada uno de los artefactos, como constituyentes, les posibilitó a los estudiantes la producción de otros sentidos y significados que les fueron llevando, paulatinamente, a la *objetivación* del concepto en cuestión. Así, cada *descubrimiento* de los alumnos fue, de hecho, producto de sus significados culturales e interpretaciones que, mediados por los diferentes artefactos, en el desarrollo de cada *actividad*, les iba posibilitando establecer relaciones entre los elementos de los objetos matemático e ir *objetivando* los respectivos conceptos.

Así, los artefactos se tornaron como constituyentes del pensamiento en la dialéctica sujeto-objeto, ya que en esas interacciones de los estudiantes con el concepto los alumnos transformaban al objeto y, al mismo tiempo, ellos mismos se transformaban. En cada uno

de los acercamientos entre los protagonistas y los conceptos, se produjo una reconstitución de ambos. Este proceso es llamado por Radford como *objetivación y subjetivación*.

En esta investigación, la (re)constitución de subjetividades jugó un papel importante dentro de la *objetivación* de los conceptos matemáticos, ello debido a la creación de espacios, durante el desarrollo de las diferentes *actividades*, para el debate, la reflexión y la crítica. Espacios que posibilitaron en los estudiantes ir (re)constituyéndose como sujetos. Así, durante el transcurso de la investigación no solo se logró la interacción de los estudiantes con el objeto de conocimiento, sino también la (re)constitución de los estudiantes como sujetos. Durante el transcurso de la investigación los estudiantes fueron transformado el objeto matemático investigado, a la vez que se (re)constituían como sujetos. De este modo, estudiante y concepto, se iban transformando mutuamente.

Objetivación, de acuerdo a Radford (2004), es un término que hace referencia a aquellas acciones cuyo propósito es el de hacer visible lo que no lo es; es decir, materializar lo potencial. En ese sentido, las diferentes formas de representación de cada uno de los conceptos posibilitaron a cada uno de los estudiantes acercarse a los diferentes objetos de estudio desde diferentes perspectivas y, por lo tanto, construir sentidos para él mismo. Es decir, las diversas representaciones del objeto, realizadas desde las subjetividades de cada estudiante protagonista —constituidas en la dialéctica individuo-grupo— le posibilitaron, a cada uno, apreciar las dimensiones de éste, de formas diversas y así hacer una *objetivación* del mismo.

Haber encaminado las *actividades* desde diferentes problemáticas como es el problema ambiental, específicamente relacionado con el uso y cuidado del agua (para la función), la tecnología involucrada en las antenas parabólicas (para la parábola), la siembra de cultivos (para la medida), el torneo de fútbol (para los polígonos) hizo que los estudiantes protagonistas tuvieran un motivo para darle sentido a las acciones que las *actividades* les proponían. Considerando, que dichas *actividades* fueron orientadas con el fin de *objetivar* los conceptos en cuestión concordamos con Davidov (1988) cuando expresa:

En el desarrollo de la *actividad* práctica, social por su origen y procedimientos de realización, las personas comienzan a reproducir, en principio, cualquier objeto de la naturaleza, y también a crear los que están incluidos en ella sólo potencialmente. Esto se vuelve posible gracias a que las personas relacionan con la naturaleza desde la posición de toda su especie, toda su humanidad. (Davidov, 1988, p.117).

En esa dirección, las reflexiones de los estudiantes estuvieron asociadas, siempre, a la realidad que les pertenece y de la que hacen parte. Esto hizo que el concepto que cada uno *objetivó* con respecto a los objetos matemático, no fuese único; pues ni el proceso de *objetivación* ni el concepto mismo pueden serlo.

Hacer un recorrido epistemológico de los respectivos conceptos desde un abordaje sociocultural, nos posibilitó comprender la importancia de la intersubjetividad en la

constitución del sujeto, así como el papel fundamental de factores sociales, culturales, históricos y políticos en el proceso de *objetivación* del conocimiento matemático.

En el proceso de humanización las personas adquirimos la capacidad, históricamente construida, de aproximarnos a conceptos presentes en la cultura y construidos socialmente. Lo hacemos desde nuestras propias condiciones individuales, desde nuestras singularidades; es decir desde realidades situadas. Es así, como los estudiantes protagonistas, en cada una de las instituciones, desde sus realidades, *objetivaron* los conceptos matemáticos en cuestión.

En este proceso de investigación, las interacciones entre los diferentes sujetos participantes se constituyeron en elementos importantes para entender que las enunciaciones individuales no estaban desligadas de las complejidades de unas realidades situadas desde la voces de los otros. Voces traducidas en el *otro*, compañero de clase; en el *otro*, maestro; en el *otro*, investigador; en el *otro*, fontanero; en el *otro*, miembro de la comunidad y del mundo; en el *otro*, que se ocupa de problemáticas reales.

En los momentos analizados, los alumnos protagonistas de las instituciones, desde sus subjetividades, constituidas en dialogía con sus contextos, se aproximaron paulatinamente al objeto matemático, desde las interacciones con sus compañeros de aula y los maestros investigadoras. De esta forma, y a través de las *actividades orientadoras de enseñanza*, los estudiantes tomaron *conciencia progresiva* (Radford, 2006, p. 116) de nociones esenciales en cada uno de los conceptos. Esta toma de *conciencias* les permitió visualizarlo y dotarlo de significado; es decir, les permitió el proceso de *objetivación* de los conceptos.

