Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2019, nº 103, 7-23*

Estrategias didácticas para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de las Derivadas de funciones reales de una variable real y aplicaciones

Yohan Díaz Ferrer
ydferrer@uho.edu.cu
Miguel Cruz Ramírez
Yordanis Velázquez Cardoza
Sila Adelfa Molina Sierra

Universidad de Holguín, Cuba

Resumen: *Se presenta un grupo de estrategias didácticas para guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de las derivadas de funciones reales de una variable real y sus aplicaciones. El proceso se realiza paso a paso aprovechando el desarrollo del contenido y constituye la base fundamental de una clase metodológica instructiva, o sea, dirigida a los docentes, principalmente. Se logran integrar los resultados de varias bibliografías de uso recomendado en la asignatura matemática***.** *Algo novedoso constituyen las estrategias didácticas planteadas para las aplicaciones de las derivadas de funciones reales de una variable real y sus aplicaciones y la resolución de problemas de optimización.*
Palabras clave: *estrategias didácticas, derivadas, funciones reales, proceso de enseñanza-aprendizaje, aplicaciones, problemas de optimización.*

Didactic strategies to develop the teaching-learning process of the contents of the Derivatives of real functions of a real variable and applications

Abstract: *A group of didactic strategies is presented to guide the teaching-learning process of the contents of the derivatives of real functions of a real variable and its applications. The process is carried out step by step taking advantage of the development of the*

content and constitutes the fundamental base of an instructional methodological class, that is, directed to the teachers, mainly. It is possible to integrate the results of several bibliographies of recommended use in the mathematical subject. Something new are the didactic strategies proposed for the applications of derivatives of real functions of a real variable and its applications and the resolution of optimization problems.
Keywords: *didactic strategies, derivatives, real functions, teaching-learning process, applications, optimization problems.*

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de estrategias didácticas se involucra con la selección de actividades y practicas pedagógicas en diferentes momentos formativos, métodos y recursos en los procesos de enseñanza-aprendizaje (Velazco y Mosquera, 2010).

Aldana, et al. (2016) realizan una propuesta para disminuir los altos índices de reprobación en matemáticas en las carreras de ingeniería que ha afectado la eficiencia terminal, aseguran que para solucionar se requiere "centrar la labor educativa en el aprendizaje del novato, mediado por el docente, en el marco de un modelo educativo innovador basado en los estilos de aprendizaje, la tutoría, la resolución de problemas, la comprensión del lenguaje, la comunicación y el desarrollo de competencias tanto de alumnos como de docentes" (p.20).

Es sustancial, plantear estrategias didácticas que contemplen los objetivos de enseñanza-aprendizaje a partir de los diversos métodos, los cuáles deben dirigirse a las necesidades particulares de cada asignatura, por lo tanto los docentes deben conocer y emplear una variedad de actividades que le permitan concretar dichos procesos apoyados de los diversos recursos.

La realización de este trabajo es basado en las experiencias de impartición de varios profesores de la asignatura Análisis Matemático I que ahora se nombra Matemática Superior I, la cual se imparte en 90 horas clase para las carreras de Ingenierías en la modalidad presencial. Los temas que ella contiene son: elementos de lógica y teoría de conjuntos, funciones reales de una variable real y aplicaciones, límite y continuidad de funciones reales de una variable real, derivadas de funciones reales de una variable real y aplicaciones, sucesiones y series, cálculo diferencial de funciones reales de una variable real.

El sistema de conocimientos del tema derivadas de funciones reales de una variable real y aplicaciones comprende el concepto de derivada de una función en un punto, derivada lateral, función derivada, condición necesaria de derivabilidad, interpretación de la derivada: pendiente de una curva, reglas de derivación, derivadas de funciones compuestas e inversas, derivadas de orden superior, teoremas sobre las funciones derivables, aplicación de la derivada al cálculo de límites de formas indeterminadas, regla de L'Hôpital, interpretación de la primera y segunda derivada, puntos extremos y puntos de inflexión, condiciones de existencia de esos puntos, aplicación de la derivada al trazado de curvas y aplicación de la derivada a problemas de optimización. El libro de texto que está asignado para esta asignatura es Ballester (2007).

Las derivadas de funciones reales de una variable real y sus aplicaciones deben permitir que el alumno: amplíe su madurez matemática y su capacidad de trabajo con las abstracciones; desarrolle habilidades para la comunicación y comprensión de propiedades y características matemáticas de magnitudes y formas en las variantes formal, gráfica, numérica y verbal; identifique, interprete y analice modelos matemáticos de procesos técnicos, económicos, productivos y científicos vinculados a su carrera, así como resuelva los problemas de índole matemática a los que estos conducen, con la utilización de los contenidos matemáticos que se estudian en el tema y con el uso eficiente de las técnicas modernas de cómputo y de los Asistentes Matemáticos; formen un sistema de conocimientos y habilidades de carácter profesional y científico-técnico, así como la habilidad de aplicar los mismos de manera independiente y creadora a la solución de problemas concretos de su perfil profesional, mediante la utilización de los métodos del Análisis Matemático; logre una sólida base de conocimientos, integrada y sistémica, que deje huella en su proceso de aprendizaje y le permita resolver problemas con los recursos y estrategias estudiadas y aprenda a pensar y actuar de forma creadora.

