Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2020, nº 104, 83-98*

RINCÓN "SAPERE AUDE"…. ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

1. MATEMÁTICAS EN LOS SIGLOS XVI

1.1. Siglo XVI: ¿Nuevo lenguaje matemático?

Después de la captura de Constantinopla (Constantinopolis, anteriormente Bizancio, llamada por los turcos Stamboul-distorsión de Constantinopolis-Estambul-, nombre actual de la ciudad, y también por un mal juego de palabras, Islamboul, se encuentra ubicada en el estrecho del Bósforo) por los turcos en 1453, viene el renacimiento de las matemáticas. Sin embargo, la aportación más importante a principios del siglo XVI es la creación del álgebra en su forma actual. Esta rama de las matemáticas existía en la tradición occidental al menos desde Diofanto.

Diofanto, Diophantus, matemático griego de Alejandría, que vivió probablemente en el siglo III de la era cristiana, al menos antes de Theon de Alejandría que lo cita. Según un epigrama aritmético de la antología griega, se habría casado a los treinta y tres años, habría tenido, cinco años después, un hijo que murió a los cuarenta y dos años, y al que habría sobrevivido cuatro años. Por lo tanto, habría muerto a edad de ochenta y cuatro años. Dejó un libro llamado *Arithmetika*, que incluía trece libros de los cuales se perdieron los últimos siete, y un libro especial, *números poligonales*. En cuanto a sus *Porismas* (*también se puede escribir como porismo, del griego "πόρισμα" -porismá- con el significado de expediente, conclusión o corolario. En particular, el término "porisma" se ha utilizado para referirse a un resultado directo de una prueba, análogamente a como se hace con un corolario en referencia a un resultado directo de un teorema. En el uso moderno, un porisma es una relación que se mantiene para un rango infinito de valores, pero solo si se asume una determinada condición, como por ejemplo en el caso de la Cadena de Steiner (Jakob Steiner-18 de marzo de 1796 - 1 de abril de 1863 matemático suizo, uno de los más destacados geómetras del siglo XIX). El término proviene de tres libros de Euclides conteniendo porismas, que se han perdido. Debe tenerse en cuenta que una proposición puede*

Figura 1. Niccolò Fontana (Tartaglia). https://www.biografiasyvidas.com/biografia/t/tartaglia.htm

no haber sido probada, por lo que un porisma puede no ser un teorema, o llegado el caso, incluso puede no ser cierto...), que cita en tres lugares en su Aritmética, deben haber sido, según la opinión que parece más probable, corolarios añadidos a los problemas resueltos en su gran trabajo, corolarios que no han sido bien tratados o descuidados por los traductores.

De hecho, el trabajo de Diofanto, solo nos ha llegado cercenado, reelaborado e interpolado. Conocido por los árabes desde el siglo IX, dio a luz a *Älgebra,* pero ninguna escritura árabe ha arrojado alguna luz sobre la parte que se pierde. Todos los manuscritos griegos conocidos hoy, veinte en número, proceden de un solo prototipo y se dividen en dos clases. El manuscrito más antiguo de la primera clase no es anterior al siglo XIV; y el segundo de una copia en la que Maxime Planude, en el siglo mencionado, compuso un comentario sobre los dos primeros libros. Antes de Maxime Planude, Georges Pachymère (en su *Tétrabiblon*) es el único bizantino que se ha ocupado de Diophante. y sabemos que ya podríamos encontrar las bases entre los babilonios, en Egipto, en la India, etc. Pero, demasiado apegado a los números y a casos especiales, carecía de las herramientas que le darían todo su valor y "poder".

Luca Pacioli comienza dando métodos para reducir todas las ecuaciones cuadráticas a tres casos. Luego viene Niccolò Fontana ((1500-1557), también conocido como Tartaglia, por su tartamudez, Cardan y Ferrari, que están comenzando a abordar el problema general de resolver ecuaciones de tercer y cuarto grado. Después de ellos, Viète es el primero en aplicar álgebra a la geometría y, por lo tanto, sienta las bases para el análisis moderno: *El Álgebra, un lenguaje en busca de su vocabulario*.