En las instituciones educativas los alumnos protagonistas dieron cuenta de haber *objetivado* cada concepto desde las realidades de su propio contexto. La comprensión de la realidad que cada alumno vive, le permitió el desarrollo de las *actividades* propuestas para la clase. No fueron sólo ejercicios los que se trabajaron en estas clases, en cada una de las acciones había algo de la vida de los estudiantes y de su entorno, que los llevaba a poner, en la realización de sus tareas, un sello propio.

Desde estas conclusiones sintetizamos cuatro ejes que transversalizaron cada caso estudiado y que posibilitarán dar continuidad, *a posteriori*, a este estudio:

- La *actividad matemática* en el aula de clase.
- Proceso de *objetivación* del conocimiento matemático.
- Interrelaciones en el aula de clase como constitutivas de intersubjetividades.
- Dialéctica entre las prácticas sociales y el conocimiento matemático.
- El conocimiento matemático en la escuela indígena.
- *Investigaciones matemáticas en el aula de clase* (Ponte, Brocardo y Oliveria, 2003).
- La investigación colaborativa en la formación de maestros que enseñan matemática.

2. El caso de la *Función*

Partiendo del subproyecto de investigación intitulado “Función: proceso de objetivación y subjetivación en clases de matemáticas”, compartiremos unas reflexiones teóricas y metodológicas que pongan en diálogo el conocimiento matemático relativa al concepto de función, con unas *actividades orientadoras de enseñanza* que posibiliten dar cuenta de la forma como se objetiva dicho concepto desde las subjetividades de los estudiantes. Pensamos que se hace necesario (re)significar², al interior de las prácticas escolares, el proceso de objetivación del concepto de *función*.

El motivo que consideramos para objetivar la *función* como instrumento para interpretar leyes cuantitativas, fue el **uso del agua**. Este motivo, el del agua, surgió de los estudiantes en el aula de clase, a partir de reflexiones hechas sobre los cambios planetarios que están ocurriendo, generados en su mayoría por prácticas sociales. Las actividades que los estudiantes desarrollaron en el aula fueron planteadas, en su mayoría, por nosotras como investigadoras, y las otras surgieron de las inquietudes y consultas de los estudiantes.

Planeamos quince actividades diferentes para este proceso de investigación. Para efectos del análisis de los datos producidos, agrupamos estas actividades en cuatro momentos, las cuales se visualizan en el siguiente cuadro.

Momentos	Características de las Actividades	Nombre de las Actividades
Primero	Dirigidas a un auto reconocimiento de cada estudiante frente a su pasado, a su presente y a sus sueños. Un auto reconocimiento, que nos permitió identificar la existencia e importancia del cambio en las vidas de estos estudiantes como factor esencial en su visualización de futuro.	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>¿Quién he sido?</i> 2. <i>Todo cambia</i> 3. <i>Una carta al futuro</i>
Segundo	Referentes al concepto de fluencia, y por lo tanto referidas al cambio y a la transformación como condiciones inherentes al desarrollo no sólo individual sino social; cambios generados en y por la interacción con el otro.	<ol style="list-style-type: none"> 4. <i>La construcción de un “Muñeco de Pelos”</i> 5. <i>Análisis del documental “Home.”</i>
Tercero	Focalizadas hacia el concepto de variable, ley y el abordaje de la <i>función</i> como dependencia y correspondencia; abordaje considerado desde distintas representaciones. Para este momento, consideramos como motivo, el uso racional del	<ol style="list-style-type: none"> 6. <i>Constitución de equipos de investigación</i> 7. <i>¿Cuánta agua gastamos cepillándonos los dientes?</i>

2 Empleamos la palabra (re)significar, para darle fuerza al hecho de que la objetivación debe posibilitar la transformación del significado de una práctica escolar enmarcada en el paradigma cognitivista, a un significado, enmarcado desde una perspectiva diferente, en este caso, sociocultural.

	agua tanto en el hogar como en las instituciones educativas. Dicho motivo surgió a partir de la reflexión de los estudiantes, sobre el video <i>Home</i> ; reflexiones, entre otras, sobre las consecuencias que estamos viviendo por el uso inadecuado de los recursos naturales, especialmente del agua.	<p>8. <i>Tarifas para servicio de acueducto en Medellín</i></p> <p>9. <i>Rutina del baño diario y cantidad de agua utilizada para esta actividad en el hogar</i></p> <p>10. <i>Uso del agua en la industria</i></p>
Cuarto	Dirigidas hacia la objetivación del concepto de <i>función</i> en términos del reconocimiento de éste, como instrumento para interpretar leyes cuantitativas, desde regularidades observadas en un mundo cambiante.	<p>11. <i>Tanque para almacenamiento de agua.</i></p> <p>12. <i>Un nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia.</i></p> <p>13. <i>El agua de consumo para el hogar</i></p> <p>14. <i>¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?</i></p> <p>15. <i>¿Cuánto cuesta el agua que se malgasta en una fuga de agua en el colegio?</i></p>

A continuación presentamos algunas consideraciones de las actividades tres y catorce.