Este conjunto de clases tiene como objetivo que los estudiantes: apliquen los conceptos y teoremas estudiados en las derivadas de funciones reales de una variable real y sus aplicaciones para analizar las propiedades de las funciones y trazar su gráfica; resuelvan problemas de optimización que se modelen con la utilización de los métodos del Cálculo Diferencial de las funciones de una variable real; profundicen en el uso de las TIC como un recurso para mejorar su aprendizaje, mediante el empleo del Asistente Matemático DERIVE, el tabulador electrónico Microsoft Excel o el Matemathic para el análisis de propiedades de las funciones y su representación grafica, utilizándose la computadora como medio de aprendizaje y herramienta de trabajo; desarrollen la capacidad de razonamiento y las formas de pensamiento lógico, mediante la utilización de elementos de la lógica y las demostraciones matemáticas, para la comprensión y demostración de propiedades y teoremas relativos al tema; asuman una concepción científica del mundo al interpretar los conceptos y teoremas de las derivadas que se estudian en el tema como resultados de las ciencias matemáticas, que son un reflejo de la realidad material existente objetivamente y cómo la historia de las matemáticas ha estado esencialmente vinculada con las necesidades de la vida material de la sociedad; desarrollen la motivación por aprender a partir de la ejecución de diferentes tareas que requieran una constante búsqueda de nuevas fuentes de información y de conocimiento.

Dolores (2000) refiere que los estudiantes después de un curso de cálculo diferencial tienen cierto dominio de los algoritmos, sin embargo refieren problemas significativos en conceptualizaciones y resolución de problemas de aplicación del concepto de derivada.

Los objetivos de la asignatura a partir de la concepción del modelo de enseñanza basada en una estructuración sistémica de los contenidos contribuyeron al planteamiento del siguiente problema conceptual metodológico: ¿Cuáles recomendaciones didácticas emplear para desarrollar los nuevos contenidos relacionados con las derivadas de funciones reales de una variable real y sus aplicaciones? Por consiguiente, demostrar, a través del conjunto de recomendaciones didácticas, cómo desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los nuevos contenidos de las derivadas de funciones reales de una variable real y sus aplicaciones; se define como el objetivo metodológico de esta investigación.

Disímiles autores han tratado esta problemática a partir del diagnóstico de insuficiencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y en especial de la temática derivadas de funciones pero no se han enfocado a las aplicaciones, además las estrategias didácticas no son planteadas de manera que permitan la generalización a otros resultados de la propia matemática.

Moreno (2005) reitera que la enseñanza del cálculo resulta bastante problemática. Aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a realizar algunas derivadas, tales acciones están muy lejos de una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas.

En referencia a la enseñanza del cálculo diferencial, Sánchez Matamoros et al., (2008), mencionan múltiples investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje del lenguaje variacional y del cálculo diferencial e integral, señalando que tales investigaciones aunadas a la experiencia como profesores de cálculo, les han permitido comprobar la dificultad de enseñar y aprender tales conceptos.

Para poder abordar las temáticas planteadas se dividió el presente análisis en cuatro apartados: extremos de funciones, análisis de propiedades geométricas de las funciones, construcción del gráfico de funciones y resolución de problemas de optimización.

2. EXTREMOS DE FUNCIONES

El tratamiento de teoremas y demostraciones es una labor didáctica relevante para la consecución de los objetivos de la enseñanza de la matemática, en este caso podemos mencionar profundizar en el tratamiento previo del teorema de Fermat, identificar diferentes formulaciones equivalentes, formación de recíprocos, negaciones y contraposiciones, lograr una mayor interpretación y sistematizar premisas o tesis similares para contribuir al reconocimiento de relaciones entre teoremas se orientan ejercicios basados en la comprensión del enunciado y su reconocimiento en diversas circunstancias.

2.1 Teorema de Fermat

Si la función f tiene un máximo o mínimo local en el punto c y si existe $f'(c)$, entonces $f'(c) = 0$.

Recomendaciones didácticas

1. Tarea: Enunciar y demostrar la siguiente propiedad no tratada en Ballester (2007), como aseguramiento de las condiciones previas para el tratamiento del teorema de Fermat.
   Propiedad:
   Si la función f es derivable en el punto c y $f'(c) > 0$ o $f'(c) = +\infty$, entonces existe un entorno del punto c tal que:
   $$f(x) > c \quad \text{para} \quad x > c \quad \text{y} \; f(x) < c \quad \text{para} \quad x < c.$$
   Que resulta una variante generada a partir del teorema 5.7 de Apóstol (1961, p.91) y del teorema 8.9 de Llin y Pozniak (1991, p.247).

2. Indicar que en su estudio independiente realicen la demostración cuando $f'(c) < 0$ o $f'(c) = -\infty$
3. Transmitir información de interés, relativa a la vida de Pierre Fermat:

   El teorema de Fermat es un teorema del análisis real llamado así en honor a Pierre Fermat Beaumont-de-Lomagne (17 de agosto de 1601 al 12 de enero de 1665), jurista y matemático Francés, de la región de Castre, quien enunció por primera vez este teorema en 1637. Hablante fluido en seis idiomas (francés, latín, occitano, griego clásico, italiano y español). Comunicó la mayor parte de su trabajo en cartas a amigos, a menudo con poca o ninguna prueba de sus teoremas. En algunas de estas cartas a sus amigos, exploró muchas de las ideas fundamentales del cálculo antes que Newton o Leibniz. Fermat era un experto abogado que hacía de las matemáticas más un pasatiempo que una profesión por lo que fue denominado por el historiador de matemáticas escocés, Eric Temple Bell, con el apodo de «príncipe de los aficionados». Sin embargo, hizo importantes contribuciones a la geometría analítica, la probabilidad, la teoría de números y el cálculo (Ríbnikov, 1991).