Desde principios del siglo XVI, el álgebra fue cultivado por una gran cantidad de matemáticos. Scipio Ferreo, profesor de matemáticas en Bolonia, alrededor de 1505, rompió por primera vez las barreras logrando resolver un problema de tercer grado, pero no hizo público su descubrimiento.

Algún tiempo después, el citado Tartaglia, que enseña matemáticas en Venecia, acepta un desafío, según la moda de la época, del matemático Fiori (o Fior) que afirma tener un método para resolver la ecuación del tercer grado (quizás proviene de Ferreo), promete una suma de dinero a quien resuelva treinta preguntas formando casos especiales de esta ecuación. Tartaglia ofrece un método más simple y sale fácilmente victorioso al resolver las preguntas propuestas en menos de dos horas.

Girolamo Cardano, conocido por el nombre francés de Jérôme Cardan, es un científico italiano, nacido en Pavía el 24 de septiembre de 1501, fallece en Roma el 21 de septiembre de 1576. Estudió en Pavía y Padua, fue doctor en medicina ejerciendo en

Sacco cerca de Pavía. La situación económica de Cardano no era buena, muy escasa, se mantuvo solvente al ser un jugador y ajedrecista consumado . Su libro sobre juegos de azar, *Liber de ludo aleae ("Libro sobre juegos de azar"),* escrito alrededor de 1564, pero no publicado hasta 1663, contiene el primer tratamiento sistemático de probabilidad, así como una sección sobre métodos efectivos de engaño. Utilizó el juego de lanzar dados para comprender los conceptos básicos de probabilidad. En 1534 fue nombrado profesor de matemáticas en Milán y adquirió una gran reputación allí como profesor y médico; en 1547 dio conferencias sobre medicina en Pavía; en 1552 fue a Escocia para tratar al arzobispo Hamilton con asma; fue nombrado profesor de medicina en Pavía en 1559, luego en Bolonia en 1562.

Figura 2. Girolamo Cardano. http://www.cosmovisions.com/Cardan.htm

En 1570, una acusación injustificada lo hizo encarcelar; liberado en septiembre de 1574, fue a Roma donde el Papa le pagó una pensión hasta su muerte. Estando en proceso de componer su *Ars marna, sive de regulis algebraicis liber unus* (Nuremberg, 1545), descubre el resultado de esta competencia científica. Le arrebata su secreto a Tartaglia y jura por los Evangelios que nunca lo revelará, pero esta promesa solemne no le impide publicarlo en su *Ars magna…*, mientras hace justicia, es cierto, a los inventores precedentes.

Le arrebata su secreto a Tartaglia y jura por los Evangelios que nunca lo revelará, pero esta promesa solemne no le impide publicarlo en su *Ars magna…*, mientras hace justicia, es cierto, a los inventores precedentes. Además, mientras Tartaglia sabía cómo resolver la ecuación de tercer grado, solo en el caso de una única raíz real, Cardan, mente sutil y matemático brillante, observa que, cuando la fórmula de resolución contiene imaginarios, la ecuación admite tres raíces reales: *este es el primer ejemplo del vínculo entre cantidades reales y cantidades imaginarias que encontrará su pleno desarrollo en el siglo XIX.*

A los veintitrés años, Ferrari, alumno de Cardan, resuelve la ecuación de cuarto grado. Louis Ferrari, matemático, nacido en Bolonia el 2 de febrero de 1522, murió en Bolonia en 1565, envenenado, ¿según se dice?, por su hermana. A la edad de quince años, se convirtió en alumno de Cardan y, tres años después, ya estaba dando clases de matemáticas en Milán. De gran carácter, acababa de perder en una pelea los dedos de la mano derecha. De 1549 a 1556, fue responsable de dirigir las operaciones de catastro en

Figura 3. Recorde. http://www.cosmovisions.com/mathematiquesChrono.htm

el Milanese. Una fístula le obligó a dejar este trabajo y se retiró a Bolonia, donde enseñó matemáticas.

Su vida fue escrita por su maestro cuyas licencias imitó y a cuya ciencia igualó. Le debemos: la primera solución de la ecuación de cuarto grado, que encontró a los veintitrés años en un problema propuesto por Zuane Tonini da Coi (*profesor italiano de Brescia interesado en la resolución de problemas matemáticos, quien propuso a Tartaglia en 1530 dos problemas con ecuaciones de tercer grado que este último todavía no sabía resolver*), y que fue publicada en *Ars magna* de Cardan (1545).

