

PRIMERAS EXPERIENCIAS CON UNA TABLA EN SEGUNDO DE EDUCACIÓN PRIMARIA. APROXIMACIÓN FUNCIONAL AL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

First experiences with a table in second of primary education. Functional approach to algebraic thought

Torres, M. D.^a, Brizuela B.^b, Cañadas, M. C.^a y Moreno, A.^a

^a Universidad de Granada, ^b Universidad de Tufts

Resumen

Abordamos este trabajo desde la perspectiva funcional, como un acercamiento al álgebra. Focalizamos nuestra atención en cómo interpretan y usan tablas en el trabajo con funciones los estudiantes¹ de segundo de primaria (7-8 años), en su primer encuentro con la representación tabular. Observamos la forma de organizar los datos en tablas e identificamos las estructuras que evidencian los niños como regularidades entre las variables de las funciones. Llevamos a cabo una entrevista semiestructurada sobre una tarea que incluye una función lineal y en la que hay presente una tabla en blanco sin indicaciones en los encabezados. De nuestro análisis obtenemos que los estudiantes lograron organizar los valores de las variables adecuadamente, relacionándolos por columnas; escribieron encabezados, identificando las variables que intervienen); e identificaron estructuras (relaciones entre variables).

Palabras clave: estructura, función, generalización, pensamiento funcional, representación tabular

Abstract

We approach this study from a functional perspective, as an approach to algebra. We focus our attention on how second grade students (7-8 years), interpret and use tables in function work, in their first encounter with the tabular representation. We observe the way of organizing the data in tables and we identify the structures that the children show as regularities between the variables of the functions. We conducted a semistructured interview on a task that includes a linear function and in which a blank table is present with no indications in the headings. From our analysis we obtain that the students managed to organize the values of the variables appropriately, relating them by columns; they wrote headings, identifying the variables involved); and they identified structures (relationships between variables).

Keywords: structure, function, generalization, functional thinking, tabular representation

INTRODUCCIÓN

La actividad matemática se realiza necesariamente en un “contexto de representación” (Duval, 2006). En este estudio, pretendemos explorar el uso y la interpretación de la representación tabular por estudiantes de segundo de educación primaria (7-8 años) al trabajar con una tarea de generalización que involucra una función lineal.

Las tablas constituyen un dispositivo de uso cotidiano más común de lo que podría suponerse (Martí, 2009). En la perspectiva funcional que ocupa este trabajo, la función posee un papel protagonista. Las tablas son una parte de los contenidos y de los estándares de aprendizaje evaluables del currículo de matemáticas en España. Sin embargo, sabemos poco sobre cómo esta

¹ En este texto usamos el masculino como genérico, tal y como recomienda la RAE y por una mayor legibilidad del documento.

herramienta se presta para la comprensión de las funciones (Brizuela y Lara-Roth, 2002). No abordamos el concepto de función como se trabaja en educación secundaria, sino que atendemos al estudio de la relación entre las variables por la observación de regularidades. A la regularidad observada entre las variables la llamamos estructura en el contexto funcional. Permitir la observación de las estructuras entre variables en educación primaria activa el pensamiento funcional, favoreciendo el pensamiento algebraico. El pensamiento funcional se basa en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016). En este estudio trataremos de responder a cuestiones tales como: ¿Cómo organizan los niños los valores de una función en una tabla sin encabezados? y ¿cómo identifican las regularidades en la relación entre las variables (estructuras evidenciadas)?

Como objetivos de este estudio pretendemos explorar el uso y la interpretación de las tablas por estudiantes de segundo de educación primaria (7-8 años) al trabajar con una tarea de generalización que involucra una función lineal. Para esto describimos cómo organizan los valores en una tabla sin encabezados observando cómo identifican las variables) y cómo reconocen la regularidad entre las variables (cómo expresan la estructura).