   La incorporación de elementos de la historia de la matemática a los procesos de enseñanza-aprendizaje, permite visualizar el íntimo e innegable vínculo que existe entre esta disciplina científica y la dinámica socio-cultural humana y promueve un cambio de actitud y de creencias hacia la matemática. Es esencialmente una actividad, por lo tanto, su conocimiento es contextual y no puede desligarse de su condicionamiento social e histórico. Ayuda a explicar y superar obstáculos epistemológicos, frente a algún concepto matemático que es especialmente difícil de comprender para el estudiante porque ayuda a menudo a explicar las incomprensiones que presentan los alumnos en torno a dicho concepto. La historia de la matemática puede representar un valioso recurso en la construcción de necesarias estrategias para formar estudiantes reflexivos y críticos.
4. Por la importancia teórica y práctica de este teorema, se recomienda su demostración en la clase.
5. En la demostración del teorema, propiciar el diálogo con los estudiantes, para su comprensión de que para establecer la veracidad del teorema, basta combinar la propiedad anterior con la definición de máximo (mínimo) local.
6. A través del diálogo establecido, lograr que los alumnos enuncien el recíproco del teorema.
7. Resolver, con la participación de sus alumnos, los ejemplos siguientes.
   - Ejemplo 1: La función $f(x) = x^3$, para cuestionar la validez del teorema de Fermat, hasta que se llegue a la conclusión de que el recíproco del teorema no es válido.
   - Ejemplo 2: La función $f(x) = |x|$, que tiene un mínimo para $x = 0$ (ilustrarlo gráficamente), pero $f'(0)$ no existe. No se cumple una de las premisas del teorema, sin embargo es válida la tesis.
8. Indicar a sus alumnos que enuncien el contrarrecíproco del teorema y que se refieran a su valor de verdad.
9. Señalar a sus estudiantes la importancia práctica del teorema de Fermat (la primera acción de un procedimiento para la determinación de extremos absolutos de una función)

10. Elaborar, apoyándose de un diálogo con los estudiantes, un procedimiento didáctico para la determinación de los extremos absolutos de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$.
   1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en $]a, b[$.
   2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
   3. El mayor de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto, el más pequeño, es el mínimo absoluto.

11. Realizar en la clase de forma conjunta con los alumnos los ejemplos:
   a) Ejemplo 9 de Ballester (2007, p.282).

$$f(x) = x - 2.sen\ x \qquad\qquad 0 \le x \le 2\pi$$

   b) Ejemplo 10 de Ballester (2007, p.283).

El 24 de abril de 1990, el transbordador espacial Discovery desplegó el telescopio espacial Hubble. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esa misión, desde el despegue en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprendieran en $t = 26$, se expresa mediante la función $V(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$ $\left(\frac{m}{s}\right)$.

Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absoluto de la aceleración del trasbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares.

Este ejemplo debe ser aprovechado por el profesor para: contextualizar los contenidos matemáticos, vincular la matemática con la física y aplicar el procedimiento para la determinación de los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado, en trabajo conjunto con los estudiantes

$A(t) = 0;03906t^2 - 0,18058t + 23,61$ definida en el intervalo [a, b] = [0, 26].

Respuesta: La aceleración máxima es 62,87 $\frac{m}{s}$ y se alcanza a los 26 segundos y la aceleración mínima es 21,52 $\frac{m}{s}$ lográndose la misma aproximadamente a los 23,12 segundos.

3. TEOREMAS DEL VALOR MEDIO (TVM)

3.1. Teorema de Rolle

Sea f una función que satisface las tres premisas siguientes:

- (i) f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
- (ii) f es derivable en el intervalo abierto $]a, b[$.
- (iii) $f(a) = f(b)$

Entonces existe c $\in\ ]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Recomendaciones didácticas

Indicar a los profesores que en la clase:

1. Transmitan información de interés, relativa a la vida del matemático Michael Rolle:

   Michael Rolle nació el 21 de abril de 1652 en Ambert, Basse-Auvergne, Francia y falleció el 8 de noviembre de 1719 en Paris. Matemático autodidacta. Publicó por primera vez el teorema de Rolle en 1691 en su libro titulado Méthode pour résoudre les égalitéz. Sin embargo, después se volvió crítico de los métodos de su época y atacó al cálculo infinitesimal tachándolo de ser "un conjunto de falacias ingeniosas". También inventó la notación $\sqrt[n]{x}$ para designar la enésima raíz de x. En Economía, el Teorema de Rolle demuestra la veracidad de la Curva de Laffer: relación existente entre los ingresos fiscales y los tipos impositivos que muestra cómo varía la recaudación fiscal al modificar los tipos impositivos. Esta curva fue difundida por el economista Arthur Laffer, aunque seis siglos antes el economista norteafricano Ibn Jaldún (1332-1406) ya había teorizado sobre la relación entre los tipos impositivos y la recaudación. También John M. Keynes lo había hecho unos pocos años antes que Laffer (Ríbnikov, 1991).
2. Pregunten la estructura del teorema desde el punto de vista de la lógica matemática, precisándose su premisa y su tesis.
3. Planteen la interrogante: ¿Si en la condición (iii) se cumple en particular que $f(a) = f(b) = 0$, puede inferirse de ello alguna conclusión teórica?
4. Muestren el siguiente ejemplo:

