

Voronoi no Courel

MANUEL VILARIÑO FREIRE

Este artigo pretende achegar a unha aula de Secundaria os chamados Diagramas de Voronoi, unha ferramenta matemática moi usada na actualidade para a resolución de diferentes problemas. Desde a versión 4.0 do programa informático GeoGebra, a construción destes conxuntos está automatizada, polo que se abren moitas posibilidades para desenvolver actividades onde realicemos unha aplicación máis práctica de conceptos xerais de Xeometría.

Palabras chave: Voronoi, Courel, Secundaria, GeoGebra, Área de Influencia.

Voronoi at Courel

This paper aims to provide to a high school class of so-called Voronoi diagrams, a mathematical tool widely used today to solve different problems. Construction of these sets is automated since version 4.0 of software GeoGebra, which open many possibilities to develop activities which we'll make a more practical application of general concepts of Geometry.

Key words: Voronoi, Courel, High School, GeoGebra, Area of Influence.

PRIMACHORROS brancos
panqueixo i amarguexos!
Argana polos barrancos!
Folla podre nos reprexos!

Alguén está
niste aire da mañá.

Uxío Novoneyra
(Parada de Moreda 1930, Compostela 1999)

O poeta do Courel, homenaxeado nas Letras Galegas 2010, fai referencia nestes versos aos reprexos, que son as presas feitas nos soutos con terra e restos de fentos e maleza para reteren as castañas caídas.

E aquí é onde entran os diagramas de Voronoi.

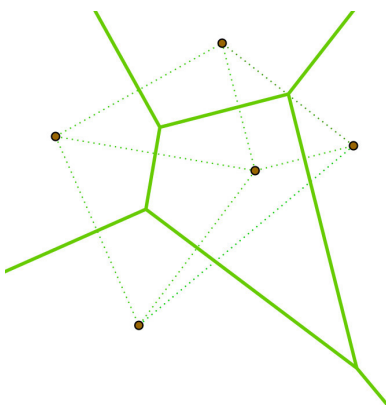
Diagramas de Voronoi

Georgi Voronoi foi un matemático ruso de finais do S. XIX, especialista en fraccións continuas, que morreu con só 40 anos. Definiu os seguintes conxuntos que hoxe en día levan o seu nome.

Dados n puntos, dividimos o plano en n rexións formadas polos puntos que se encontran máis próximos a cada un deles que ao resto. Formalmente:

$$R_i = \{x / \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\| \forall j = 1, 2, \dots, n\}$$

R_1, R_2, \dots, R_n constitúen unha teselación do plano, con “centros” nos puntos de partida, que é coñecida como Diagrama de Voronoi asociado a eses puntos. Podemos construír o diagrama trazando as mediatrices entre os segmentos que unen os puntos “próximos” dous a dous. As rexións delimitadas por estas mediatrices serán as rexións de Voronoi. Este concepto de proximidade, moi intuitivo, formalízase mediante as chamadas triangulacións de Delaunay. A idea é que, para simplificar a construción, só é necesario trazar as mediatrices entre os puntos que 3 a 3 estean nun círculo sen outro punto no seu interior.



Imaxe 1: Diagrama de Voronoi asociado a 5 puntos

Os programas informáticos clásicos de matemática computacional como *MatLab* ou *Mathematica* teñen implementado o algoritmo de construción dos conxuntos de Voronoi a partir dos seus centros. Tamén os software de tratamento dixital de imaxes como *Gimp* ou *Photoshop* utilizan filtros para reproducir o efecto destes diagramas. Porén, o recurso máis atractivo para o profesorado de primaria e secundaria chegou coa versión 4.0 de *GeoGebra* e o seu comando *Voronoi*[], que será utilizado en todas as imaxes deste artigo.

