Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2020, nº 104, 25-43*

Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas asociado al concepto de proporcionalidad: un estudio de caso a través del modelo MTSK

Camilo Fuentes Leal
Universidad de huelva

Resumen: *Se muestra una experiencia de un estudio de caso de una profesora en un colegio público de Bogotá donde se indagó sobre el conocimiento especializado del profesor con respecto a la enseñanza de la proporcionalidad por medio del modelo MTSK, para esto se hizo uso de técnicas de recolección y sistematización de información como la transcripción de las clases, entrevistas y toma de fotografías, y como medios de análisis de la información la triangulación de instrumentos y la triangulación de especialistas. Con base al análisis cronológico de episodios, asociando unidades de información con las categoría del modelo y estableciendo relaciones entre estos, observando una preeminencia de los. Algunas conclusiones están asociadas con la preeminencia de conocimiento del tema (KoT) y la relación entre subdominio con el KMT y KFLM.*
Palabras clave: *Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK), Pensamiento proporcional, Estudio de caso.*

Specialized knowledge of a mathematics professor associated with the concept of proportionality: a case study through the mtsk model

Abstract: *An experience from a case study of a teacher in a public school in Bogotá, where the specialized knowledge of the teacher regarding the teaching of proportionality using the MTSK model, for this, information collection and systematization techniques were used, such as the transcription of classes, interviews and photography, and as a means of analyzing the information, triangulation of instruments and triangulation of specialists. Based on the chronological analysis of episodes, associating information units with the categories of the model and establishing relationships between them, observing a preeminence of the. Some conclusions are associated with the pre-eminence*

of the knowledge of topic (KoT) and the relationship between subdomain with the KMT and KFLM.
Keywords: *Specialized knowledge of the Mathematics teacher (MTSK), Proportional thinking, Case study.*

1. INTRODUCCIÓN

El presente documento es resultado de una investigación doctoral en la cual se indagó sobre el conocimiento especializado con respecto a la enseñanza de la proporcionalidad. Dada la importancia de este concepto, es necesario tener en cuenta que la comprensión de la proporcionalidad como un proceso extenso y complejo, el cual es construido a lo largo de todo el proceso educativo; autores como Block (2001, 2006), Rivas, Godino y Castro (2012), Valverde (2013), Rivas (2013), Balderas y Guerra (2014), Torres (2015) han mostrado que aunque se han hecho diferentes aproximaciones para la investigación y la comprensión de la proporcionalidad como concepto articulador en el pensamiento matemático, persisten dificultades en su aprendizaje y enseñanza de la proporcionalidad tanto en lo estudiantes como en profesores en ejercicio, mostrando así una necesidad de hacer investigaciones sobre comprensión de la proporcionalidad desde la perspectiva del profesor, en este caso se hizo una aproximación al conocimiento especializado del profesor en la enseñanza de este concepto.

Se considera que por medio de la presente experiencia se puede ampliar la reflexión, comprensión y transformación de sus prácticas pedagógicas de los profesores asociadas a la enseñanza de la proporcionalidad, además de considerar que esta experiencia investigativa aporta en la construcción de propuestas de enseñanza de la proporcionalidad, la superación de estas dificultades de comprensión de la proporcionalidad y la construcción de nuevas propuestas formación de profesores asociadas a la enseñanza de este concepto.

2. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

Como se mencinó anteriormente, la construcción de una comprensión amplia de la proporcionalidad ha sido un problema que ha sido investigado desde hace décadas por diferentes autores desde diferentes perspectivas teóricas, sin embargo, se ha encontrado que las dificultades y errores es su comprensión y enseñanza persisten tanto en los estudiantes como en los profesores tanto en la enseñanza de este concepto como en la resolución de situaciones problemas en diferentes contextos.

Se considera que una propuesta que puede aportar en la resolución de la anterior problemática es la elaboración de investigaciones que aborden la comprensión del conocimiento especializado del profesor asociado a la enseñanza de la proporcionalidad, pues por medio de la comprensión del conocimiento del profesor se pueden establecer diferentes dimensiones de este objeto matemático, aportando así a su caracterización, comprensión de sus propiedades, procedimientos, representaciones, establecer cómo este objeto matemático se relaciona con otros, conocer sus errores y obstáculos epistemológicos.

Para esta labor se considera necesario hacer uso de propuestas teóricas como las construidas en la Universidad de Huelva, donde se han realizado valiosos aportes en la construcción de una línea en investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el marco de las actividades del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM), el cual en los últimos años han dirigido diferentes tesis doctorales como Montes (2015), Vasco (2015), Flores (2015), Escudero (2015), Aguilar (2015), Liñan (2017), donde se indaga sobre sobre el conocimiento especializado del profesor, mostrando así sobre conocimiento amplio y una larga trayectoria en la investigación del tema.

En este sentido, la pregunta de investigación fue ¿Qué conocimiento de proporcionalidad moviliza un profesor de enseñanza secundaria cuando enseña proporcionalidad?, para poder responder esta incógnita se usó el modelo MTSK pues este aporta en la compresión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas; el objetivo fue identificar por medio de este modelo las características del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas cuando enseña el concepto de proporcionalidad en secundaria.

3. REFERENTES TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

Estos elementos serán presentados en dos apartados, en un primer momento se hará una sensibilización teórica sobre el concepto de proporcionalidad y una caracterización del modelo MTSK el cual es desarrollado por la universidad de Huelva, pues estos dos elementos constituyen una parte de vital importancia para comprender el conocimiento que se puede asociar al profesor.

En el segundo apartado correspondiente al los referentes metodológico, se mencionará el tipo de investigación elegida, los criterios de selección de la informante y la fundamentación cómo se obtuvieron los datos a analizar en esta investigación.

Proporcionalidad y el modelo MTSK: Una breve construcción de la proporcionalidad como concepto matemático

Parte de la sensibilización teórica sobre la proporcionalidad radica en caracterizarla como una construcción humana, es decir que ha sido enriquecida a lo largo de la historia. Iniciando por los aportes del antiguo Egipto, donde dada la naturaleza preeminentemente práctica del conocimiento matemático egipcio sólo se pudieron identificar problemas asociados a situaciones reales como los presendos en el papiro del Rhind y analizado por Chace (1979).