Una carta al futuro. En ella se propuso a los estudiantes escribir una carta en la cual los destinatarios fueran ellos mismos, pero después de 15 años. En la carta ellos escribieron, para sí mismos, cómo se imaginaban, desde aspectos como la ocupación que tendrían, con quiénes vivirían, dónde, el aspecto físico y el estado de salud que tendrían.

UNA CARTA AL FUTURO		
Intencionalidad	Acciones	Necesidad
Conocer algo sobre los sueños y proyección de vida, de los estudiantes. Así mismo, percibir desde lo personal, la disposición para las cosas que implican cambio, movimiento, devenir, fluencia, variabilidad.	<ul style="list-style-type: none"> • Escribir la carta, la cual puede ir ilustrada, de acuerdo al deseo y gustos de los estudiantes • Compartir con toda la clase algunas de las cartas. 	Conocer los sueños y/o proyectos de los estudiantes, así como su disposición a visualizar el cambio como agente dinamizador en nuestras vidas y la de los otros.

Tabla 1. Actividad. Una carta al futuro



Ilustración 1. Una carta al Futuro, Elizabeth, Febrero 26 de 2010

Consideramos importante en nuestro proceso de investigación, tener presente las motivaciones que como seres humanos han constituido hasta el presente a nuestros estudiantes. Motivaciones que son reflejo de lo que son; que llevan las huellas de un pasado, un presente y un futuro, y creemos que desde estas bases ellos objetivan sus propios conocimientos. Pues los estudiantes al entenderse desde su ser como seres en constante cambio, posibilita que, al mismo tiempo, puedan percibir cambios exteriores, cambios que se suceden en otros sujetos y objetos, en su entorno, en su cultura, en el planeta.

Consideramos como propio de los seres humanos pensarse en el futuro, verse en una “línea” de tiempo y espacio que posibilita el cambio; términos de unas regularidades que posibilitan desde la previsión, crear esa imagen de futuro.

¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?

El siguiente cuadro presenta desde las Actividades Orientadoras de Enseñanza, el sentido que para nosotras como maestras investigadoras tuvo la actividad *¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?*

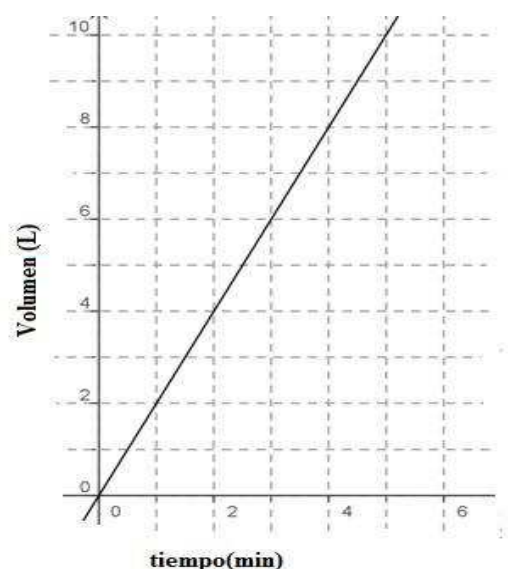
Tabla 2. Actividad. *¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio*

¿CUÁNTA AGUA SE MALGASTA EN UNA FUGA DE AGUA EN EL COLEGIO?		
Intencionalidad	Acciones	Necesidad
Aplicar desde una situación cotidiana, el concepto de correspondencia desde variables cuantitativas.	<ul style="list-style-type: none"> • Observar el uso de agua en las pocetas del colegio y elaborar los registros correspondientes. • Tomar datos precisos del agua desperdiciada, por posibles daños en las pocetas. • Resolver un taller alusivo a la posible fuga de agua hallada. Interpretación de la gráfica. 	Identificar variables y establecer relaciones entre ellas en términos de una posible ley cuantitativa identificada.

Sergio era un estudiante del grupo que decidió en un momento de este proceso del trabajo en clase, realizar su investigación de manera individual. Sus acciones estuvieron centradas en realizar un seguimiento a las pocetas y lavamanos de la institución, para dar cuenta si se estaba desperdiciando agua por fugas o descuidos al dejar la llave abierta.

El día 5 de mayo de 2010 los estudiantes detectaron la existencia de una fuga de agua en una poceta de la institución; suceso que motivó a Sergio realizar un seguimiento y a tomar datos correspondientes de la situación. Este hecho, suscitó una nueva actividad, en la cual, inicialmente, las maestras presentamos a todo el grupo, una representación de los resultados obtenidos por Sergio en su observación. Posteriormente, planteamos un taller que constaba de siete situaciones y/o preguntas.

La primera pregunta era alusiva a lo que ellos interpretaban de la gráfica, en relación a la situación de la fuga de agua en el colegio.



En esta situación decidimos presentar la información de forma gráfica, teniendo en cuenta que en situaciones anteriores los enunciados fueron explícitos desde el lenguaje natural.

Elizabeth interpretó, en esta representación gráfica:

“Se desperdicia demasiada agua en muy poco tiempo”

(Elizabeth, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, mayo 11 de 2010).

Pudimos apreciar cómo los estudiantes reconocieron la relación entre las variables tiempo y volumen de agua desperdiciado. Elizabeth también reconoció la rapidez de dicho crecimiento al enunciar que en poco tiempo, se pierde mucha agua; aunque ella no hizo alusión a relaciones numéricas.