Algúns exemplos previos

Na natureza aparecen multitude de divisións modelables por diagramas de Voronoi. Trátase en xeral de puntos concretos de acumulación de humidade, frío, calor, etc. que modifican a xeometría, textura ou cor dunha determinada rexión próxima. A pel dalgúns animais, follas, terreos moi secos ou en desxeo, presentan estas formas. Nas *XVI JAEM* celebradas en Palma de Mallorca en xullo de 2013, o artista **Cristóbal Vila** impartiu unha memorable conferencia plenaria titulada *Matemáticas e Animación 3D*. Confesou que a última secuencia da súa obra *Nature by Numbers* estaba inspirada nun artigo dun [blog](#) sobre cultura xaponesa que explicaba a construción dos conxuntos de Voronoi. As ás desa espectacular libélula mostrada nesta obra están teseladas cun diagrama deste tipo.

No entanto, nós ficaremos cunha das aplicacións máis sinxelas desta clase de conxuntos. Estudaremos a construción de áreas de influencia para a prestación de determinados servizos, unha das funcións máis básicas incluídas nos Sistemas de Información Xeográfica (GIS).

Na parte técnica utilizaremos mapas e planos obtidos directamente da internet ou de ferramentas tipo *Visor SixPac* e *Google Maps*. As construcións matemáticas serán cousa de *GeoGebra* e, aínda que non é necesario, o retocado final, de *Gimp*. Os resultados non teñen ningún valor operativo, só pretendemos achegalos como curiosidade para visualizar os diagramas de Voronoi nun contexto próximo e accesible nas aulas.

Para compoñer os mapas, primeiro procuramos a imaxe (ou “pantallazo” de *Google Maps*) na rede e descargámola no disco. Abrimos *GeoGebra* e, premendo en “inserir imaxe”, recuperamos o ficheiro descargado. Sobre a imaxe de fondo, identificamos os puntos sobre os que construiremos o diagrama. Executamos

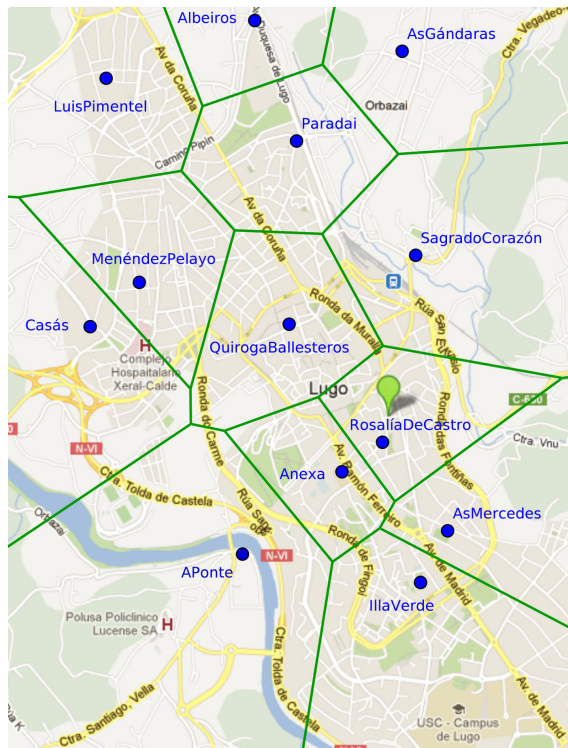
o comando *Voronoi[Puntos]*. Gardamos a zona gráfica como imaxe e retocamos e coloreamos nun *software* tipo *Gimp*. De querer saltar este último paso, podemos elaborar un bo acabado final utilizando só *GeoGebra*. Para isto, habería que repasar con polígonos todas as rexións de Voronoi e despois, un a un, revisar as cores, opacidades, tramas, grosor das liñas, ...

Zonas de escolaridade

Comezaremos no eido local, cun plano da cidade de Lugo. Trátase de resolver o problema que se presenta ano tras ano, para delimitar as zonas nas que se reparte o alumnado de 3 anos no procedemento de acceso á escolaridade. En Lugo hai 13 centros educativos públicos para unha área de 92.000 habitantes. Para asignar cada futuro estudante ao seu centro utilizaremos un único criterio de cercanía, é dicir, a cada un lle corresponde o centro que lle queda máis cerca.