PENSAMIENTO FUNCIONAL Y REPRESENTACIÓN TABULAR

El pensamiento funcional se centra en las relaciones entre cantidades que varían simultáneamente (Blanton y Kaput, 2004). El desarrollo del pensamiento funcional fomenta la capacidad para generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011) y ayuda a superar las dificultades existentes en la comprensión del concepto de función en educación secundaria (Doorman y Drijvers, 2011). Según Kaput (1987) el significado de la representación es dual, por lo que, tomaremos como representación la tabla y el concepto al que hace referencia será la relación entre las variables implicadas que evidenciaremos a partir de la estructura expresada por el estudiante. Una tabla es un formato de organización gráfica en el que una información cuantitativa se organiza de acuerdo con un doble eje, horizontal y vertical, que ordena y sistematiza datos o elementos de información relacionados entre sí (Campbell-Kelly, Croarken, Flood y Robson, 2003). En concreto, la representación tabular viene entendiéndose como una de las modalidades específicas de registro y organización de la información útil cognitivamente para una multiplicidad de usos (Gabucio, Martí, Enfedaque, Gilabert y Konstantinidou, 2010). Las tablas se encuentran entre las herramientas más utilizadas, constituyen un dispositivo de uso en la vida cotidiana más común de lo que quizá podría suponerse. La noción de estructura se corresponde con la forma en la que se organiza la regularidad entre valores concretos de las variables involucradas o la manera en que se expresa la generalización (Pinto y Cañadas, 2017). Esta noción permite analizar cómo los estudiantes interpretan una regularidad y, potencialmente, generalizan dicha regularidad (Warren, Miller y Cooper, 2013). En este contexto, generalizar consiste en establecer la estructura general existente entre cantidades que covarían.

Entre los investigadores que exploran la identificación de estructuras y la generalización en estudiantes de educación primaria en contextos funcionales, Torres, Cañadas y Moreno (2018) en un estudio con seis estudiantes de 2º de primaria con una tarea que involucra la función $y = x + 3$ describen cuatro tipos de estructuras diferentes ($y = x + 3$, $y = x + x$, $y = x + 2$, $y = x + 1$) que los niños identificaron a partir de los casos particulares dados. La mayoría de los niños generalizó verbalmente la estructura correcta, $y = x + 3$, cuando se les preguntó sobre la generalización, e identificaron la misma estructura para casos particulares y para el caso general, observándose coherencia en sus respuestas. Pinto y Cañadas (2017) abordan también la noción de estructura, con estudiantes de 8-9 años. Ellos emplearon 17 estructuras diferentes para una misma regularidad entre las variables ($y = 2x + 6$). Seis de las estructuras eran adecuadas a la tarea ($y = 2(x + 2) + 2$, $y = 2x + 3 + 3$, $y = 3(x + 2) - x$, $y = 3x +$, $y = 2x + 2$, $y = (x + 3) \cdot 2$, $y = (x + 6) + 2x$), mientras que las 11

restantes no lo eran. En estas investigaciones no hay datos sobre cómo usan las tablas para identificar las estructuras.

Más allá del trabajo con el álgebra, encontramos el trabajo de Brizuela y Alvarado (2010) con veintidós niños de primer grado (6 años) que resolvieron problemas aditivos. Las autoras encontraron que las herramientas más útiles para los niños entrevistados en el estudio fueron las tablas sin etiquetas seguidas del papel y lápiz. También encontramos el trabajo de Martí (2009) centrado en la construcción tabular de estudiantes de entre 8 a 11 años. Ambos estudios se han centrado en la representación tabular pero no en la interrelación del uso de tablas e identificación de estructuras.

MÉTODO

Este estudio es de tipo cualitativo y de carácter exploratorio y descriptivo. En concreto se trata de un estudio de caso múltiple con cuatro estudiantes. Para este estudio llevamos a cabo cuatro sesiones de clase y una entrevista semiestructurada grupal. Los datos que analizamos son los obtenidos durante la entrevista. Mediante las entrevistas podemos profundizar más en los procesos individuales de los alumnos. El tiempo invertido en cada sesión fue de 50 minutos. Hubo una semana entre cada sesión de clase. El período de tiempo transcurrido de la sesión 4 hasta la entrevista grupal sobre las paradas de tren fue de dos semanas. El orden de aplicación de las diferentes sesiones y la entrevista con las funciones trabajadas la presentamos en la tabla 1. Propusimos funciones que iban de menor a mayor dificultad. Todas las sesiones fueron desarrolladas por todo el grupo de la clase, 24 alumnos