En un cuarto momento de la actividad de la fuga de agua en el colegio, propusimos a los estudiantes explicar a sus familias acerca de la cantidad de agua desperdiciada en esta situación, según el tiempo transcurrido; para ello, nuestra indicación era que la explicación la hicieran por medio de una tabla de datos que cada uno debía diseñar.

En las imágenes siguientes se muestran las representaciones de María Eugenia y Juan Felipe:

3 que el primer día el volumen de la era para caudar, pero el otro día la fuga empeoró y el volumen del agua había entrado en menos tiempo.

volumen en litros	tiempo en minutos
2 litros	1 minuto
4 litros	2 minutos
6 litros	3 minutos
8 litros	4 minutos

Según el nivel que se fijó el tiempo durante la fuga de la cantidad de agua que caía. Que cada día se duplica la cantidad de agua que caía por el tiempo que se caía. La cantidad de agua que caía por el tiempo que se caía.

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110

Ilustración 3. Representación tabular de una fuga de agua en el colegio, María Eugenia y Juan Felipe, mayo 11 de 2010

En estas representaciones percibimos que los estudiantes utilizaron representación tabular, de una forma rápida y natural; a diferencia de la representación gráfica. En la construcción de éstas tuvieron cuidado en expresar las variables y las unidades en que se presentaban completamente. Observamos en este caso que María Eugenia consideró conveniente reafirmar, para cada dato numérico, las unidades en que se estaba expresando; mientras que Juan Felipe le dio énfasis al hecho de colocar muchos datos para reafirmar la regularidad. En la última parte del taller, propusimos a los estudiantes considerar la representación de la relación tiempo transcurrido y volumen de agua desperdiciado, en términos del siguiente enunciado: “Si llamamos **V** al volumen de agua en litros y **T** al tiempo en minutos, ¿qué relación podrías establecer entre la cantidad (volumen) de agua desperdiciado y el tiempo transcurrido?” En este caso sólo sugerimos llamar **V** al volumen y **T** al tiempo, no planteamos el expresar una ecuación, una representación analítica o una expresión algebraica.

6 El tiempo se estaba sumando por el mismo.

Tiempo: 2. Volumen: 2+2=4.

7 Que V se duplica cada vez que aumenta T.

$$V = t \times 2$$

$$V = 2t$$

Fue en la tercera categoría que titulamos “función: instrumento para interpretar leyes cuantitativas” donde resaltamos que los estudiantes protagonistas de la investigación interactuaron con varios elementos y relaciones que, como investigadoras, nos posibilitaron deducir que se estaba objetivando, en los seis estudiantes protagonistas, el concepto de

Ilustración 4. Representación analítica, una fuga de agua en el colegio, Juan Felipe, Mayo 11 de 2010

función. A continuación puntualizamos algunas reflexiones que permitieron tal consideración.

- Los motivos que inspiraron las actividades de clase, estaban en la misma línea de un motivo que movilizó gran parte del proceso de investigación: el manejo, uso y conservación del agua; destacando que se percibía en los estudiantes una sensibilidad especial hacia esta temática. En términos de Caraça (1984), podemos decir que los estudiantes reconocieron a partir de un fenómeno natural, una ley natural.
- Relacionando lo que plantea Sierpínska (1992), en cuanto al uso de las diferentes representaciones, los estudiantes se apropiaron de estos distintos elementos para hacer suyo un concepto de *función*, en términos de dar cuenta de una ley que explica un proceso de variación.
- La idea de dependencia se vio fortalecida por el manejo de variables cuantitativas, aunque los estudiantes reconocieron, también, otras variables de tipo cualitativo. Al final, sin descartarlas, ellos daban cuenta de una ley, una *función* que relacionaba cantidades.
- La idea de correspondencia entre variables de tipo cuantitativo, fue asumida de una manera natural: en un primer momento cuando los estudiantes interpretaron los datos desde las gráficas; después, en el momento de mostrar las interpretaciones de las gráficas por medio de una tabla; y, por último, cuando ellos esclarecieron una ley de correspondencia.



Ilustración 5. El concepto de función, Elizabeth, Junio 10 de 2010

Podemos decir que en este proceso de investigación, los estudiantes objetivaron la *función* como concepto teórico, pues para ellos, la *función* no estuvo ligada a la enunciación de una definición que recogiera las características comunes de dicho objeto, sino que, desde las diferentes representaciones y abordajes, cada estudiante interactuó con elementos constitutivos del concepto *función*.

3. El caso de la *Parábola*

Presentaremos aquí algunos resultados del subproyecto de investigación “La objetivación del concepto de parábola desde el uso de artefactos”. Estos resultados nos muestran cómo los artefactos son constituyentes en el proceso de objetivación del concepto de parábola.

Para ello, compartiremos dos de las actividades diseñadas dentro del trabajo investigativo, y que fueron importantes en la objetivación del concepto de parábola.

Estas actividades fueron abordadas para atender a una metodología de clase conocida como *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*, propuesta por Ponte, Brocardo y Oliveira (2003). Bajo esta metodología de clase, diseñamos las actividades basadas en el enfoque de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*.