La practicidad como característica de la proporcionalidad fue trascendida por la propuesta axiomática deductiva de la Grecia clásica, ejemplo de esto se puede evidenciar en Euclides (1991), donde se recoge sistemáticamente el tratamiento de la proporcionalidad por matemáticos como Pitágoras, Eudoxo o Thales.

Por otro lado, la cultura China mostró una interpretación diferente de conceptos de razón y proporcionalidad, prueba de esto se puede analizar en Los Nueve Capítulos, documento del siglo III donde se plantea el "lu" como herramienta para comprender el razonamiento en la construcción de la regla de tres, de esta forma, el uso del "lu" hace que la interpretación de proporcionalidad China se adapte mucho mejor a las dinámicas comerciales y mercantiles que la propuesta Griega, pues desde el inicio se proponen relaciones entre un conjunto de números, dejando de lado que sean estas sean necesariamente homogéneas, estos elementos son propuestos por autores como Dauben (1998), Chemla (2005) y Kangshen (1999).

Con la caída del imperio romano y la pérdida de los conocimientos del mundo clásico, la cultura árabe fue fundamental para salvaguardar estos conocimientos, ejemplo de esto se puede evidenciar en Los Comentarios de Omar Al- Khayyam a Los Elementos, publicado en el siglo XI en lo actualmente ocupa el territorio Iraquí, Rashed (1999) menciona que en este documento se presenta una definición alternativa de igualdad de razones a la presentada por Euclides, para el autor dos razones son iguales si ambos pares de magnitudes dan lugar a misma sucesión de enteros tras el proceso de antifairesis; a esta definición él la llama como la "razón verdadera", llamando a la definición geométrica de Euclides como la "razón usual".

Posteriormente, en el renacimiento se reactivan propuestas alternativas del tratamiento Griego de la proporcionalidad, ejemplo de esta situación se pudo observar en la publicación en 1255 de la traducción de Los Elementos por Campanus de Novara, en la que se presenta la definición del concepto de "denominación de una razón" con la cual se buscó aritmetizar la idea de razón propuesta en Los Elementos, pues en la propuesta de Euclides la razón se presenta como una relación únicamente entre magnitudes homogéneas (segmentos), en cambio en la propuesta de Campano se buscó asociar un número a cada razón, haciendo que esta propuesta se relacione la asignación actual en la que se asocia una razón a un número racional, característica que autores como Rommevaux (1999) menciona que aportó en la comprensión de la razón como fracción y como número racional.

Caracterización disciplinar del concepto de proporcionalidad

Existen diferetes aproximaciones para definir la proporcionalidad como concepto matemático, por ejemplo, Fiol y Fortuny (1990), hacen uso de las teorías sobre funciones para mencionan que dos magnitudes son proporcionales si se puede establecer un isomorfismo entre sus cantidades tal que:

- **i.** Si $a < b$ implica $f(a) < f(b)$, la relación de orden es monótona.
- **ii.** y $f(a + b) = f(a) + f(b)$, es decir, se conserva el orden y la suma.
- **iii.** Si la magnitud es continua, la proporcionalidad f queda unívocamente determinada dando la cantidad homóloga $f(a)$ de una cantidad cualquiera y en particular las cantidades correspondientes $f(a)$ a una unidad.

Este tipo de definiciones aportan en la superación de la creencia que la proporcionalidad está dada únicamente en magnitudes homogéneas como el caso de dos pares de segmentos.

Una segunda perspectiva, se plantea la proporcionalidad como una relación multiplicativa entre magnitudes, la cual permite determinar el valor cantidad de magnitud en función de otra cantidad de magnitud de la cual se conoce su medida, estableciendo relaciones de proporcionalidad entre cantidades de distintas magnitudes. Finalmente, una tercera perspectiva de definición de proporcionalidad está en Carrillo, Contreras, Climent, Montes, Escudero y Flores (2016) quienes la caracterizan como una relación de equivalencia entre dos cantidades de magnitudes extensivas[1], de tal forma que cuando se hace la comparación de dos cantidades de magnitudes (a partir de la construcción de razones) se obtiene el mismo valor.

En terminos muy generales comprender la proporcionalidad como objeto matemático es necesario contemplarla en dos situaciones, la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa, las cuales a su vez se pueden evidenciar en un contexto geométrico o uno aritmético, se definirá la proporcionalidad directa como una relación entre magnitudes que permite obtener la medida de cantidad de la otra magnitud multiplicando una constante por la medida de cantidad de esta u otra magnitud. Mientras tanto, la proporcionalidad inversa se define como una relación entre magnitudes que permiten obtener la medida de una cantidad de magnitud multiplicando por una constante por la inversa de la medida de otra cantidad de magnitud.

Con respecto al contexto numérico, se puede mencionar que cuando se busca encontrar una relación de proporcionalidad directa o inversa entre dos variables numéricas se hará uso de primer contexto; en cambio, en la proporcionalidad geométrica se indaga con cuerpos, formas, objetos de los cuales se quieren replicar a diferente tamaño o cuando su medición no es posible físicamente se hará uso de segundo contexto, por ejemplo, en la construcción de maquetas, mapas o medir alturas de edificios de grandes alturas.

Modelo MTSK como marco de referencia para comprender la proporcionalidad

Se han hecho diferentes aproximaciones a la comprensión del conocimiento del profesor sobre proporcionalidad, por ejemplo, en Rivas (2013) por medio del EOS hace un análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de Educación Primaria en formación en la Universidad de Granada, o Balderas y Guerra (2014) donde indagan sobre conocimiento del profesor de matemáticas con respecto a la proporcionalidad por medio de la comprensión de diferentes interpretaciones de este concepto.