En 1547, comenzó con Tartaglia una famosa disputa que terminó con el juego matemático del 10 de agosto de 1548, en Milán, y que el bresciano contó a su manera. Las seis propuestas de Ferrari y las respuestas de Tartaglia, impresas desde el momento de la disputa, fueron publicadas nuevamente en 1846 por Gherardi y en 1878 (Milán) por Giordani. Los dos adversarios se prodigaban, pero Tartaglia, lo que sea que dijo, no se salió con la suya.

Entre los hombres que, al mismo tiempo, contribuyeron a la mejora del álgebra mediante la introducción de una notación concisa y sistemática, debemos mencionar a Stifel (o Stifelius) y Robert Recorde. El trabajo del primero, titulado *Arithmetica integra,* se publicó en 1544. Stifel adoptó definitivamente los signos + y - (más y menos) ya introducidos por Jean Widmann de Eger, para representar la suma y la resta, así como el *símbolo radical o raíz*. Es nuevamente él quien introduce los exponentes numéricos de las potencias - 3. - 2, - 1, 0, + 1, + 2, +3, etc.

Le debemos a Recorde (1552) la invención del signo de igualdad (=): elige este símbolo porque, dice, no puede haber dos cosas más iguales entre ellas que dos líneas paralelas.

Después de ellos, Raphaël Bombelli (1579) y Richard Steven (1585) merecen, también, ser mencionados. Así se adquiere la resolución algebraica de las ecuaciones de los primeros cuatro grados, las únicas que, en el caso general, se pueden resolver mediante extracciones de raíz, como demostraría, en el siglo XIX, el matemático Abel.

Sin embargo, el Álgebra sigue siendo solo una colección de recetas aisladas, cada una de las cuales tiene como objetivo resolver un problema en particular. De hecho, Tartaglia y Cardan no dan fórmulas para la resolución en el sentido que le damos hoy a esta palabra. Las reglas de Tartaglia se ponen en tres estrofas de nueve líneas, cada una dedicada a describir la secuencia, operaciones destinadas a resolver cada una de las formas de ecuación que escribiríamos hoy.

1.2. Notas sobre álgebra según Viète.

Fig.4. François Viète. http://www.cosmovisions.com/mathematiquesChrono.htm

Hay que significar que el verdadero fundador del álgebra, tal como lo entendemos hoy, fue François Viète. Nacido en Fontenay en Poitou en 1540, fallecido en París en 1603.

Viète, asesor del Parlamento de Bretaña, maestro en París y asesor privado, tenía impresos folletos que a partir de 1571 envió a matemáticos de todos los países. Expone los primeros principios de su método en su *Introducción al arte analítico (Isagoge in artem analyticam).* Su trabajo esencial es la creación del mecanismo algebraico; completando así el método analítico de Platón, *proporciona a las matemáticas su lenguaje, tanto analítico como sintético.*

Antes de él, los matemáticos calculaban solo con números, y lo desconocido solo, con sus poderes, estaba representado por signos, de no ser por las operaciones que incluían letras, y el producto de dos cantidades estuvo representado por un nuevo símbolo, en una palabra, el cálculo algebraico no existía.

> *"Entendemos, dice Michel Chasles en su* Historia de los métodos geométricos*, que este estado restringido e imperfecto no constituía la ciencia algebraica actual, cuyo poder reside en estas combinaciones de signos que complementan el razonamiento de intuición, y llevar por camino misterioso a los resultados deseados. "*

Al representar con letras todas las cantidades conocidas y desconocidas y al someterlas a todas las operaciones que se realizan con los números, Viète constituye en su forma moderna esta *ciencia de símbolos que es el Álgebra*, al mismo tiempo que lenguaje como mecanismo, y lo convierte en un nuevo medio de expresión y un nuevo instrumento de descubrimiento.