Así, a la luz de las *investigaciones matemáticas en aula* fue importante para nosotras la creación de un ambiente que posibilitara el aprendizaje. Las ideas de los alumnos fueron valoradas y discutidas con sus compañeros, no siendo necesaria la validación constante de la maestra y las investigadoras. Así, las *Investigaciones Matemáticas en Aula de Clase* estuvieron basadas en la formulación de una pregunta o conjetura alrededor del funcionamiento de las antenas parabólicas, y a partir de allí se buscó la respuesta a dicha pregunta, haciendo uso de las experiencias del estudiante en contexto y desde las matemáticas mismas.

De este modo, dentro de las *Investigaciones Matemáticas en el Aula de Clase*, el estudiante asumió un papel más activo en el aula, crítico, argumentativo, explorador y formulador de preguntas. Del mismo modo el maestro se convirtió en un orientador del trabajo en el aula, posibilitando el debate en cada una de las actividades que se propusieron.

Desde las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, pudimos diseñar actividades que procuraron interacciones entre las investigadoras, los estudiantes y el conocimiento matemático. Un conocimiento socialmente construido desde una necesidad, unos motivos, unas acciones y una finalidad; de tal manera que dicho conocimiento tuviera sentido para el estudiante y le posibilitara su propia (re)constitución como sujeto.

Fue así, como durante el desarrollo de la investigación realizamos un total de nueve (9) actividades, en cada una de ellas realizamos videograbaciones, observaciones y producciones de los estudiantes. Dichas actividades se ilustran en la tabla 4.

Fecha	Actividad
1. Abril 6 de 2010 (Martes) Abril 12 de 2010 (Lunes)	Ideograma: "Mi relación con los medios tecnológicos". Socialización de Ideogramas
2. Abril 26 de 2010 (Viernes)	Conozcamos sobre las antenas parabólicas. Visita conchas acústicas, Parque de los deseos.
3. Abril 26 de 2010 (Viernes)	Video para motivar hacia la investigación
4. Mayo 10 de 2010 (Martes)	Hacia la conformación de grupos y preguntas
5. Mayo 25 de 2010 (Lunes)	Experimento: "Reflexión de los rayos de luz"

6. Mayo 31 de 2010 (Lunes) Julio 12 de 2010 (Lunes)	Modelando en Geogebra
7. Agosto 30 de 2010 (Lunes)	Identificando relaciones. Utilización de <i>applets</i>

Tabla 4: secuencia de actividades

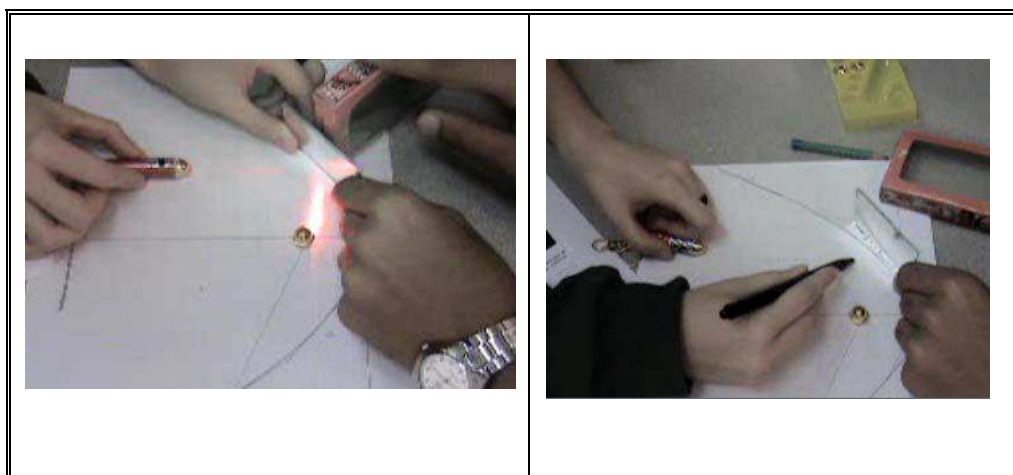
A continuación, mostraremos cómo fue el proceso investigativo en el aula de clase, en dos de las actividades realizadas, y cuál fue la intencionalidad, la necesidad y las respectivas acciones de cada una de ellas.

Actividad: Experimento: “Reflexión de los rayos de luz”

Intencionalidad	Identificar la propiedad de reflexión de la luz utilizando espejos planos.
Acciones	En grupos de cuatro integrantes, reflexionar acerca de la propiedad de la reflexión de la luz desde el experimento y unas preguntas guía.
Necesidad	Experimentar la propiedad de reflexión de la luz

Tabla 5: intencionalidad, acciones y necesidad: actividad “Experimento: reflexión de los rayos de luz”.

En la ilustración 7. mostramos algunas imágenes de esta actividad.