   Ejemplo: sea $s = f(t)$ la función de posición de un objeto en movimiento. Si el objeto se encuentra en el mismo lugar en dos instantes diferentes $t = a$ y $t = b$, entonces $f(a) = f(b)$. El teorema de Rolle asegura que hay un momento $t = c \in]a; b[$ en que $f'(c) = 0$ esto es, cuando la velocidad es cero.
5. Para profundizar los conocimientos de los profesores acerca del teorema de Rolle, se les informará que la premisa (ii) de este teorema puede extenderse al caso en que exista la derivada infinita de signo determinado. Esta condición no puede ser debilitada.

   Ejemplo: para $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ para $-1 \leq x \leq 1$

4. TEOREMA DE LAGRANGE (TEOREMA DEL VALOR MEDIO)

Sea f una función que satisface las dos premisas siguientes:

- (i) f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
- (ii) f es derivable en el intervalo abierto $]a, b[$.

Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Recomendaciones didácticas

6. Precisar en la clase, algunos datos del matemático Joseph Louis Lagrange.

Joseph Louis Lagrange nació en Turín, Italia, el 25 de enero de 1736 y falleció en París, Francia, el 10 de abril de 1813. Fue un físico, matemático y astrónomo italiano, que después de formarse en su Italia natal pasó la mayor parte de su vida en Prusia y Francia. De padre francés y madre italiana, fue un niño prodigio, profesor en Turín a los 19 años. Realizó grandes aportaciones a la teoría de los números, a la teoría de funciones, a la teoría de ecuaciones, así como a la mecánica analítica y celeste, en particular aplicó el cálculo al análisis de la Estabilidad del sistema solar. Por invitación de Federico el Grande, sustituyó a Euler en la academia de Berlín y cuando murió Federico, aceptó una invitación del rey Luis XVI de ir a Paris, donde se le asignaron departamentos en el Louvre. Fue un hombre bondadoso y tranquilo, que sólo vivió para las ciencias (Líbnikov, 1991).

7. Llamar la atención a sus estudiantes en cuanto a las premisas del teorema de Rolle y de Lagrange, para que lleguen a la conclusión de que el primero es un caso particular del segundo.

8. Por la importancia de este teorema y dado que en su demostración se pone en evidencia una herramienta matemática efectiva en la resolución de problemas (reducción del problema a uno de solución conocida), se realizará su demostración en trabajo conjunto con sus estudiantes.

¿Es posible construir a partir de la función f una nueva función g que satisfaga las premisas del teorema de Rolle? El docente propondrá la función

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

e indicará a sus alumnos que verifiquen que ésta satisface las tres premisas del teorema de Rolle. Después de comprobadas dichas premisas, solicitará que enuncien la tesis de dicho teorema:

Por lo tanto, existe $c \in]a; b$ tal que $g'(c) = 0$, y a partir de este resultado continuará

el dialogo iniciado para obtener que $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ luego dado que $g'(c)$ se obtiene

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

9. Los estudiantes manifiestan casi siempre que no se les hubiese ocurrido construir tal función, lo que el profesor debe aprovechar este comentario para formular la siguiente pregunta.¿La forma de construir esta función es única? Mostrará una nueva función: m $(x) = f(x)$ $[b, a]$ − x. $[f(x) - f(a)]$ y e indicará a los alumnos que en el estudio independiente, comprueben que esta función satisface las premisas del teorema de Rolle.

10. Realizar en clase el siguiente ejemplo

Ejemplo 1:

Si un objeto se mueve en línea recta y su función de posición es $s = f(t)$ la velocidad

media entre $t=a$ y $t=b$ es $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y la velocidad en el momento $t=c\in\,]a,b[$ es $f'(c)$ Así el teorema del valor medio nos dice que en algún momento $t=c\in\,]a,b[$ la velocidad instantánea es igual a la velocidad media $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ por ejemplo, si un automóvil recorriera 180 km en 2h, el velocímetro debería indicar al menos una vez, 90 $^{km}\!/_{h}$

11. Insistir en la clase que el teorema del valor medio de Lagrange permite obtener datos en torno a una función, a partir de información sobre su derivada:

Ejemplo 1:

Si $f(0) = -3$ y $f'(x) \leq 5$ para todos los valores de x. ¿Qué tan grande puede ser $f(2)$? Respuesta: $f(2) \leq 7$.

12. Indicar que el teorema del valor medio es una herramienta eficaz para demostrar igualdades y desigualdades:

Ejemplo 1**:** Demostrar que $arc\tan x + arc\cot x = \dfrac{\pi}{2}$.

Ejemplo 2: Demostrar que $|arc\tan x_1 - arc\tan x_2| \leq |x_1 - x_2|$, para todo $x_1; x_2$.

5. Teorema de Cauchy (fórmula generalizada de los incrementos finitos)

Sean f y g dos funciones que satisfacen las dos premisas siguientes:

- (i) Continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$
- (ii) Derivables en el intervalo abierto $]a, b[$ y $g'(x) \neq 0$ para toda $x \in\,]a, b[$.