O más recientemente, Torres (2015) quien indaga el conocimiento un profesor de Primaria y uno de Secundaria, por medio del modelo Knowledge Quartet identificando 39 indicadores pertenecientes a las categorías (11 para fundamentos, 11 para transformación, 7 para conexión, 4 para contingencia y 6 para la categoría general), una característica interesante de esta investigación es la identificación de seis indicadores que no se pueden categorizar en el modelo, situación que da pie para la usar modelos alternativos como el MTSK elaborado en la Universidad de Huelva.

El modelo MTSK surge como una propuesta teórica de comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas en el marco del grupo SIDM en la Universidad de

1. Donde la unión de la cantidad de magnitud sea sumativa, como por ejemplo la cantidad de superficie.

Huelva, España, donde se ha trabajado y aportado intensamente en la comprensión del conocimiento profesional del profesor, en la propuesta se proponen dos dominios.

El primer dominio es el conocimiento matemático (MK), el cual contiene como subdominios el conocimiento de los temas (KoT), que hace referencia a la fenomenología, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, definiciones y procedimientos, el conocimiento de la estructura matemáticas (KSM), que integra las conexiones de complejización, las conexiones de simplificación, las conexiones de contenidos transversales y finalmente las conexiones auxiliares y el conocimiento de la práctica matemática, (KPM) que contienen las prácticas ligadas a la matemática en general y las prácticas ligadas a una temática en matemática.

El segundo dominio es el conocimiento didáctico de contenido (PCK), en el cual contiene los subdominios de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (MKT), que hace referencia a las teorías personales o institucionales de enseñanza, los recursos materiales y virtuales y las actividades, tareas, ejemplos y ayudas, el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) que se refiere a las formas de aprendizaje, las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático y las concepciones de los estudiantes sobre matemáticas, y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), que hace referencia los contenidos matemáticos requeridos a enseñar, el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, y la secuenciación de diversos temas.

Una característica particular de la propuesta teórica es la inclusión de las creencias de las matemáticas, de su aprendizaje y enseñanza como motor de las acciones de las categorías es un nuevo elemento que presentan los autores en la propuesta de conceptualización del conocimiento del profesor de matemáticas, en la figura 1 se muestra una representación de la relación entre los diferentes componentes del modelo.

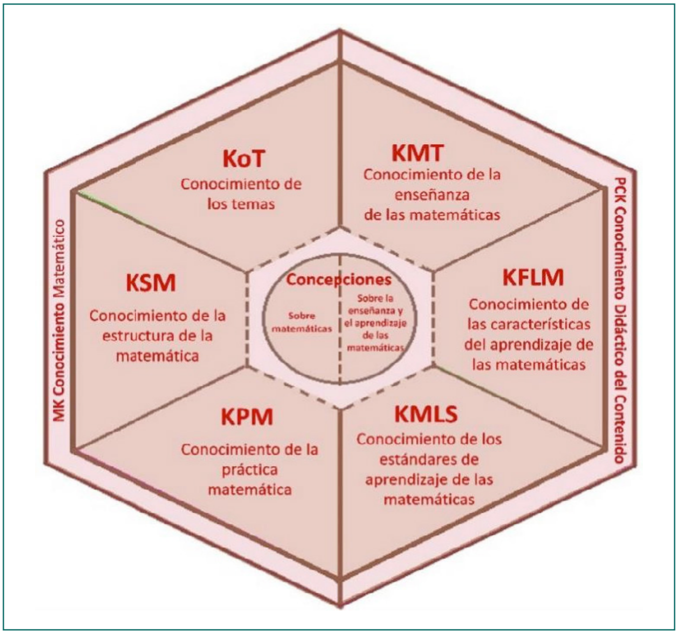


Figura 1. Representación gráfica de modelo MTSK (extraído de Muñoz ete al., 2015).

Se considera que este modelo complejiza y amplía los modelos preexistentes del conocimiento del profesor, por varios motivos. En primer lugar, el conocimiento especializado del profesor de matemáticas se caracteriza como aquel que el profesor necesita y usa para explicar matemáticas, prescindiendo de consideraciones pedagógicas generales no relacionadas a la disciplina. Por otro lado, este es un modelo de conocimiento en el que se considera el conocimiento que sustentan las acciones, de igual forma se considera que en el desarrollo de cierta acción de enseñanza, puede existir conocimiento de diferentes subdominios, es decir que no existe una relación univoca entre una acción y un subdominio, mostrando así la simultanead y complejidad del modelo.

3. CARACTERIZACIÓN DEL ESTUDIO

Dado que el objetivo de la investigación fue la comprensión de un fenómeno social, es necesario hacer uso de un paradigma cualitativo, donde se considere el conocimiento como una construcción social, interpretando la realidad como un constructo múltiple y holístico, renunciando a la idea de objetividad y neutralidad; considerando que las relaciones entre el investigador y el objeto estudiado como elementos inseparables.

De igual forma, como el objetivo de la investigación fue analizar e interpretar una realidad, en este caso el conocimiento movilizado por un profesor en la enseñanza del concepto de proporcionalidad es necesario posicionarse en un paradigma interpretativo en un estudio de caso de tipo instrumental presentado en Stake (2005), teniendo en cuenta instrumentos de recolección de la información como la grabación de las sesiones, la observación no participante y el cuaderno de campo.

Se considera que el estudio de caso como una oportunidad donde una experiencia específica de un profesor puede aportar en la construcción de referentes teóricos relacionados con la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, elementos propios de una investigación top down bottom up, donde los casos específicos y los cuerpos teóricos (en este caso el MTSK) se relacionan dialógicamente, nutriéndose y enriqueciéndose mutuamente.

Después de caracterizar el paradigma y el estudio de caso como estrategia, es necesario caracterizar la profesora Sonia, quien fue la informante. Ella es una profesora de matemáticas de un colegio público al suroccidente de Bogotá, fue seleccionada como informante por diferentes motivos, entre estos su amplia, diversa y permanente formación académica, pues cuenta con formación pedagógica como normalista en educación (profesora de primaria), formación matemática como ingeniera civil y postgrados en matemática educativa, además tener una amplia experiencia como profesora de aula durante más de 18 años.