Tabla 1. Sesiones y entrevistas

Contexto	Función
Sesión 1: Máquina de bolas	$y=x+3$
Sesión 2: Parque de atracciones 1º	$y=x+3$
Sesión 3: Parque de atracciones 2º	$y=2x+1$
Sesión 4: Cumpleaños	$y=2x$
Entrevista grupal: Paradas de tren	$y=2x$

Después nos centramos en las diferentes representaciones con las que los niños nos transmitían las relaciones que observaban. Todas las sesiones planteadas y la entrevista partían del trabajo con casos particulares y avanzábamos hacia preguntas más generales siguiendo el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). De esta forma, podemos observar cómo los estudiantes, a partir de los casos particulares, logran identificar estructuras para luego poder generalizar. Durante las sesiones los estudiantes contaban con un cuadernillo con la tarea que cumplimentaban de forma individual. Ellos no recibieron feedback de sus respuestas.

Participantes y centro escolar

Los participantes en este estudio son cuatro estudiantes (Alba, Ángel, Darío y Lola, seudónimos) de segundo de educación primaria (7-8 años) del curso escolar 2017/2018 de un centro escolar concertado de España que fue elegido intencionalmente según su disponibilidad. Este centro está caracterizado por tener un nivel socioeconómico bajo. Los estudiantes no asistían a las clases de forma habitual. Por esto fue difícil llevar un seguimiento de los datos de los estudiantes. Seleccionamos a los cuatro estudiantes del grupo total de 24 porque estuvieron presentes tanto en las cuatro sesiones como en la entrevista. En esta selección tuvimos en cuenta las recomendaciones de la tutora en cuanto a los logros de aprendizaje de cada estudiante (pretendíamos que estos logros fueran diferentes entre los diferentes niños para conseguir una mayor variedad en la muestra representada) y sobre la actitud y disposición de los estudiantes para conversar de cara a la entrevista. En ningún caso buscábamos que los alumnos a entrevistar fueran lo más aventajados. Los conocimientos previos de los estudiantes eran: números del 0 al 399, comparación de números

los estudiantes al caso general pudimos observar diferentes estructuras expresadas para la relación implicada entre variables y si usaban la tabla para dar sus respuestas.

Análisis de datos

Tras transcribir la entrevista, diseñamos las siguientes categorías sobre el uso y la interpretación de la tabla en la identificación de la relación entre variables. Atendimos a si lograron y cómo lo lograron:

1. Organizar los datos en la tabla para resolver la tarea: ¿Ponen los datos donde corresponde? (sí/no) ¿Escriben o completan títulos para el encabezado de la tabla? (sí/no)
2. Identificar estructuras: ¿Relacionan los valores de cada variable (números o cantidades) de ambas columnas con las variables implicadas identificando las regularidades existentes entre ellas? (sí/no) ¿Son adecuadas las estructuras a las diferentes tareas? (sí/no)

Las estructuras identificadas fueron las expresadas por los estudiantes, tanto en los casos particulares presentados como en el caso general. Para considerar que un estudiante identifica una estructura debe responder a dos o más casos particulares siguiendo la misma regularidad o generalizar. Este criterio ha sido considerado en estudios anteriores (e.g., Pinto y Cañadas, 2017; Torres, Cañadas y Moreno, 2019). De esta manera, interpretamos que el estudiante toma conciencia de la relación entre las variables que está implicada.

RESULTADOS

Detallamos los resultados obtenidos en la entrevista y los complementamos con ejemplos de producciones de los estudiantes y extractos de las entrevistas.

Organización de datos en la tabla

Los estudiantes, con las primeras relaciones dadas entre las variables (los primeros casos particulares) de la entrevista, presentaron dificultades para situar los valores que se les daba de la variable independiente (número de paradas que hace el tren) y solían preguntar “¿dónde lo pongo?”. En cuanto a los títulos para los encabezados de las columnas de la tabla observamos que ningún estudiante logró escribir títulos. Por esto, la entrevistadora introdujo el procedimiento para registrar los valores conocidos.