Para que o reparto sexa equilibrado deberíamos supoñer que todas as zonas teñen unha densidade de poboación infantil similar e que todos os centros ofertan o mesmo número de prazas. Como isto non acontece na realidade, deberíamos utilizar un modelo de diagrama de Voronoi con pesos, afectando cada centro pola densidade do barrio e polo número de prazas ofertadas. Ou dunha maneira menos elaborada, aplicar homotecias para corrixir as rexións desproporcionadamente grandes ou pequenas.

Trátase pois dunha simplificación que dá como resultado a seguinte distribución:

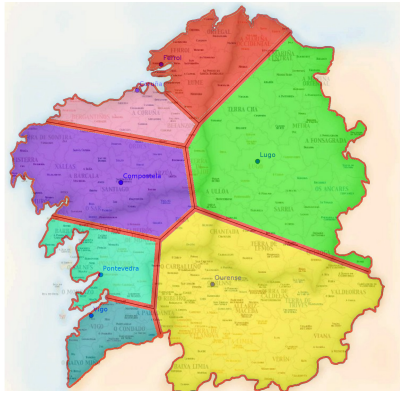


Dáse o caso do colexio público que oferta menos prazas en Infantil. É o CEIP Quiroga Ballesteros, que abrangue unha área moi ampla e moi poboada. De feito, a veciñanza da zona histórica de Lugo vén desde hai tempo mobilizándose para esixir un novo centro público nesta zona da cidade. Este Diagrama de Voronoi é un argumento moi forte ao seu favor.

Imaxe 2: Zonas de Escolaridade da Cidade de Lugo

A continuación veremos dous exemplos sobre a área de influencia que abranguen as 7 cidades galegas (Vigo, A Coruña, Ourense, Lugo, Santiago, Pontevedra e Ferrol) e as 19 cidades de máis de 200.000 habitantes da Península Ibérica.

Área de influencia das 7 cidades galegas



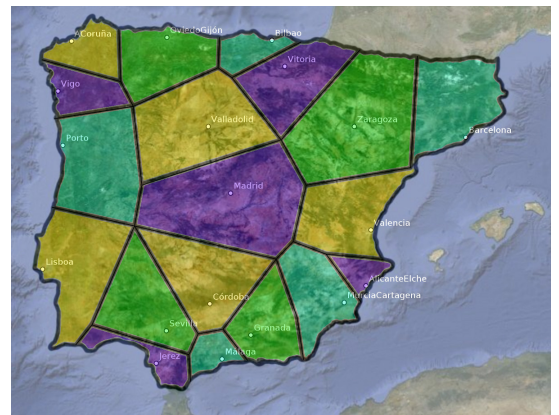
Imaxe 3: Área de Influencia das 7 Cidades Galegas

Este mapa dá para desenvolver unha actividade completa en Secundaria: dividimos a clase en 7 grupos, cada un no goberno da “súa” cidade. Teñen que distribuír os fondos europeos e precisan buscar argumentos para poder captalos. Un cálculo que necesitarán facer todos será a poboación e superficie que abrangue cada conxunto e, a partir de aí, discutir. Tamén terán que repartir a poboación de determinados concellos, así que pode dar moito xogo.

Área de influencia das 19 grandes urbes peninsulares

Este é o diagrama de Voronoi da Península Ibérica centrado nas 19 cidades de máis de 200.000 habitantes.

Dividir a clase en 19 grupos como fixemos no caso anterior coas 7 rexións non parece moi factible, ademais de que os cálculos se complican demasiado. Non obstante, podemos facer 4 ou 5 grupos, no que cada un que teña asignado un sector peninsular, e preguntarnos en que lugar unha importante empresa debería instalar unha grande central loxística e de transportes para dar servizo a toda a Península. Poderíamos aproveitar o diagrama para deseñar os percorridos dun tren entre dous puntos lonxanos da península de maneira que ningún núcleo grande de poboación saia prexudicado. Este problema de optimización de rutas é unha das aplicacións máis comúns dos Diagramas de Voronoi.