Estos elementos hacen que ella sea una muestra representativa de la población de de profesores de Colombia, pues la informante pertence al sistema de educación pública, el cual según el Departammento Administratio Nacional de Estadística DANE[2] representa del 80,4 % del sistema educativo Colombiano, cuenta con difernites tipos de formación,

2. https://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/educacion/bol_EDUC_18.pdf pues en Colombia se puede acceder a la docencia por medio de diferentes educativos (licencicado, tecnólogo en educación o profesional diferente a licenciado) y hace parte del 58% de los profesores de Bogotá que tienen 10 años o más de expericia en docencia, según datos del Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico[3].

4. RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Esta tarea estuvo centrada en la observación de cuatro sesiones de clase por medio de la grabación en vídeo y la toma de notas de campo, paralelo a esto se tomó evidencia fotográfica de los trabajos y soluciones de los estudiantes, elementos que han aportado en el análisis de las grabaciones, clarificándolas y mostrando las relaciones entre los diferentes subdominios del conocimiento especializado del profesor.

De igual forma, es necesario mencionar que investigaciones previas sobre MTSK como Liñán (2017) han expresado que, en cuanto a la observación, no existe información pura, puesto que está organizada por nuestros conocimientos; de esta forma una observación debe entenderse como la construcción de una representación o de un modelo de una situación.

Una vez se recolectó toda la información se procedió a organizar las sesiones por medio de núcleos temáticos y hacer la respectiva transcripción de manera manual de las sesiones, a lo cual Liñán (2017) comenta que en este proceso es necesario hacer énfasis en los elementos que se interesa observar, en este caso se incluirán la contextualización de las situaciones de cada sesión, las intenciones, los gestos y movimientos de los estudiantes y de la profesora en el proceso de enseñanza.

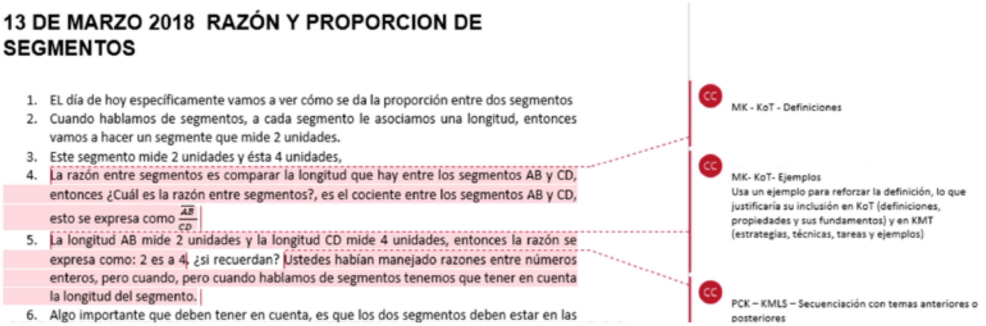
Inicialmente la transcripción se dividió en unidades de información, las cuales que fueron entendidas como frases o argumentos para expresar una idea, al leer cada unidad se asociaba manualmente a un dominio, un subdominio, una categoría del MTSK, las cuales eran organizadas en una tabla cronológica donde se narraban lo sucedido en cada sesión, tal y como se muestra en la figura 2.

Posteriormente, se organizaron las unidades poniendo como criterios los organizadores curriculares propuestos por el Ministerio de Educación de Colombia en MEN (2007), en un primer momento y después las subcategorías, teniendo en cuenta la tabla I donde en n representa el número de la clase en la que está ubicada cada unidad.

Tabla I: Organización de las unidades de información.

	Subdominio	*Categoría*	*Organizador curricular*	*Segmento*	*Comentario/Justificación*
Fecha					

3. http://www.idep.edu.co/sites/default/files/libros/Perfiles%20de%20los%20Docentes.pdf



13 DE MARZO 2018 RAZÓN Y PROPORCION DE SEGMENTOS

1. EL día de hoy específicamente vamos a ver cómo se da la proporción entre dos segmentos
2. Cuando hablamos de segmentos, a cada segmento le asociamos una longitud, entonces vamos a hacer un segmente que mide 2 unidades.
3. Este segmento mide 2 unidades y ésta 4 unidades,
4. La razón entre segmentos es comparar la longitud que hay entre los segmentos AB y CD, entonces ¿Cuál es la razón entre segmentos?, es el cociente entre los segmentos AB y CD, esto se expresa como $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$
5. La longitud AB mide 2 unidades y la longitud CD mide 4 unidades, entonces la razón se expresa como: 2 es a 4. ¿si recuerdan? Ustedes habían manejado razones entre números enteros, pero cuando, pero cuando hablamos de segmentos tenemos que tener en cuenta la longitud del segmento.
6. Algo importante que deben tener en cuenta, es que los dos segmentos deben estar en las

Figura 2. Transcripción inicial de la información.

En una primera aproximación al análisis de la información recolectada se procedió a hacer un conjunto de mapas conceptuales que den cuenta del MTSK observado en las cuatro sesiones observadas, teniendo como referencia cada uno de los subdominios y categorías del MTSK. Debido al tamaño y la complejidad de establecimiento de relaciones entre categorías fue necesario elaborar pequeños mapas conceptuales con respecto a organizadores curriculares específicos presentes en las sesiones de clase, estos organizadores fueron, las razones entre segmentos, las rectas paralelas, los segmentos homólogos y la semejanza.

Una vez se tuvo una idea general de los conocimientos movilizados en las sesiones, fue necesario expresar de una forma más metódica el análisis de episodios específicos para esto se hizo uso del sistema de códigos de la tabla II.

Tabla II: Códigos usados para la sistematización de la información.