1. Entrevistadora (E): Bueno, no pasa nada, vamos a hacer una cosa: vamos a escribir en este espacio: número de paradas (primera columna). Ahora vamos a intentar poner en la tabla que el tren para una vez y recoge a dos personas.
2. Alumnos: (Siguen sin escribir nada.)
3. E: ¿Cómo podríamos poner que el tren para una vez? ¿Se os ocurre alguna manera?
4. Alumnos: (Niegan con la cabeza.)
5. E: Pues podemos poner un uno debajo de donde pone número de paradas. El tren para una vez y se montan dos personas cada vez que para. El número de personas lo ponemos al lado.
6. E: Si por ejemplo el tren para tres veces, lo ponemos debajo del 1.

Identificación de estructuras

Resumimos las estructuras identificadas por los estudiantes durante la entrevista en la tabla 2, atendiendo a las identificadas en los casos particulares y en el caso general implicando la función $y=2x$. Las hemos representado simbólicamente, aunque los estudiantes no han usado esa representación.

Tabla 2. Estructuras identificadas durante la entrevista

Estructuras

Estudiante	Casos particulares	Caso general
Ángel	$y = 2x$	NR
Lola	$y = 2x$	NR
Darío	$y = 2x$	$y = 2x$
Alba	$y = 2x$	NR

Nota. NR = No responde

Los cuatro estudiantes identificaron las estructuras adecuadas en el trabajo con casos particulares. Sin embargo, tres de ellos no respondieron al caso general. Ejemplificamos en la continuación del extracto de entrevista anterior la identificación de las estructuras en los casos particulares.

7. E: Si el tren para tres veces, ¿cuántas personas se suben?
8. Todos: Seis.
9. E: ¿Por qué seis?
10. Ángel: Porque dos más dos cuatro y otros dos son seis.
11. E: ¿Y cómo lo estás haciendo Ángel?
12. Ángel: Pues multiplicando dos por tres.
13. E: ¿Y por qué multiplicas por dos? ¿Qué es dos aquí?
14. Ángel: Pues el número de personas.
15. E: Bueno, vamos a ver. Cuando el tren para tres veces (señala a la columna de las paradas), ¿se han subido (señala a la columna del nº de personas) ... cuántas personas?
16. Todos: Seis (todos escriben el 6 en la celda correspondiente).
17. E: ¿Alba tú puedes explicarme porqué son seis?
18. Alba: Porque si el tren para tres veces, se subirían seis personas. He multiplicado tres por dos.
19. E: ¿Y por qué por dos, Alba?
20. Alba: Porque dos es dos personas.
21. E: Vale, vamos a pensar lo que ocurre si el tren para, por ejemplo, 6 veces.
22. Lola: Se subirían 12.
23. Ángel: 12 (contesta más tarde).
24. E: ¿Y ahora cómo lo habéis hecho?
25. Ángel: Multiplicando seis por dos.
26. Darío y Lola: Multiplicando por dos.
27. Darío: Sí, siempre multiplicando.
28. E: Entonces podemos escribirlo en la tabla, si para 6 veces (señala columna de las paradas) ¿Cuánto tenemos que poner aquí (señala columna del nº de personas)?
29. Todos: (Escriben 12 en la celda adecuada.)
30. E: Muy bien. Y si ahora el tren ha parado 5 veces, ¿cuántos amigos de Elsa se han podido subir?
31. Todos: Diez (rápidamente contestan a la vez. Darío y Alba lo escriben en la tabla, ya sin indicaciones de la entrevistadora).

En un primer momento, Ángel contestó mediante una relación aditiva (línea 10). En los siguientes casos sus respuestas obedecieron a una estructura que reflejaba una relación multiplicativa, como los demás alumnos (líneas 12, 18 y 26). En la línea 27, Darío expresó que “siempre multiplica”, lo que implica una generalización dada ya desde los primeros casos particulares. En cuanto al caso

general, hubo tres alumnos que no respondieron durante la entrevista al caso general debido quizás a la distracción producida entre ellos y en ese momento de la conversación. Esta entrevista fue grupal con los cuatro estudiantes por lo que en algunos momentos fue difícil captar la atención de todos. Darío generalizó una estructura adecuada a la función aplicada y además lo hizo de forma correcta, diciendo “siempre está multiplicando por dos, como antes”. Sin embargo, no completó la tabla con el valor de variable independiente para el caso de muchas paradas (término indeterminado) aunque expresó que “muchas paradas podría ser un trillón” atribuyéndole un valor concreto a la indeterminación (ver figura 3).