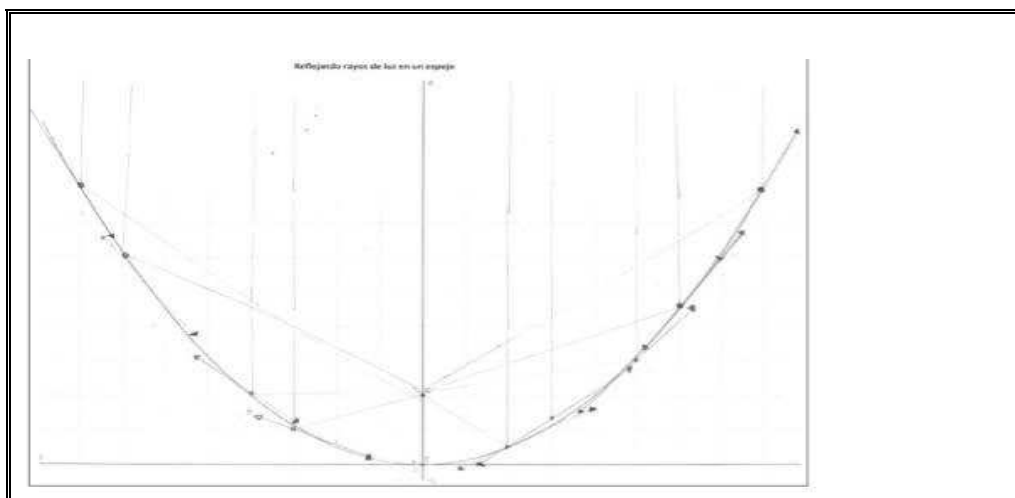


Ilustración 6. fotos del experimento de la reflexión de los rayos de luz, Carolina, mayo 25 de 2010

A partir de este experimento, Carolina, Estefanía y Víctor empezaron a relacionar cada uno de los elementos de la parábola. Para ellos, de acuerdo a la posición que tomaran los espejos, ello posibilitaría que los rayos que venían paralelos a la recta que pasaba por el objeto, se reflejará en dicho objeto. Carolina, por ejemplo al preguntarle qué opinaba del experimento decía, “*la forma de viajar de los rayos es muy peculiar, el rayo se refleja en el punto C. Para que la luz se refleje, el espejo tiene que estar bien situado, tiene que tener un ángulo de 90° y la luz paralela a la recta donde está C*”. (Videograbación, Carolina, mayo 25 de 2010)

De esta forma, Carolina, a partir de las interacciones con su grupo, de su experimentación con sus compañeros de equipo (ilustrada en la ilustración 6) y de sus razonamientos expuestos, pudo establecer relaciones entre los elementos del experimento: los rayos, el objeto y los espejos. Carolina descubrió las interrelaciones entre objetos que a primera vista parecían aislados, autónomos, pero que, en realidad, podían explicarse dentro de un sistema integral, es decir, para producirse la reflexión de la luz, cada uno de los elementos anteriormente descritos debían estar encadenados, de esta forma se producía una dialéctica entre los objetos singulares y el todo; es decir entre los espejos, el objeto y los rayos, y la propiedad de reflexión de la luz. Según Davidov (1988) “el pensamiento teórico es el área de los fenómenos objetivamente interrelacionados, que conforman un sistema integral, sin el cual y fuera del cual estos objetos solo pueden ser objeto de examen empírico”. (p.129)

Actividad: Modelando los rayos de luz en Geogebra

Posteriormente, a partir del experimento con los rayos de luz, propusimos a los estudiantes una actividad que llamamos “Modelando los rayos de luz en *Geogebra*”, en la cual los estudiantes representaron los rayos de luz del experimento con los rayos láser. En esta actividad, los estudiantes exploraron diferentes formas de disposición de las rectas que

representaban los espejos en el experimento de los rayos de luz, al mismo tiempo que establecían algunas relaciones entre los elementos constitutivos de la parábola. Sin embargo la necesidad de los estudiantes de realizar la modelación en *Geogebra* era movida por la motivación de dar respuesta a sus preguntas de investigación, referidas a la forma que debía tener el reflector parabólico en una antena parabólica

Intencionalidad	Representar la propiedad de los rayos de luz en el <i>software Geogebra</i> .
Acciones	Modelar el experimento de los rayos de luz utilizando el <i>software Geogebra</i> . Explorar diferentes formas de disposición de los espejos para que se produzca la reflexión de la luz. Establecer algunas relaciones entre los elementos constitutivos de la parábola.
Necesidad	Identificar la forma parabólica que deben formar los espejos para que se produzca la reflexión de la luz.

Tabla 6. Intencionalidad, acciones y necesidad:
actividad “Modelando rayos de luz en Geogebra”.

A continuación mostramos las acciones que los estudiantes realizaron en *Geogebra* para la representación de los rayos de luz. Para cada una de estas acciones, la profesora Sandra, realizó una serie de preguntas que les permitían a los estudiantes ir realizando su construcción en constante correlación con el experimento de los rayos de luz.

Se le pidió a los estudiantes trazar una serie de rectas paralelas, todas a igual distancia una de otra y un punto sobre la de la mitad. Este punto representaba el objeto sobre el cual se reflejaban los rayos de luz apuntados hacia el espejo.

Luego, sobre la misma recta en la que estaba el punto, trazaron un segmento perpendicular que representaba el primer espejo, de manera que el segmento quedó simétrico con respecto a la recta.

A partir de ese punto construyeron un segundo espejo, trazando un círculo con centro en un extremo del espejo y radio cualquiera (trataron de colocar siempre el extremo del espejo que se está construyendo en la mitad entre dos rayos consecutivos).

Colocaron un punto sobre el círculo y trazaron el radio correspondiente con centro en ese punto, que representaba el segundo espejo, el cual debía cortar la recta siguiente.