Código	Significado
P	Profesora
E	Estudiante
[…]	Fragmento que no se tiene en cuenta por no ser útil en el análisis.
Texto entre paréntesis: ( )	Explicación de algo que está ocurriendo en el aula, pero no se verbaliza
Texto entre comillas: “”	Lectura de partes del libro de texto o de otros libros que se usan en el aula. Puede haberse realizado por la maestra o por los estudiantes
a,b	Inicio y fin de las unidades a analizar

Después de presentar el análisis de esos episodios específicos, se consideró necesaria la construcción de la tabla III, donde se presentará toda la información con respecto a cada uno de los subdominios del MTSK, a continuación, se presenta el ejemplo del subdominio del conocimiento de los temas KoT.

Tabla III: Sistematización de las unidades por subdominios del modelo MTSK.

Subd.	**Categoría**	**Unidad de Información**	**Evidencia o indicio en el MTSK**
KoT	Definiciones, propiedades y fundamentos	(4,4) La razón entre segmentos es comparar la longitud que hay entre los segmentos AB y CD, entonces ¿Cuál es la razón entre segmentos?, es el cociente entre los segmentos AB y CD, esto se expresa como $\frac{\overline{AB}}{A'B'}$	Definición de razón entre dos pares de segmento
	Procedimientos	(49,52) 2 por 9 debe ser igual a 3 por 6, miremos 2x9 = 3x6 18= 18 Esta es una manera de verificar, que los dos pares de segmentos son proporcionales o que guardan la misma razón	Procedimiento para comprobar si las razones de dos pares de segmentos son proporcionales.

Una vez se tuvo esta información fue necesario establecer relaciones entre categorías por medio de mapas y esquemas visuales. Un aspecto importante por resaltar sobre el análisis de la información es la validación del análisis de la información por medio de dos estratregias; la primera la triangulación de expertos propuesta en Flick (2007), la cual consiste la participación de diferentes observadores que validan los datos, estableciendo una nula o mínima la posibilidad de sesgo (causado por el investigador) en este caso, los observadores fueron los participantes el SIDM y el director de la investigación, y por otro lado, la triangulación de instrumentos, la cual radica en comparar la información obtenida, por ejemplo la comparación de las trascripciones, notas del diario de campo, fotografias y entrevistas para obtener un mismo conjunto de datos y así minimizar las posibilidades de sesgos.

5. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En la figura 3 se representarán a modo de resumen las temáticas trabajadas en cada sesión, tarea necesaria para posteriormente hacer un análisis más profundo sobre casa sesión y sus respectivas sesiones.

Al hacer un análisis cronológico se identificaron 20 episodios, donde se encontraron 177 indicadores pertenecientes a los subdominios del modelo MTSK, observando una preminencia de categorías como el uso de las definiciones, propiedades y sus fundamentos, el uso de representaciones y procedimientos todos estos pertenecientes al KoT y también se observó la preeminencia del uso de estrategias, técnicas, tareas ejemplos pertenecientes al subdominio MKT.

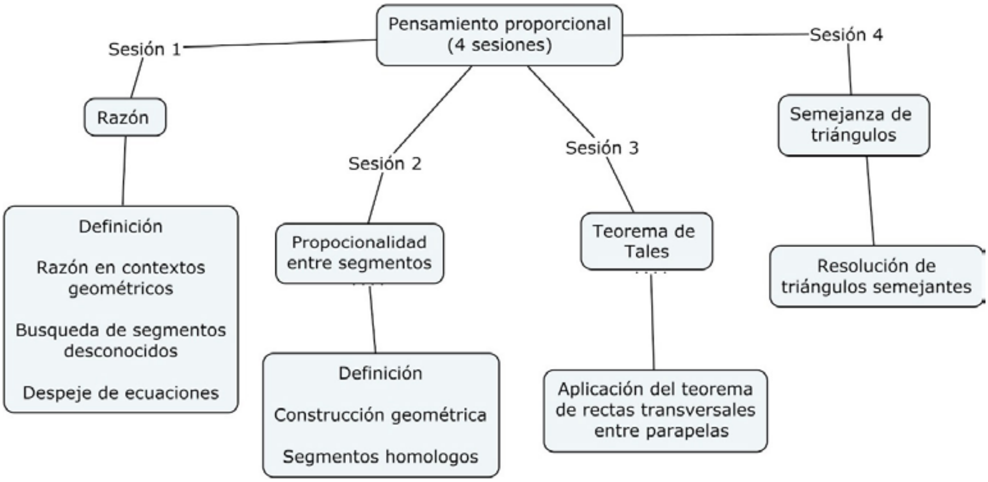


Figura 3. Temáticas trabajadas en las clases observadas.

Estas primeras características aportaron por un lado en la compresión de qué elementos priorizaba la profesora en la enseñanza de la proporcionalidad y por otra parte en la construcción de relaciones entre las diferentes subcategorías, elementos que se presentan en la tabla IV, donde se cuantifican los indicadores encontrados con base en la triangulación de la información.

Tabla IV: Cuantificación de indicadores encontrados.

Subd.	Categoría	Cant de Indicadores
KoT	Definiciones propiedades y sus fundamentos	41
	Procedimientos	35
	Fenomenología y sus aplicaciones	9
	Registros de representación	17
KSM	Conexión transversal	7
	Con. Aux	7
KPM	Formas de validación y demostración	6
	Papel de los símbolos y el lenguaje formal	4
	Jerarquía y plan. Para la res. De problemas	4
	Práctica Matemática.	0

Subd.	Categoría	Cant de Indicadores
MKT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	33
	Recursos, materiales virtuales	7
KFLM	Fortalezas y dificultades	2
	Formas de interacción con el cont. Matemático	2
KMLS	Secuenciación con temas	3

Una vez se identificaron los indicadores, se hizo necesario construir un análisis relaciones entre estos en cada uno de subdominios propuestos por el modelo MTSK, encontrando 25 relaciones. Posteriormente se establecieron relaciones entre los indicadores a partir de oportunidades o indicios, los cuales se entienden como una unidad de información que no es del todo clara, de las cuales se encontraron 30 de relaciones entre indicios y oportunidades

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Con respecto al dominio de matemático (MK):

Este dominio está compuesto por tres subdominios, el conocimiento de los temas (KoT), contenido de la estructura de las matemáticas (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KMP), con respecto al KoT, desde la primera sesión, se pudo observar que para la profesora era necesario que los estudiantes comprendan la definición de razón como una comparación entre dos cantidades de magnitud, en este caso desde una perspectiva geometría a través del uso de segmentos.