Entonces existe un número tal que $c \in\,]a, b[$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Recomendaciones didácticas

13. Conducir a los estudiantes para que reconozcan que cuando tanto la premisa como la tesis del el teorema de Cauchy, coinciden con las del teorema de Lagrange, por lo tanto éste ultimo es un caso particular del teorema de Cauchy.

14. Mostrar que el teorema de Cauchy no puede ser demostrado a partir del el teorema de Lagrange.

Aplicándose el teorema de Lagrange a las funciones f y g se tiene que:

Existe tal que $c_1 \in\,]a, b[$ tal que $f'(c_1) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Existe tal que $c_2 \in \,]a, b[$ tal que $g'(c_2) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$.

Por lo tanto $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$; pero en general $c_1 \neq c_2$.

15. Como no es posible usar el teorema de Lagrange, entonces debe preguntarse:

¿Con las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se puede construir una nueva función $h(x)$ que satisfaga las premisas del teorema de Rolle?:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\left[g(x) - g(a)\right].$$

16. Indicar a los estudiantes que comprueben que esta función satisface las premisas del teorema de Rolle.

17. Preguntar ¿La forma de construir esta función es única? Orientar a los alumnos que comprueben que la función $r(x) = f(x)\left[g(b) - g(a)\right] - g(x)\left[f(x) - f(a)\right]$ satisface las premisas del teorema de Rolle.

18. Destacar la importancia del teorema de Cauchy como fundamento de la regla de L'Hôpital.

19. Recomendar no se siga el orden dado en Ballester (2007): análisis de propiedades geométricas de las funciones, y pasar a tratar el contenido relacionado con las formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital.

20. Informar a los alumnos datos históricos relacionados con el creadores del teorema de Cauchy y de la regla de L'Hôpital.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857): Nacido en Francia. Terminó en el año 1807 la Escuela Politécnica en Paris. Hasta el año 1813 trabajó como ingeniero en el Instituto de vía de comunicación. En el año 1816 fue nombrado miembro de la Academia y profesor de la Escuela Politécnica. A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX, las obras de un gran número de matemáticos reflejaban ya, con diferente grado de resolución y consecuencias, la necesidad objetiva de construcción de la teoría de límites como base del análisis matemático y una reconstrucción radical de este último. Los mayores méritos en la realización de esto pertenecen a Cauchy. La producción científica de Cauchy fue excepcional, los biógrafos calculan 789 trabajos publicados por él (Ríbnikov, 1991).

Esta regla se publicó por primera vez en 1696 por el matemático francés del siglo XVII Guillaume François Antoine, marqués de L'Hôpital (1661 - 1704), pero fue descubierta en 1694 por el matemático suizo Johann Bernoulli. La explicación es que ambos habían entrado en un curioso arreglo de negocios por medio del cual el marqués de L'Hôpital compró los derechos de los descubrimientos matemáticos de Johann Bernoulli (Ríbnikov, 1991).

21. No hacer la demostración de la regla de L'Hôpital. Orientarla como estudio independiente a los estudiantes (la totalidad de los alumnos analizarán el caso simple que es cuando $f(a) = g(a) = 0$, f' y g' continuas y $g'(a) \neq 0$. Esta demostración aparece en Ballester (2007, 307). Para los alumnos aventajados, además de lo anterior se indica estudiar la demostración para el caso más general, el cual aparece en el apéndice F de Ballester (2007, A48-A49).

6. ANÁLISIS DE LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LAS FUNCIONES

Recomendaciones didácticas

1. Realizar la motivación del epígrafe.
2. Para su tratamiento dividir el epígrafe en tres secciones 2.1 (información sobre la primera derivada), 2.2 (información sobre la segunda derivada) y 2.3 (información sobre las derivadas de orden superior). Forma novedosa para el tratamiento de las propiedades geométricas de las funciones.

6.1 ¿Qué revela la primera derivada $f'(x)$ respecto a la función $f(x)$?

3. Informar a los profesores que en el epígrafe 4.16 de Spivak (1996, 228) se destaca la más importante relevancia del teorema del valor medio de Lagrange.
Teorema: (Monotonía de funciones derivables)
Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que admite derivada en el intervalo abierto $]a, b[$. Se tiene entonces que:
- **a)** Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in\ ]a, b[$, f es estrictamente creciente en el intervalo cerrado $[a, b]$
- **b)** Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in\ ]a, b[$, f es estrictamente decreciente en el intervalo cerrado $[a, b]$

3. El profesor debe demostrar la parte (a) para lo que debe tener en cuenta:
- **a)** Precisar a través del diálogo con los alumnos la definición de función monótona creciente en sentido estricto, para llegar a que debe demostrarse que $f(x) < f(y)$ siempre que $a \leq x < y \leq b$.
- **b)** Indicar a los estudiantes que se aplicará el teorema del valor medio de Lagrange a la función f en el intervalo $[x, y]$ de lo que resulta:

$f(y) - f(x) = f'(c)\,(y - x)$ para $c \in\ ]x, y[$. Como $f'(c) > 0$ y $(y - x) > 0$ se tiene que $f(y) - f(x) > 0$; por lo que $f(x) < f(y)$

- **c)** Orientar a los alumnos el estudio independiente de la demostración de la parte (b).