Aplicando la propiedad de reflexión de los rayos, reflejaron el segundo rayo de luz con respecto a ese segmento, e iban modificando la posición del espejo (moviendo el punto sobre el círculo) hasta que el rayo reflejado pasaba por el punto objeto.

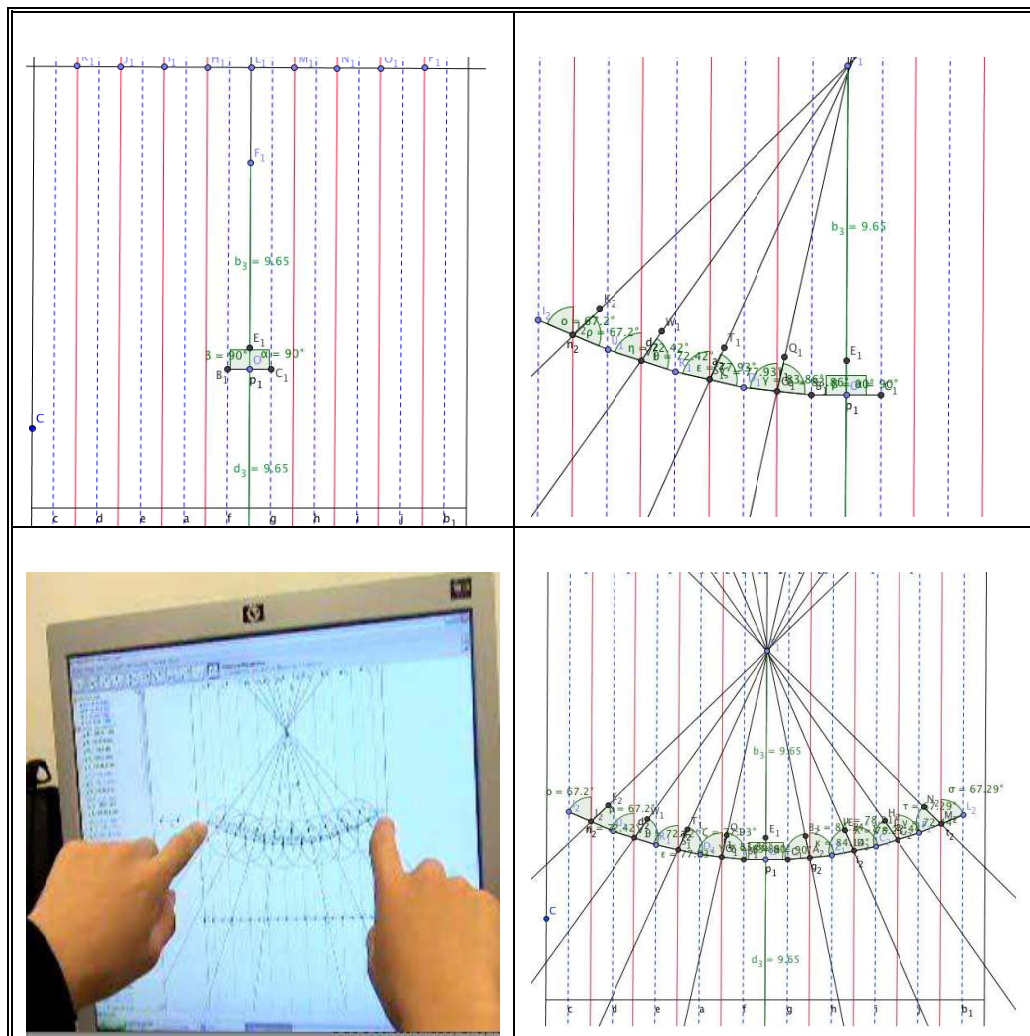


Ilustración 7.: producción del estudiante, modelación Geogebra, Víctor, julio 8 de 2010

La representación que Víctor realizó en *Geogebra* del experimento de los rayos de luz le permitió concretizar su pensamiento, a través de las explicaciones y deducciones que él hizo de su modelación con relación a las antenas parabólicas. Igualmente, Víctor pudo realizar objetivación del concepto de parábola por medio de las transformaciones mentales que fue haciendo de los objetos matemáticos representados en su construcción en *Geogebra*, dichas objetivaciones fueron a la vez fruto de las relaciones entre los objetos representados en pantalla, los cuales estaban asociados al experimento de los rayos de luz, además de las diferentes representaciones que Víctor utilizó, en este caso, el *software Geogebra* y su lenguaje natural.

Desde los resultados obtenidos en esta investigación vimos cómo las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* les posibilitaron a los estudiantes producir sentidos y

significados para el concepto de parábola, desde la comprensión de los fenómenos del medio, específicamente el funcionamiento de las antenas parabólicas. Las actividades también viabilizaron el uso de artefactos que mediaron en cada una de las acciones de los estudiantes, y posibilitaron su proceso de objetivación del concepto de parábola. Así, consideramos que la manera como un sujeto llega a pensar y a conocer un objeto depende de los significados culturales producidos, de las interpretaciones propias, de las formas de acercarse al objeto, por medio de la actividad misma y siempre mediada por artefactos.

En esta investigación, el *software Geogebra* jugó un papel importante en la objetivación del concepto de parábola, por parte de los estudiantes, para modelar situaciones reales como fue el funcionamiento de una antena parabólica. En dicha modelación, el modo de “arrastre” proporcionado por el *software* posibilitó a los estudiantes el establecimiento de invariantes y relaciones; aspectos que fueron importantes en el acercamiento del estudiante al concepto de parábola y, consecuentemente, a su proceso de objetivación.