Sin embargo, donde más se observó énfasis fue en el conocimiento de las propiedades y la importancia de estas en el transcurso de la enseñanza de procedimientos, representaciones o formas de resolver un problema asociado a la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica.

De igual forma, se evidenció el uso de las propiedades geométricas de rectas paralelas, triángulos y cuadriláteros que se pueden asociar a la proporcionalidad, la relación entre lados homólogos para establecer la proporcionalidad, el establecimiento de las longitudes entre transversales y paralelas estableciendo razones de diferentes formas, siempre y cuando los segmentos sean correspondientes y homólogos.

Asimismo, se observaron propiedades asociadas a la proporcionalidad y la semejanza, como por ejemplo la proporcionalidad entre los lados de dos triángulos como un criterio de la semejanza; además se determinaron fundamentos como los argumentos necesarios para establecer que en algunos casos es necesario dividir en ambos lados de la igualdad para despejar una incógnita.

Con respecto a las definiciones, propiedades y fundamentos mencionadas anteriormente están relacionadas con un abordaje de la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica, lo cual no quiere decir que la profesora posea únicamente este tipo de conocimiento, pues acuerdo a lo comentado por la profesora, la perspectiva geométrica al ser de una naturaleza gráfica y al ser más susceptible a trabajar con material concreto como escuadras y lápiz, es más fácil comprensión por parte de los estudiantes, este elemento también una relación entre KMT y KFLM.

Con respecto al conocimiento de la fenomenología asociado a la proporcionalidad, en la primera clase se pudieron identificar conocimientos relacionados con el uso de situaciones del contexto real para establecer la proporcionalidad entre dos pares de segmentos por medio del método de medios y extremos directamente para establecer una longitud desconocida.

En relación con el conocimiento de los registros de representación se pudo evidenciar gran variedad, estas fueron modificadas y enriquecidas con el trascurso de las sesiones y de la preguntas y dificultades observadas por los estudiantes, característica que llevó una reflexión sobre la relación de esta categoría con el KMT y el KFLM.

Para dar cuenta del conocimiento de los registros de representación se clasificaron de acuerdo con sus características. En el primer grupo están las representaciones verbales de la razón entre dos segmentos, y la proporcionalidad entre dos pares de segmentos, en el segundo grupo están las representaciones gráficas, caracterizándolas como aquellas herramientas que aportan en la comprensión y resolución de un problema asociado a la proporcionalidad y en el tercer grupo están las representaciones escritas, las cuales pueden ser de naturaleza notacional, como la representación escrita de segmentos por medio de expresiones como $\frac{\overline{AB}}{A'B'}$ y $\frac{\overline{BC}}{B'C'}$, la representación escrita de una razón como una división de segmentos y la representación escrita de rectas como $\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}$.

Con respecto al conocimientos de procedimientos se identificaron tres grandes grupos, en el primer grupo están los procedimientos de construcción como el establecimiento de una razón, usando simplificación de fracciones, la construcción de razones proporcionales dados cuatro segmentos, trazar una recta paralela a una recta dada, la búsqueda de un par de segmentos de tal forma que sean proporcionales con un par de segmentos dados.

En el segundo grupo están los procedimientos algebraicos, como por ejemplo el método de medios y extremos, y despeje de ecuaciones para verificar dos triángulos son semejantes con dos incógnitas y en el último grupo de procedimientos están los de verificación, entre los cuales está la confirma la relación de proporcionales entre segmentos homólogos o la comprobación de la proporcionalidad entre lados de cuadriláteros.

Con respecto al conocimiento de la práctica matemática (KMP) se pudo identificar que, desde la primera clase se hace uso de pruebas informales en geometría a través de la representación gráfica, la comprobación empírica del teorema de Thales y el uso del ejemplo para mostrar casos en los que no se cumple lo propuesto (contraejemplo), por otro lado, también se pudo identificar que la profesora hace uso implícito de las fases de resolución de problemas de Polya (entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás).

Finalmente, con respecto al conocimiento de la estructura da las matemáticas (KMS), en especial el conocimiento de conexiones transversales entre contenidos se pudo identificar que desde la primera clase el uso del concepto de ecuación como una igualdad, pues este es un concepto que fue necesario para la caracterización y comprensión de la proporcionalidad.

Por otro lado, se pudo identificar el despeje de ecuaciones para encontrar la longitud de un segmento, dados segmentos entre rectas paralelas, como una conexión auxiliar, pues, aunque hace parte de un conocimiento diferente a la proporcionalidad, el conocimiento sobre el despeje de ecuaciones es necesario para comprender y verificar representaciones, procedimiento y propiedades de la proporcionalidad entre dos pares de segmentos.

Con respecto al dominio didáctico de contenido (PCK)

Este dominio está compuesto por tres subdominios conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

Con respecto al MKT, se puede comentar se identificaron conocimientos relacionados con la resolución de problemas, en especial con el conocimiento de las fases de Polya, pues se considera que el uso de estas facilitó a la comprensión y la resolución de problemas asociados a la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica.

Entre estas se destacan la comprensión de problemas en los que se pregunta por el valor de un segmento desconocido, ya sea de una recta cortada entre paralelas o un lado de una pareja de triángulos semejantes; la construcción de un plan, el cual en la mayoría de las ocasiones estaba relacionado con la elaboración de representaciones gráficas y establecimiento de segmentos homólogos, y posteriormente de ejecutar el plan por medio de las propiedades de la proporcionalidad, se hacía una validación o verificación del plan, el cual constaba en la verificación de la igualdad entre las dos razones generadas por dos pares de segmentos.

Con respecto al conocimiento movilizado sobre las fortalezas y debilidades asociadas a la proporcionalidad, se pudo observar el conocimiento sobre la capacidad de identificar la dificultad de nombrar una razón, de tal forma que supere la idea de fracción.