Fecha: 4 de mayo de 2018 Hoja de trabajo 1

numero de Paradas	numero de Personas
1	2
3	6
6	12
5	10
10	20
25	50
15	30
90	180
1000	2000
1 trillón milésimas	2 milésimas

Figura 3. Tabla de Darío

CONCLUSIONES

Consideramos con precaución los resultados anteriores ya que el análisis se aplica a una pequeña muestra de cuatro estudiantes por lo que no pretendemos generalizar ninguno de los resultados obtenidos.

A priori, hemos observado que los estudiantes no lograban escribir nada al trabajar con la tabla vacía y sin encabezados a diferencia de lo que ocurre en el trabajo de Brizuela y Alvarado (2010). El hecho de no señalar las variables dependientes e independientes en la tabla ha dificultado en este estudio que los estudiantes situaran los valores y pudieran identificar a partir de ellos la relación entre variables. Esto cambió cuando la entrevistadora introdujo el procedimiento para colocar los diferentes valores. Los estudiantes, con los datos escritos en la tabla, pudieron relacionar y reconocer las cantidades, variable independiente y dependiente (número de paradas y número de personas y edad de superhéroes) durante la entrevista. Muestra de esto han sido las estructuras evidenciadas en su mayoría adecuadas en la tarea presentada.

La cantidad de estructuras adecuadas que han sido evidenciadas por los estudiantes fue mayor en los casos particulares que el caso general. Esto puede deberse a que la entrevista fue grupal y esto dificultó en algunos casos la comunicación con la entrevistadora, que en momentos precipitó en la ausencia de respuesta por parte de los estudiantes, notándose en las preguntas sobre el caso general donde tres estudiantes no respondieron al caso general.

Hemos visto cómo los niños han desarrollado un trabajo de comprensión entre la representación (tabla) y el objeto representado (relación entre las variables) como apuntaba Kaput (1987). Esta puesta en juego difiere de estudios anteriores (e.g., Martí, 2009), al contar con tablas en blanco y es un aspecto que nos permite revisarlo como una opción de instrucción docente para la comprensión de la relación entre variables debido a que la solicitud cognitiva en la tarea es mayor que el solo hecho de completar una tabla. Los resultados de esta investigación, debidamente sistematizados, pueden ayudar a los maestros a implementar actividades en el aula que promuevan el desarrollo de las representaciones tabulares en estudiantes, a la vez que desarrollan su pensamiento funcional. Promover también las habilidades de comunicación mediante la representación tabular es

fundamental ya que actualmente las tablas, entre otros dispositivos de representación gráfica de la información, han llegado a formar parte de los planes de estudios de la enseñanza primaria y secundaria y son ampliamente usadas de manera cotidiana. Por eso existe un interés en observar el uso que hacen de ellas los niños.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte de los proyectos con referencias EDU2016-75771 y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Referencias

- Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.
- Brizuela, B. M. y Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 309–319.
- Brizuela, B. y Alvarado, M. (2010). First graders' work on additive problems with the use of different notational tools. *Revista IRICE*, 21, 37-43.
- Campbell-Kelly, M., Croarken, M., Flood, R. y Robson, E. (Eds.) (2003). *The History of Mathematical Tables. From Sumer to Spreadsheets*. Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67-78.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.
- Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in functions. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, (61), 103-131.
- Gabucio, F. Martí, E., Enfedaque, J., Gilbert, S. y Konstantinidou, A. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria. *Cultura y Educación*. 22(2), 183-197.
- Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
- Martí, E. (2009) Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez Echeverría y E. Teubal (Eds.), *Representational Systems and Practices as Learning Tools in different Fields of Learning* (pp. 133–148). Rotterdam, Países Bajos: Sense.
- Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.

- Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.
- Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en educación matemática XXIII* (pp. 573-582). SEIEM.
- Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, 7(2), 75-84.