Por lo tanto, al transformar un razonamiento particular en una fórmula general, en una ley, contribuye a desarrollar el poder de los métodos matemáticos. Él mismo estudia ecuaciones algebraicas de cualquier grado e imagina la mayoría de las simplificaciones sufridas, que se resolverán antes, la igualdad algebraica. Probablemente conoce la fórmula que desarrolla $(a + b)^n$ y encuentra las fórmulas que expresan *sen (px)*, *cos (p)x* en función de *sen x, cos x* y las aplica al estudio de ciertas ecuaciones algebraicas. Da una expresión en forma de un producto infinito que, sin tener ningún valor para el cálculo práctico, es el primer ejemplo preciso de este uso de desarrollos que, en el siglo siguiente, marcará un progreso tan grande en el análisis matemático. En geometría, resuelve con

Figura 5. Simón Stevin. https://www.biografias.es/famosos/simon-stevin.html

singular elegancia el problema de conducir un círculo tangente a tres círculos dados.

1.3. Un breve bosquejo sobre la matemática en Simón Stevin

Simón Stevin, a veces también llamado Simón de Brujas, o incluso Stephanu, es un matemático y mecánico flamenco, nacido en Brujas en 1548, ¿muerto en La Haya? o ¿en Leiden? en 1620.

Primero contable con un comerciante rico, luego fue empleado por la administración financiera en Brujas, luego emprendió un largo viaje por Europa y, después de una corta estancia en Middelburg, se estableció en Leiden (1583) donde enseñaba matemáticas.

En el estudio del equilibrio de sólidos, no había habido progreso desde Arquímedes: Stévin encuentra, para el plano inclinado, la relación entre la fuerza motriz y el peso del cuerpo. Sabe cómo representar fuerzas por segmentos de línea (vectores) y dar, antes de Varignon, la regla de composición de fuerza que es la base de la mecánica. Continuando en hidrostática, demuestra que un líquido puede ejercer en el fondo de un jarrón una presión mayor que su propio peso. Esta es la paradoja hidrostática cuyo descubrimiento a menudo se atribuye a Pascal. Así, en el fructífero camino de la aplicación de las matemáticas a la mecánica, Stévin precede a Galileo.

También le debemos a Stévin el uso del cálculo de fracciones decimales, que es como el complemento natural de nuestro sistema numérico. (¡Otros atribuyen este sistema a Regiomontanus!).

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

La geometría clásica se consolidó gracias, fundamentalmente, al trabajo de Euclides quien en su obra titulada "Los Elementos" reunió todo el conocimiento matemático de su época, lo organizó y, lo más importante de todo, lo formalizó. La Geometría se modeló, si se me permite la expresión, como un sistema de enunciados que se demuestran a partir de cinco postulados considerados como verdades evidentes y que se llaman axiomas. Con el paso del tiempo, "Los Elementos" de Euclides se convirtieron en un modelo a seguir en el desarrollo de las matemáticas y la geometría se consideró el cimiento o la base sobre la cual debería sustentarse su desarrollo.

Es interesante la lectura del artículo, *La enseñanza de la Geometría)* de Silvia García y Olga Leticia López. México.2008.

Coincido en su planteamiento general, en referencia a la enseñanza de la geometría, comentado en muchas ocasiones con colegas de diferentes niveles de enseñanza, que deberíamos en la elaboración de los planes de estudio dar respuesta, de manera clara y contundente, a las siguientes cuestiones, entre otras:

- ¿Qué formación tenemos los profesores en Geometría?
- ¿Relación entre geometría y la realidad circundante?
- ¿Es necesario aprender geometría?
- ¿Cuál es el grado de conocimientos de las herramientas geométricas que disponen los alumnos ara su aplicación a la resolución de problemas?
- ¿Es adecuado el diseño de actividades de geometría en el aula?
- ¿Compatibilidad en el uso de las herramientas que nos proporciona la ingente cantidad de software desarrollados para la enseñanza de la geometría?
- ¿Por qué el olvido de la enseñanza de la geometría clásica?
- ……
- Una vez más, en esta ocasión, dos ejercicios con las figuras básicas como eje central de la propuesta: *el triángulo y el cuadrado*.