De igual forma, en el segundo episodio se observó el conocimiento de las dificultades (KFLM) al involucrar situaciones de medición usando milímetros, pues, la profesora una vez identificó que los estudiantes construían razones con segmentos usando diferentes unidades de medidas (milímetros y centímetros), rápidamente aclaró que, para la construcción de razones, es necesario que estas tengan la misma unidad de medida. Para superar esta dificultad evidenciada en los estudiantes muestra diferentes ejemplos usando las mismas unidades de medida para longitud (milímetros, centímetros y metros); se considera que la superación de esta dificultad muestra una fuerte relación con el KMT (ejemplos) y el KoT (propiedades y registros de representación).

Para finalizar el análisis de este subdominio, se pudo encontrar que con respecto al conocimiento de los intereses y las expectativas de los estudiantes al abordar la proporcionalidad sólo se pudo identificar algunas oportunidades, se considera que esto, se debe a la metodología propuesta por la profesora, pues, en experiencias de aula como enseñanza por medio de proyectos o modelación de situaciones reales, se trabaja a partir de los intereses, expectativas y necesidades de los estudiantes.

Con respecto al segundo subdominio, KFLM, se evidenció el uso diferentes elementos de propuestas de enseñanza de la proporcionalidad, como, el énfasis en la manipulación de material concreto haciendo sistematización y diferentes tipos de representación asociados a la proporcionalidad, la aproximación a los conceptos de razón y proporción de números enteros, para seguir con la interpretación, el cálculo y la comparación de porcentajes y la orientación y representación del espacio.

Sin embargo, no se tienen las evidencias suficientes para poder decir que la profesora conoce una teoría especifica de enseñanza asociada a la proporcionalidad, pues la propuesta de enseñanza se caracteriza por tener elementos de diferentes teorías, desde la tradicional haciendo uso de ejercicios hasta las propuestas de geometría activa, haciendo uso de material tangible e instrumentos de medida para longitudes.

Caso diferente de la información encontrada con respecto al conocimiento de recursos materiales o virtuales asociados a la proporcionalidad, pues se pudieron identificar cuatro grupos de conocimientos, el primero está relacionado con el conocimiento del uso de instrumentos, como el uso de escuadras para representar gráficamente problemas además de verificar propiedades asociadas a la proporcionalidad geométrica.

En el segundo grupo está el conocimiento sobre el uso de vídeos para ejemplificar problemas relacionados con la búsqueda de segmentos desconocidos usando la proporcionalidad, este tipo de herramientas está asociada al uso de la tecnología en función de la enseñanza de las matemáticas, se considera que este tipo de conocimiento está relacionado con el uso el teorema de Thales (KoT, propiedades) y la modelación de situaciones reales (KoT, fenomenología y aplicaciones).

En el tercer grupo se encuentran el uso de lenguaje corporal como material que pueden facilitar en aprendizaje y la comprensión de los estudiantes de las propiedades, representaciones y procedimientos, por ejemplo, cuando la profesora señala con sus brazos, el tamaño de los segmentos homólogos o cuando usando sus brazos indica cuales son los segmentos homólogos, para establecer las razones y comprobar la proporcionalidad entre estos.

Finalmente, en el último grupo identificado está relacionado con los indicios, como el conocimiento sobre las potencialidades y limitaciones de hoja en blanco para haces construcciones geométricas, pues la profesora hace uso de esta como una herramienta que potencializa el razonamiento para la construcción geométrica del teorema de Thales.

Con respecto al conocimiento de las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza de un contenido matemático, se puede mencionar que la mayoría de los indicadores están relacionados con el uso del ejemplo como estrategia para la enseñanza de propiedades, procedimientos y representaciones asociadas a la proporcionalidad geométrica.

Al clasificar los indicadores identificados se pudieron establecer tres grupos de indicadores, el primero está el uso del ejemplo, los cuales incluyen el uso de ejemplo para mostrar definiciones o propiedades, en el segundo grupo se encuentra el uso de los ejemplos para mostrar procedimientos y en el tercer grupo, se encuentra el uso del ejemplo como herramienta para clarificar dudas o superar dificultades (KFLM), entre ellos están indicadores como el uso de ejemplo más transparente en el cual la razón entre segmentos no sea el doble y el uso un ejemplo de proporcionalidad que puede ser solucionado de diferentes formas.

En el último grupo de esta categoría se pudieron identificar estrategias como preguntar por la relación entre dos razones para establecer la proporcionalidad entre estas, el uso de preguntas orientadoras para definir la proporcionalidad como una relación entre dos pares de segmentos, la evocación de conceptos construidos previamente (razón y proporción) como herramienta para resolver un problema, el uso de tablas de tres columnas para establecer la razón entre dos segmentos y el cambio de posición, tamaño y valores diferentes ejemplos de triángulos semejantes.

Se considera que el conocimiento de un amplio conjunto de ejemplos está relacionado con el conocimiento matemático, especialmente con el KoT, además de las formas de validación y demostración (KPM), pues los ejemplos usados por la profesora por un lado fueron ideados especialmente para denotar determinadas propiedades como la igualdad de razones entre dos pares de segmentos, como también para clarificar procedimientos específicos como la construcción de razones usando longitudes de diferentes tamaños y el despeje de ecuaciones.

7. REFLEXIONES FINALES

Dado que la pregunta de investigación giró en torno a la comprensión del conocimiento especializado movilizado en la enseñanza de la proporcionalidad, en primera medida es importante comentar la importancia que tuvo el conocimiento del tema (KoT) como base para la enseñanza desde una perspectiva matemática (MK) y didáctica (PCK). En este caso especialmente se hace referencia al conocimiento de la definición de conceptos claves para entender la proporcionalidad como magnitud, cantidad de magnitud, razón, segmentos homólogos e igualdad entre razones, de igual forma, propiedades relacionadas con las razones, rectas paralelas, triángulos y cuadriláteros, además de procedimientos como la simplificación de fracciones, el establecimiento de razones entre dos segmentos, el método de medios y extremos para verificar la proporcionalidad, el despeje de ecuaciones lineales, la construcción de una recta paralela a una recta dada y la comprobación de la semejanza de un par de triángulos.