Referencias bibliográficas

- Bajtín M. (2004). Problemas de la poética de Dostoievski. España: Fondo de Cultura Económica.
- _____ . (2009). Estética de la creación verbal. México: Publimex.
- Boavida, A.M y Ponte, J.P (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org.), Refletir e investigar sobre a prática profissional (pp. 43-55). Lisboa: APM.
- Caraça, B.J. (1984). Conceitos fundamentais da matemática. Lisboa: Livraria Sà Da Costa Editora.
- D'Ambrosio, U. (1998). Etnomatemática (4 ed.). São Paulo: Ática.
- _____.(2001) Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade. Colección: Tendencias en educación matemática. Belo Horizonte: Autêntica.
- Davidov, V. (1988). La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico. Investigación psicológica y teoría experimental. Moscú: Editorial Progreso.
- Freire, P. (2000). Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. 7 ed. São Paulo: Paz e Terra (original de 1996).
- GEPAPe/FE/USP. Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Actividade Pedagógica. (2010). A actividade pedagógica na teoria histórico-cultural. Brasília-DF: Liber Livro Editorial Ltda.
- Geraldi, J.W. (2000). Portos de Passagem. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes. (original de 1991).
- Jaramillo, D. (2009). Educação Matemática, Leitura e Escrita: Armadilhas, utopias e realidades. PROVIA. En C. E. Lopes & A. M. Nacarato (Eds.). Entre o saber cotidiano e o saber escolar um olhar a partir da etnomatemática. Utopia o realidade? Belo horizonte: Mercado de letras.
- Knijnik, G. (1996). Exclusão e resistência – Educação Matemática e Legitimação Cultural. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Knijnik, G. (1998). Educação Matemática e os problemas da —vida real||. In À. Chassot & Oliveira, R. J. (Eds.), Ciência, ética e cultura na educação. São Leopoldo: UNISINOS.
- Knijnik, G. (2004). Etnomatemática e educação no movimento —Sem Terra||. In Knijnik, G.; F., Wanderer; Oliverira, C. (Eds.), Etnomatemática: currículo e formação de professores. Santa Cruz do Sul: EDUNISC.

- Knijnik, G. (2007). Educación matemática y exclusión. Diversidad cultural, matemáticas y exclusión: oralidad y escrita en la educación matemática campesina del sur de Brasil. (pp. 66-83) Barcelona: Graó.
- Leontiev, A. N. (1978). Desenvolvimento do psiquismo. Lisboa: Horizonte Universitário.
- Lizcano, F. E. (2004). As matemáticas da tribo européia: um estudo de caso. In: Knijnik, G.; Wanderer, F.; Oliveira, C. (Eds.). Etnomatemática Currículo e Formação de professores. Santa Cruz do Sul: EDUNISC.
- Miguel, A.; Miorim, M.A. (2005). História na Educação Matemática: Propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica.
- Monteiro, A. (2005). Currículo de Matemáticas: reflexões numa perspectiva Enomatemática. 7o Encontro de Educación Matemática, Asocolme, Tunja.
- Moura, M. O. (1998). A atividade de Ensino como Ação Formadora. In A. D. Castro & A. M. P. d. Carvalho (Eds.), Ensinar a ensinar (pp. 143-162). São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda
- Pinto, R. A. (2002). Quando professores de Matemática tornam-se produtores de textos escritos. Tesis doctoral, UNICAMP, Campinas.
- Ponte, J. P.; Brocardo, J; Oliveira, H. (2003). Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Belo Horizonte: Autêntica.
- Radford, L. (2000). Sujeto, Objeto, Cultura Y La Formación Del Conocimiento. En: Educación Matemática, 12 (1), 51-69. Ontario, Universidad de Laurentienne.
- _____. (2004). Semiótica Cultural y Cognición. Recuperado el 12 de Septiembre de 2010 de: <http://www.martes.laurentian.ca/NR/rdonlyres/808730CD-2FF4-45A3-AB1B-06BAFF87B51B/0/Tuxtla3.pdf>
- _____. (2006). Elementos de una teoría cultural de objetivación. Revista latinoamericana de Investigación en Matemática educativa. Número especial, p. 103-120.
- _____. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of Learning. En: L. Radford, G. Schubring, & Feeger (comps.). Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.
- Sánchez, S.G. (1998). Fundamentos para la investigación educativa. Santa Fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Skovsmose, O.; Valero, P. (2007). Educación Matemática y Justicia Social: Hacerle Frente a las Paradojas de la Sociedad de la Información. In J. Jiménez, J. Díez-Palomar & M. Civil (Eds.), Educación Matemática y Exclusión. Barcelona: Graó.
- Valero, P. (2006). Consideraciones sobre el Contexto y la Educación Matemática ara la Democracia. Paper presented at the Foro Educativo Nacional, Año de Competencias Matemáticas, Bogotá.
- Vygostki, L.S. (1995). Pensamiento y lenguaje. Barcelona: Paidós. Wertsch, J. V. (1991). Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada. Madrid: aprendizaje Visor.

**Volver al índice
Cursos**