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 103)

*Ejercicios propuestos en la Olimpiada Matemática Nacional Española
http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimmain.html

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

JOYITA*: a) *En el interior de un cuadrado ABCD se construye el triángulo equilátero ABE . Sea P el punto intersección de las rectas AC y BE. Sea F el punto simétrico del P respecto de la recta DC . Se pide demostrar que:*

1. El triángulo *CEF* es equilátero.
2. El triángulo *DEF* es rectángulo e isósceles.
3. El triángulo *BDF* es isósceles.
4. El triángulo *PDF* es equilátero.

SOLUCIÓN

FE DE ERRATA: En el anterior número 103 hay que corregir la propuesta hecha por la que aparece en las líneas ut-supra.

Consideremos la imagen adjunta en la que se representa las figuras que se presentan

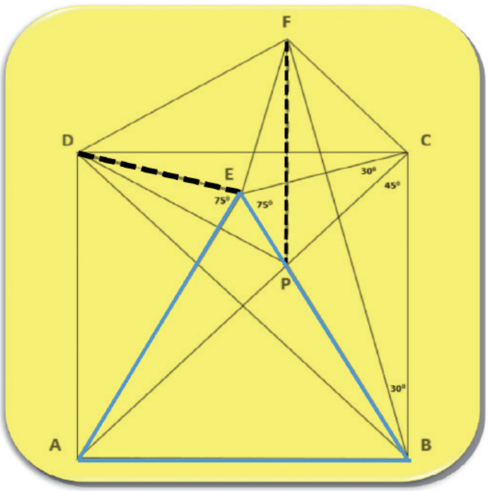


Figura 6.Cuadrado ABCD. Triángulo ABE.

Paso 1

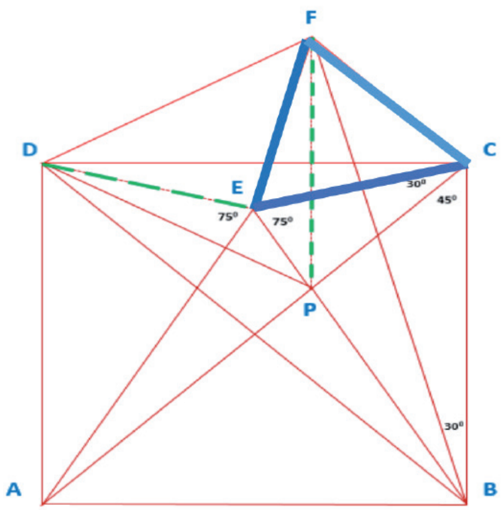


Figura 7. Triángulo CEF.

1) Fijemos inicialmente la atención en el triángulo isósceles $\overset{\triangle}{BEC}$, como se ha construido, BE=BC, por lo tanto, los ángulos en la base son iguales a 75º.

El ángulo en B, $\widehat{EBC}$ =90º-60º=30º

Por lo tanto, resulta que

$$\widehat{EBC} = \widehat{ECB} - \widehat{PCB} = 75º\text{-}45º\text{=}30º$$

De aquí sigue que los triángulos $\overset{\triangle}{CEP}$ y $\overset{\triangle}{BEC}$ son semejantes, y siendo isósceles este último, se infiere que también lo es el triángulo $\overset{\triangle}{CEP}$ en el que los lados CE y CP son iguales.

Dado que *CD* es mediatriz del segmento *PF*, es *CP=CF*, se tiene que *CE=CF*.

Ahora,

$$\widehat{ECB} = \widehat{ECD} + \widehat{DCF} = (90\text{ o} - \widehat{BCE}) + \widehat{PCD} = (90º\text{ -}75º) +45º =60º$$

Deducimos que el triángulo $\widehat{CEF}$ es equilátero.

Paso 2

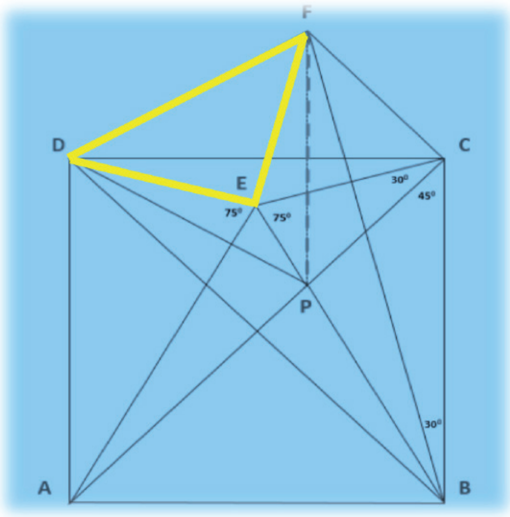


Figura 8. Triángulo DEF

2) Observemos que los lados: *DE* = *EC* = *EF* y

$$\widehat{DEA} + \widehat{AEB} + \widehat{BEC} + \widehat{CEF} = 75º + 60º +75º +60º =270º$$