Teorema: (Primera condición suficiente de existencia de extremos relativos funciones derivables)
5. Enunciar la primera parte del teorema:
Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que admite derivada en el intervalo abierto $]a, b[$ excepto quizás en un punto c de dicho intervalo. Se tiene entonces que:

a) Si $f'(x)$ para toda y para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > c$ entonces f tiene un máximo relativo en el punto c.

6. Demostrar la parte (a), realizándose las siguientes acciones con los alumnos:

a) Preguntar el concepto de máximo relativo.

b) Llamar su atención que con la aplicación del teorema precedente es inmediato que es estrictamente creciente en el intervalo cerrado $[a, c]$ y que es estrictamente decreciente en el intervalo cerrado $[c, b]$ luego $f(x) < f(c)$ para toda $x \neq c$ con lo que f tiene un máximo relativo en $x = c$.

7. Para la parte (b) el profesor debe:

a) Lograr que los estudiantes enuncien esta parte del teorema:
Si $f'(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ entonces f tiene un mínimo relativo en el punto c.

b) Indicar a los alumnos como trabajo independiente que demuestren la misma.

8. La parte (c) el profesor debe enunciarla y ejemplificarla en el aula: si $f'(x) > 0$ ó $f'(x) < 0$ para toda $x \neq c$ entonces f no tiene extremo relativo en el punto c.
Ejemplo: $f(x) = x^3$.

9. Mediante el trabajo conjunto entre el profesor y los alumnos elaborar un Procedimiento didáctico para la determinación de los extremos locales de una función, no concebido en Ballester (2007).

- Hallar la primera derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$.
- Determinar los puntos donde $f'(x)$ y donde $f'(x)$ no existe, pero que la función sea continua en ellos.
- Ubicar estos puntos en una recta numérica y analizar el signo de la derivada $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de estos puntos, si hay cambio de signo, entonces para ese punto se alcanza un extremo relativo. Si no hay cambio de signo para ese punto no se alcanza extremo.
- Si a la izquierda del punto, el signo de la derivada es positivo y a su derecha es negativo, entonces en ese punto se alcanza un máximo local. Señalar también cuado se alcanza un mínimo relativo.
- Para obtener los extremos, evaluar la función para los puntos donde se alcanzan estos.

10. Aprovechar el procedimiento anterior para conjuntamente con los alumnos construir un procedimiento para analizar la monotonía de una función.

6.2 ¿Qué revela la segunda derivada $f''(x)$ respecto a la función $f(x)$?

11. Informar a los estudiantes que se establecerá la analogía entre los resultados obtenidos con la primera derivada (monotonía y extremos), con los que aportará la segunda derivada.

12. Aunque no están en Ballester (2007), darle tratamiento a los dos teoremas siguientes, indispensables para el desarrollo de habilidades que deben alcanzar los estudiantes.

Teorema: (Concavidad de funciones) (el análogo con el de monotonía).

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que admite hasta segunda derivada en el intervalo abierto $]a, b[$. Se tiene entonces que:

a) Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in]a, b[$ entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo cerrado $[a, b]$.

b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in]a, b[$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Teorema: (Condición necesaria de existencia de punto de inflexión)
Si c es un punto de inflexión de la función f y si $f''(c)$ existe, entonces $f''(c) = 0$.

13. Lograr que los alumnos reconozcan que este teorema es similar al teorema de Fermat (condición necesaria de existencia de extremos)

Teorema: (Primera condición suficiente de existencia de puntos de inflexión para funciones dos veces derivables)(análogo con la condición suficiente de existencia de extremos)

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ que admite hasta segunda derivada en el intervalo abierto $]a, b[$ excepto quizás en un punto c de dicho intervalo. Se tiene entonces que:

- Si $f''(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f''(x) < 0$ para toda $x > c$ ó $f''(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f''(x) > 0$ para toda $x > c$ entonces $(c; f(c))$ es un punto de inflexión de la función $f(x)$.

14. Con la colaboración de sus alumnos elaborar un procedimiento didáctico para la determinación de los puntos de inflexión de la gráfica de una función, no concebido en Ballester (2007, 282).

- Hallar la segunda derivada $f''(x)$ de la función $f(x)$.
- Determinar los puntos donde $f''(x) = 0$ y donde $f''(x)$ no existe, pero que la función sea continua en ellos.
- Ubicar estos puntos en una recta numérica y analizar el signo de la segunda derivada $f''(x)$ a la izquierda y a la derecha de estos puntos, si hay cambio de signo, entonces para ese punto se alcanza un punto de inflexión. Si no hay cambio de signo para ese punto no se alcanza extremo.
- Para obtener los puntos de inflexión, evaluar la función para los puntos donde se alcanzan estos.

15. Aprovechar el procedimiento anterior para conjuntamente con los alumnos construir un procedimiento para analizar la concavidad de una función.

16. Informar a los estudiantes que también la segunda derivada de la función revela una condición suficiente para la determinación de extremos de una función, al menos dos veces derivable.

Teorema: (Segunda condición suficiente de existencia de extremos relativos funciones derivables)

Sea $f''(x)$ es continua en una vecindad del punto c y tal que $f'(c) = 0$.

a) Si $f''(c) > 0$, entonces f alcanza un mínimo local para $x =$ c.

b) Si $f''(c) < 0$, entonces f alcanza un máximo local para $x =$ c.