Imaxe 4: Área de Influencia das 19 Grandes Urbes Peninsulares

A propiedade das castañas caídas no Courel

No comezo deste artigo falabamos dos “reprexos”, os relevos que os courelaos e as courelás construían para delimitar a propiedade das castañas caídas. No Courel, como en toda Galicia, as castañas constituíron parte fundamental da dieta durante séculos, ata que se foron consolidando os novos cultivos chegados de América. Porén, continúan hoxe en día a ser un produto de grande importancia gastronómica, cultural e turística. Un roteiro polos seus magníficos soutos en calquera época do ano, mais sobre todo en outono, é unha das experiencias naturais máis completas que se poden ter no noso País.

Entre os usos e costumes da Serra do Courel figura que as castañas non pertencen ao propietario da finca onde caen, senón que son do castiñeiro do que caeron. E isto introduce unha nova maneira de distribuír o terreo. Vexámolo cun exemplo:



Imaxe 5: Delimitación dun Terreo (SixPac)

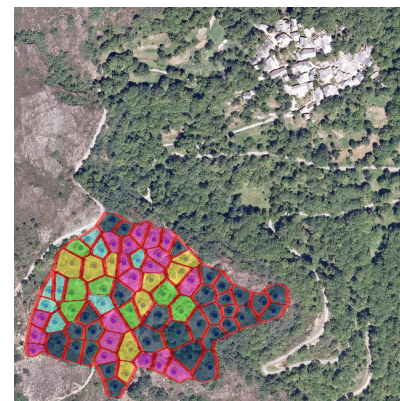


Imaxe 6: Plantación Simulada de Castiñeiros

Un dos lugares míticos do Courel é o Val das Mouras que se encontra ao pé da aldea de Mercurín. Na figura da esquerda podemos ver unha imaxe deste lugar obtida do Visor SixPac, coa división en parcelas dun terreo ermo na parte inferior esquerda. Esta ferramenta inclúe a posibilidade de amosar os límites das parcelas que conforman o terreo. É o caso das liñas vermellas que delimitan unha zona que se encontra preto da aldea (figura 5). Trátase dunha distribución minifundista moi característica de Galicia. Supoñamos que os veciños de Mercurín teñen plantado un souto de castiñeiros sobre este terreo (figura 6). Simulamos esta plantación separando os castiñeiros algo máis do normal para que fique máis clara a distribución. Cando chegue o outono e comecen a caer as castañas, a distribución achegada polo SixPac non nos vai valer para identificar o seu propietario. Necesitamos outro diagrama centrado en cada castiñeiro, no que cada rexión delimite a que árbore pertence cada castaña do chan. Este é un diagrama de Voronoi.

Nesta composición, fomos agrupando (pintando da mesma cor) os castiñeiros que pertencían a cada parcela. Deste xeito os límites das fincas (SixPac) non corresponden directamente cos límites da propiedade das castañas caídas.

Así pois, e como conclusión, de darse o caso, esperemos que non, de que dous veciños do Courel concorran nunha disputa xudicial pola propiedade das castañas do chan, o xuíz ou xuíza vai ter que chamar como perito a alguén que saiba de matemáticas. Pero non lle vale un calquera. Necesita alguén que saiba algo sobre conxuntos de Voronoi.



Imaxe 7: Diagrama de Voronoi no Souto

Referencias

Bibliográficas

- [1] U. Novoneyra, *Os Eidos. O Libro do Courel*, Edicións Xerais, 2010 (1955 Orixinal).

En internet

- [2] H. García, *Blog Kirainet*, <http://www.kirainet.com/delaunay-y-voronoi/>
- [3] C. Grima, *Blog Naukas*,
<http://naukas.com/2011/12/23/cada-uno-en-su-region-y-voronoi-en-la-de-todos/>

MANUEL VILARIÑO FREIRE
IES Perdouro - Burela
<mvilarinho@edu.xunta.es>
@vilagz