De aquí que *DE= EF y el ángulo* $\widehat{DEF}$ $= 360^{o} - 270^{o} = 90$ y por lo tanto el triángulo

$\widehat{DEF}$ es isósceles y rectángulo.

Paso 3

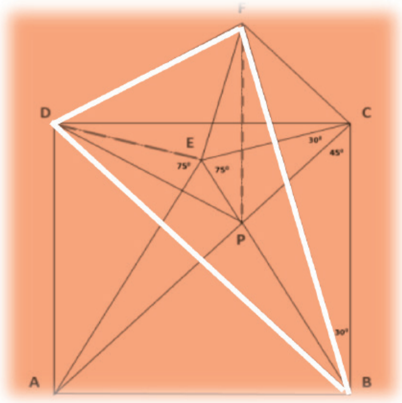


Figura 9. Triángulo BDF

3) En el caso que nos proponen se tiene que porque los triángulos $\widehat{BED}$ y $\widehat{AEC}$ son idénticos. Se sigue que los triángulos $\widehat{BCF}$ y $\widehat{BED}$ son iguales porque tienen iguales dos lados y el ángulo mide 135º. Se tiene que $BF = BD$ y por lo tanto, el triángulo $\widehat{BDF}$ es isósceles.

Paso 4

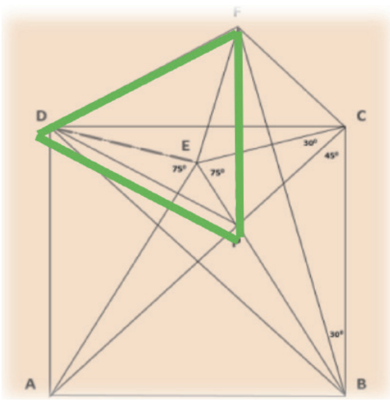


Figura 10. Triángulo PDF

4) Los lados $PF = FD$ por ser iguales los triángulos rectángulos $\widehat{DEF}$ y $\widehat{PCF}$. Por otro lado, se tiene que

$$\widehat{DFP} = \widehat{DFE} + \widehat{EFP} = \widehat{DFE} + (\widehat{EFC} - \widehat{PFC}) = 45º + (60º - 45º) = 60º$$

Y de aquí, podemos afirmar que el triángulo $\widehat{PDF}$ es equilátero.

JOYITA: b) *En el triángulo MNP, el área S y el ángulo en P son conocidos. Hallar el valor de los lados m y n para que el lado p sea lo más pequeño posible.*

SOLUCIÓN

Paso 1

Vamos a abordar la solución utilizando el teorema del coseno que como sabemos es una generalización del teorema de Pitágoras.

Consideremos el triángulo dado $\widehat{BED}$ cualquiera,

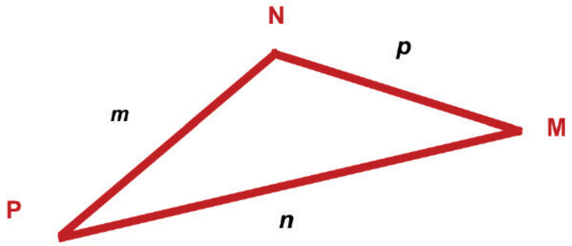


Figura 11. Triángulo MNP

En nuestro caso se tiene, aplicado al lado p

$$p^2 = m^2 + n^2 - 2mn.\cos(P)$$

$$p^2 = m^2 + n^2 - 2mn.\cos(P) = (m - n)^2 + 2mn[1-\cos(P)]$$

Paso 2

Por otro lado, se tiene que el área del triángulo en función del seno de un ángulo podemos expresarlo así