16. A los estudiantes interesados en profundizar en esta temática, indicarle el estudio de los dos teoremas que pueden encontrarse en (Llin y Pozniak, 1991, 301-304).

6.3 Generalizaciones

Teorema: (Segunda condición suficiente de puntos de inflexión)

Si en el punto c se tiene que $f'''(c) = 0$ y $f^{(IV)}(c)$ existe, entonces para c se alcanza un punto de inflexión.

Teorema: (tercera condición suficiente de existencia de extremos relativos y puntos de inflexión)

Sean $n \geq 1$ y la función $y = f(x)$ que tiene derivada de orden n en un entorno del punto c y además $f^{(2)}(c) = f^{(3)}(c) = \ldots\ldots = f^{(n)}(c) = 0$; $f^{(n+1)}(c) \neq 0$. Entonces:

a) Si n es par, la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene inflexión en el punto $M(c; f\ (c))$

b) Si n es impar, la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene un extremo en el punto $M(c;$ $f\ (c)$ más exacto, mínimo local si $f^{(n+1)}(c) > 0$ y máximo local.

Si $f^{(n+1)}(c) < 0$.

7. CONSTRUCCIÓN DEL GRÁFICO DE FUNCIONES

Recomendaciones didácticas

1. Precisar a sus alumnos que saber graficar funciones es uno de los objetivos esenciales del programa de la asignatura ya que es parte de las habilidades que debe aportar la matemática en la formación de los ingenieros.
2. Con la ayuda de los alumnos elaborar un procedimiento didáctico para la graficación de funciones (perfeccionamiento del indicado en Ballester (2007)).
   - Hallar el dominio de la función.
   - Analizar la simetría de la función (paridad, imparidad, periodicidad), sus interpretaciones geométricas y cómo facilitará cada una de ellas, la construcción de la curva.
   - Determinar la intersección de la gráfica de la función con los ejes coordenados.
   - Encontrar las regiones del plano donde la función es positiva y donde es negativa.
   - Calcular las asíntotas del gráfico de la función (asíntotas verticales, oblicuas y horizontales).
   - Obtener otros puntos del gráfico de la función a partir de escoger determinados valores de su dominio y para ellos hallar su imagen.
   - Trazar un sistema de coordenadas rectangulares y reflejar en él los elementos obtenidos en los pasos anteriores, hasta lograr un esbozo del gráfico de la función.
   - Hallar los intervalos de monotonía de la función.
   - Determinar los extremos relativos de la función.
   - Obtener los intervalos de concavidad de la función.
   - Encontrar los puntos de inflexión de la función.
   - Trazar nuevamente un sistema de coordenadas rectangulares y reflejar en él los elementos de los pasos del 1 al 6, así como los encontrados en los pasos del 8 al 11.

- Usar el asistente matemático DERIVE para trazar el gráfico de la función con auxilio de la computadora y comparar el mismo con el elaborado de forma manual.

3. Para que los alumnos se apropien del procedimiento anterior, realizar un conjunto de ejemplos, de los más simples a los más complejos y además, en cada uno lograr mayor independencia cognoscitiva respecto al anterior. Hacer una selección de ejemplos para lograr esos fines, son adecuados los ejemplos desarrollados en Ballester (2007).
4. Indicar a los estudiantes que con el uso del Asistente Matemático DERIVE, grafiquen las funciones que fueron tratadas en los ejercicios anteriores para comparar los gráficos con los hechos de forma manual.

8. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Recomendaciones didácticas

1. Transmitir a sus alumnos que muchos problemas de Optimización pueden resolverse mediante el uso del Cálculo Diferencial. En realidad desde el punto de vista histórico los rudimentos del cálculo diferencial en principio fueron desarrollados por Fermat, que intentó encontrar métodos generales para determinar máximos y mínimos.

   Dos clásicos problemas de optimización son:

   - Principio del producto máximo con suma constante: Dado un número positivo S**.** Entre todos los pares de números positivos x, y tales que $x + y = S$, el producto x, y es mayor cuando $x = y = \frac{S}{2}$**.**
   - Principio de la suma mínima con producto constante: Dado un número positivo P**.** Entre todos los pares de números positivos x, y tales que $x \,.\, y = P$, el que hace la suma $x + y$ mínima es cuando $x = y = \sqrt{P}$.

2. Informar a los alumnos que los métodos que han aprendido para hallar extremos de funciones, tienen aplicaciones prácticas en muchas esferas de la vida. Sin embargo, el desafío más grande suele ser convertir el problema dado en lenguaje natural, en un problema matemático de optimización, es decir, establecer la función que debe maximizarse o minimizarse.
3. Indicar un procedimiento didáctico para la solución de problemas de optimización (Se perfecciona el indicado en Ballester (2007)).
   1. Comprender el problema**:** Leer cuidadosamente el problema varias veces, hasta que se entienda con claridad. Hacerse las preguntas siguientes: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas?. ¿Cuáles son las condiciones dadas? ¿Cuáles son las cantidades buscadas?.
   2. Dibujar un diagrama: en la mayoría de los problemas, resulta útil dibujar un diagrama e identificar en el las cantidades dadas y las buscadas. Las palabras

como qué, encontrar, cuánto, dónde o cuándo suelen estar asociadas a las cantidades desconocidas.