Además de esto, destaca un conjunto rico de registros de representaciones, como representaciones escritas de conceptos como razón, proporción, recta, segmento; representaciones verbales para nombrar razones y proporciones, representaciones gráficas de segmentos proporcionales, de problemas geométricos relacionados con el teorema de Thales, de problemas geométricos asociados a solución de cuadriláteros con lados semejantes, de problemas de semejanza de triángulos con una o dos incógnitas y la categoría de fenomenología en una menor medida.

La siguiente categoría que resaltó reiteradamente fue KMT, algunos conocimientos que sobresalen de esta categoría son el uso del ejemplo como herramienta para mostrar propiedades, procedimientos o definiciones, además de usar los ejemplos como herramienta para clarificar dudas o superar dificultades, el hacer un uso adecuado de los ejemplos fue necesario hacer uso por ejemplo de los registros de representación y propiedades adecuadas a las fortalezas y dificultades observadas en los estudiantes (KFLM).

De igual forma, otro elemento del KMT que emergió en diversas ocasiones fue el uso de estrategias como preguntar por la relación entre dos razones para establecer la proporcionalidad entre estas, el uso de preguntas orientadoras para definir la proporcionalidad como una relación entre dos pares de segmentos, la evocación de conceptos construidos previamente (razón y proporción) como herramienta para resolver un problema de proporcionalidad, el uso de tablas de tres columnas para establecer la razón entre dos segmentos y el cambio de posición, tamaño y valores diferentes ejemplos de triángulos semejantes. También en este caso, para hacer un uso adecuado de estas estrategias, la profesora hizo uso adecuado de los registros de representación y propiedades en forno a las fortalezas y dificultades observadas en los estudiantes (KFLM).

Esta información lleva a proponer una predominante relación entre el KoT, KMT y KFLM, elemento que también coincide con investigaciones previas sobre MTSK como Escudero (2015), quien menciona que el conocimiento y manejo de estos distintos registros permitió reconocer aspectos específicos de la matemática que sirven al profesor como base para plantearse un uso didáctico de los registros de representación, así como para el diseño de tareas y la evaluación de procedimientos de solución de estas tareas, llevados a cabo por estudiantes, proponiendo que este tipo de conocimiento puede estar ligado directamente al dominio de conocimiento didáctico.

REFERENCIAS

Aguilar, A. (2015). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de caso* (Tesis doctoral). Recuperado de: http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/12006.

Ausubel, D. (1978). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación,* 340, 341-378.

Balderas, R., y Guerra, M. (2014). Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestro de secundaria. *Revista Educación Matemática, 26* (2), 7-32.

Block, D. (2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico.* (Tesis doctoral). México: CINVESTAV-IPN. Disponible en http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/93552/2001_Block_Tesis.pdf?sequence=1yisAllowed=y

Block, D. (2006). Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad. En *19a. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa,* (pp. 675-680). Montevideo: RELME.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática: El caso de la proporcionalidad* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona: España.

Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Montes, N., Escudero, D. y Flores E. (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria.* Madrid: Paraninfo.

Chace, A. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus.* Reston, USA: NCTM.

Chemla K. (2005) The Interplay Between Proof and Algorithm in 3rd Century China: The Operation as Prescription of Computation and the Operation as Argumento. En: Mancosu P., Jørgensen K.F., Pedersen S.A. (eds) *Visualization, Explanation and Reasoning Styles* *in Mathematics. Synthese Library (*Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science), vol 327. Springer, Dordrecht

Dauben, J. (1998). Ancient Chinese mathematics: the Liu Hui al Jiu Zhang Suang Suan Shu vs Euclids Elements. *International Journal of Engineering Science, 36*(12-14) 1339-1359.

Escudero-Ávila, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11456.

Euclides (1991). *Elementos*, Libros V-IX, Editorial Gredos, Madrid, 1991.

Fiol, L. y Fortuny, M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número.* Madrid.: Síntesis.

Flick, U. (2007). *Introducción a la Investigación Cualitativa.* Madrid: Morata.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11503

Kangshen, S. (1999). *The nine chapters on the mathematical art*. Beijing, China: Oxford University Press.

Linán, M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria.* Tesis Doctoral Universidad de Huelva.

Ministerio de Educación Nacional- MEN (2017). *Derechos básicos de aprendizaje área de matemáticas versión 2. Ministerio de Educación Nacional*. Bogotá: Colombia.

Montes, M. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/10944/Conocimiento_especializa do.pdf?sequence=4

Muñoz, M. Contreras, L. Carrillo J. Rojas, N. Montes, M. y Climent, N. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas.* Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. 18, (3), 589-605.

Nehm, R. y Ridgway, J. (2011). What do experts and novices “see” in evolutionary problems? *Evolution: Education and Outreach, 4*(4), 666-679. doi:10.1007/s12052-011-0369-7.

Rashed, R. (1999). *Al- Khayyam mathematicien.* Paris, Francia: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rivas, A., Godino, J. y. Castro, W. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria*. Boletim de Educação Matemática,* 26.

Rivas, M. (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria.* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Disponible en https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Mauro_Rivas_tesis.pdf

Rommevaux, S. (1999). La proportionalté numérique dans le libre VII del Éléments de Campanus. *Revue d’Histoire des Mathématiques, 5* (1), 83-126.

Stake, R. E. (2005). *Investigación con estudio de casos.* Madrid, Morata.

Torres, E. (2015). *Conocimiento del profesor en la práctica: la enseñanza de la proporcionalidad.* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona. Disponible en https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2015/hdl_10803_290741/etm1de1.pdf

Vasco, D. L. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11901

Valverde, A. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), I*nvestigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander, España: SEIEM.

Valverde, G. (2013). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de Educación Primaria.* Granada: Universidad de Granada, 2013. [http://hdl.handle.net/10481/23890]