$$S = \frac{1}{2} m.n.sen(P) \Rightarrow m.n = \frac{2S}{sen(P)}$$

De aquí se deduce, sustituyendo el valor del producto *mn* que

$$p^2 = (m-n)^2 + 2.\frac{2S}{sen(P)}.\left[1-\cos(P)\right] = (m-n)^2 + \frac{4S}{sen(P)}.\left[1-\cos(P)\right]$$

$$p^2 = (m-n)^2 + \frac{4S}{sen(P)}.\left[1-\cos(P)\right]$$

Paso 3

El valor mínimo se obtendrá cuándo $m=n$, entonces de la expresión

$$m.n = \frac{2S}{sen(P)} \Rightarrow m.n = m^2 = \frac{2S}{sen(P)} \Rightarrow m = n = \sqrt{\frac{2S}{sen(P)}}$$

En definitiva, se concluye que los valores para m y n que hacen que el lado p sea lo más pequeño posible es

$$m = n = \sqrt{\frac{2S}{sen(P)}}$$

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la propuesta de los ejercicios del número anterior 103)

*Ejercicios propuestos en la Olimpiada Matemática Nacional Española
http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimmain.html

Ya hemos comentado en varias ocasiones que la Teoría de Números, denominada *La Reina de las Matemáticas*, es la rama de las Matemáticas más antigua y que modernamente usa conceptos y herramientas de las más diversas ramas de las Matemáticas, como el Álgebra, la Geometría, el Análisis, la Variable Compleja, etc. Es la rama de las matemáticas que estudia los números naturales y una parte del álgebra en la que se estudian las operaciones en el conjunto de los números enteros (Z), que no arrojan resultados fuera de dicho conjunto.

Según esta amplia definición, la teoría de números incluye gran parte de las matemáticas, en particular del análisis matemático. Sin embargo, normalmente se limita al estudio de los números enteros y, en ocasiones, a otros conjuntos de números con propiedades similares al conjunto de los enteros.

A lo largo de los números anteriores en esta sección he presentado algunos problemas que son fácilmente entendibles por todos, incluidos, también, los no matemáticos.

En esta ocasión presento la solución de dos Joyitas Numéricas: una que aborda el concepto de congruencias de números naturales; y la segunda utiliza los conceptos de desigualdad y potencias de números naturales.

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

JOYITA: a) *Demuestra que el número* $2222^{5555}+5555^{2222}$ *es múltiplo de* **7.**

SOLUCIÓN

Paso 1

Vamos a utilizar el concepto de congruencia, utilizado en la teoría de números, en general para decir que dos números enteros p y q son congruentes si tienen el mismo resto al dividirlos por un número natural $m\neq 0$, lo expresaremos así

$$p \equiv q \ (mod\ m\ ).$$

Paso 2

En nuestro caso, tenemos las siguientes congruencias módulo 7:

a) Para el número 2222

$$2222^0 \equiv 1(\text{mod}7)$$
$$2222^1 \equiv 3(\text{mod}7)$$
$$2222^2 \equiv 2(\text{mod}7)$$
$$2222^3 \equiv 6(\text{mod}7)$$
$$2222^4 \equiv 4(\text{mod}7)$$
$$2222^5 \equiv 5(\text{mod}7)$$
$$2222^6 \equiv 1(\text{mod}7)$$

con un ciclo de longitud 6.

b) Para el número 5555

$$5555^0 \equiv 1(\text{mod}7)$$
$$5555^1 \equiv 4(\text{mod}7)$$
$$5555^2 \equiv 2(\text{mod}7)$$
$$5555^3 \equiv 1(\text{mod}7)$$

con un ciclo del 1ongitud 3.

De aquí se deduce que tomando las referencias de los ciclos 6 y 3, respectivamente, en 2222 y 5555:

$$2222=3.740+2$$
$$5555=6.925+5$$

De aquí sigue que:

$$2222^{5555} \equiv 2222^{5} (\mathrm{mod}7) \Rightarrow 2222^{5} \equiv 5 (\mathrm{mod}7).$$
$$5555^{2222} \equiv 5555^{2} (\mathrm{mod}7) \Rightarrow 5555^{2} \equiv 2 (\mathrm{mod}7).$$

Paso 3

Deducimos de las expresiones anteriores que

$$2222^{5} + 5555^{2} \equiv 7 (\mathrm{mod}7).$$

Por lo tanto, el número $2222^{5} + 5555^{2}$ es múltiplo de 7.