3. Declarar las variables: asignar una variable a la cantidad que se va a maximizar o minimizar (llamémosla Q). Asimismo, seleccionar variables (x, y, z) para las otras cantidades desconocidas y marcar el diagrama con esas variables.
4. Expresar a Q en función de algunas de las variables x, y, z.
5. Si en el paso anterior se ha expresado Q como función de más de una variable, utilizar la información dada para hallar relaciones (en la forma de ecuaciones) entre estas variables. A continuación usar estas ecuaciones para en la expresión Q eliminar todas las variables, excepto una. De esta forma Q se expresará como función de una sola variable, digamos $Q = f(x)$. Escribir el dominio de esta función.
6. Aplicar uno de los procedimientos estudiados para hallar el valor máximo o el valor mínimo de la función f.
7. Comprobar lo resultados.
8. No desanimarse si no puede resolver algún problema. Adquirir habilidad para resolver problemas necesita una gran cantidad de esfuerzo y práctica. ¡Hay que seguir intentándolo!

4. Para que los alumnos se apropien de este procedimiento, el docente debe: Analizar varios ejemplos en las clases a través del trabajo conjunto entre él y los alumnos. En Ballester (2007, 330-334) se desarrollan cinco ejemplos adecuados para ello. Con cada ejemplo, primeramente se indicará como paso inicial su lectura en silencio por parte de los estudiantes. Posteriormente, el docente comprobará a través de preguntas la comprensión del problema y sucesivamente conducirá la ejecución de cada uno de los pasos del procedimiento. Si no se dispone del tiempo necesario para el análisis de todos los ejemplos, se indicará como trabajo independiente su estudio.

CONCLUSIONES

En total se han planteado 56 recomendaciones didácticas, las de mayor significación permiten simplificar aún más la enseñanza-aprendizaje de los problemas de optimización a través de la búsqueda de extremos utilizando los procedimientos descritos.

El logro de una clase dinámica en el uso de las TIC en estos procedimientos novedosos contribuye al logro de los objetivos relacionados con una mejor apreciación en el cálculo de extremos.

La inclusión en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las recomendaciones didácticas genera dinámicas de interacción en las que el profesor y el grupo de alumnos trabajan unidos en la construcción del aprendizaje.

De esta manera, **los alumnos adquieren un papel activo, desarrollando un sentido de responsabilidad** frente a su aprendizaje. Además, el desarrollo de la autonomía del alumno favorece la creación de estrategias de aprendizaje propias, las cuales podrá aplicar también a otras áreas similares, generando en él sentimientos de autosuficiencia y utilidad.

Finalmente, si se realiza un correcto desarrollo de las estrategias didácticas, el educador conseguirá optimizar la adquisición de los conocimientos, favoreciendo el aprendizaje en los alumnos de aquellas habilidades o competencias que se hayan preestablecido como importantes.

El trabajo en detalles con la demostración de teoremas contribuyó a la perdida del temor de los estudiantes a este tipo de tarea tan compleja y por las habilidades alcanzadas permite proyectar los objetivos a profundizar en los métodos de demostración en la matemática.

La actitud reflexiva y crítica de los estudiantes se acentúa con el intercambio acerca de la historiografía de matemáticos y sus obras permitiendo lograr un razonamiento más interpretativo en el interés por la matemática, la demostración de teoremas y la obtención de resultados.

La modelación de problemas en ecuaciones matemáticas y el cálculo de los extremos mejoran considerablemente siempre que los estudiantes complementen el procedimiento perfeccionado con la guía especializada del docente.

REFERENCIAS

Aldana, F., Mora-B, C., Ricaño, H, F. Álvarez S. E. López V., Navarro, P. J. Solórzano, H. R., Ramírez R.García A. M. Hernández F. M. Rosas M. E. (2016*). Identificación de las causas de reprobación en la facultad de ingeniería mecánica eléctrica región Xalapa de la Universidad Veracruzana.* Disponible en : http://www.divergencias.com.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=223:identificacion-de-las-causas-de-reprobacion-en-la-facultad-de-ingenieria-mecanica-electrica-region-xalapa-de-la-universidad-veracruzana&catid=115:ciencias -sociales&Itemid=363.

Apostol, T. M. (1961). *Calculus I*. New York, Estados Unidos de Norteamérica: Blaisdell.

Ballester, S. (Ed.). (2007). *Matemática superior I.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Dolores C. (2000). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. El futuro del cálculo infinitesimal*. Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F.

Llin, V. y Pozniak, E. (1991). *Fundamentos del análisis matemático 1*. Moscú, URSS: Mir.

Llorens, J. L. (1995). *Introducción al uso del DERIVE: aplicaciones al algebra y al cálculo.* Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo. Evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 81-96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Ríbnikov, K. (1991). *Historia de las matemáticas.* Moscú, URSS: Mir.

Sánchez–Matamoros, G., García M., Llinares S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11*(2), 267-296.

Spivak, M. D. (1996). *Cálculo infinitesimal*. New York, Estados Unidos de Norteamérica: Reverté.

Velazco, M. y Mosquera. (2010). Estrategias didácticas para el aprendizaje colaborativo. PAIEP. Recuperado de http://acreditacion.udistrital.edu.co/flexibilidad/estrategias_didacticas_apren dizaje_colaborativo.pdf.