JOYITA: b) *Se pide encontrar todos los números enteros positivos n tales que $3^n + 5^n$ es múltiplo de $3^{n-1} + 5^{n-1}$.*

SOLUCIÓN

Paso 1

Elijamos un número cualquiera n:
Se verifica que la expresión: $3^n + 5^n$ es mayor que el número $3.3^{n-1} + 3.5^{n-1}$

$$3^n + 5^n = 3.3^{n-1} + 5^n = 3.3^{n-1} + 5.5^{n-1} > 3.3^{n-1} + 3.5^{n-1} = 3(3^{n-1} + 5^{n-1})$$

Paso 2

Por otro lado: $3^n + 5^n$ es menor que $5.3^{n-1} + 5.5^{n-1}$

$$3.3^{n-1} + 5.5^{n-1} < 5.3^{n-1} + 5.5^{n-1} = 5(3^{n-1} + 5^{n-1})$$

Es decir

$$3.3^{n-1} + 3.5^{n-1} < 3^n + 5^n < 5.3^{n-1} + 5.\ 5^{n-1}$$
$$3(3^{n-1} + 5^{n-1}) < 3^n + 5^n < 5(3^{n-1} + 5^{n-1})$$

Por lo tanto, al tratarse de un número entero positivo se tiene que

$$3^n + 5^n = 4(3^{n-1} + 5^{n-1})\ 3.3^{n-1} + 5.5^{n-1} = 4(3^{n-1} + 5^{n-1}) = 4.3^{n-1} + 4.\ 5^{n-1}$$
$$3.3^{n-1} + 5.5^{n-1} = 4.3^{n-1} + 4.\ 5^{n-1} \Leftrightarrow 5^{n-1} = 3^{n-1}$$

Paso 3

De la expresión $5^{n-1} = 3^{n-1}$ podemos inferir que el único valor que lo cumples es $n=1$.
Para $n=1$ se tiene que $3^1 + 5^1 = 8$ es múltiplo de $3^0 + 5^0 = 1 + 1 = 2$ y se convierte en la única solución.

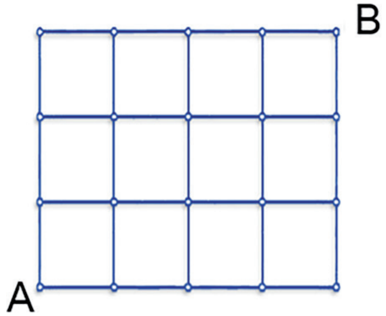
SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS.

Para hacer realidad lo que expresaba en el número anterior: "… *Desarrollar las habilidades matemáticas que poseen los alumnos y simultáneamente cubrir los objetivos más allá del curso. (Dichos objetivos rara vez mencionan a las habilidades, reduciéndose a la adquisición de conocimientos y manipulación de fórmulas para aplicaciones en problemas sencillos) ..., e ...Impulsar a los estudiantes que tienen habilidades matemáticas e interés por aprender más profundamente esta ciencia...(sic)"*, propongo las cuatro joyitas que aparecen a continuación.

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

a) *El ángulo A del triángulo isósceles ABC mide 2/5 de recto, siendo iguales sus ángulos B y C. La bisectriz de su ángulo C corta al lado opuesto en el punto D. Calcular las medidas de los ángulos del triángulo BCD. Expresar la medida **a** del lado BC en función de la medida **b** del lado AC, sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas***.**

b) *La figura adjunta muestra un plano con calles que delimitan 12 manzanas cuadradas.*



Una persona P va desde A hasta B y otra Q desde B hasta A. Ambas parten a la vez siguiendo caminos de longitud mínima con la misma velocidad constante. En cada punto con dos posibles direcciones a tomar, ambas tienen la misma probabilidad. Hallar la probabilidad de que se crucen.

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

a) *Calcular la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale -1, y que la suma de los términos de lugar par vale +1.*

b) *Hallar todos los números enteros positivos m y n para los que*

$$(m+1)^m = 2m^n + 3m + 1$$

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@gmail.com