¿Por qué enseñar la noción de fractal en el último año de la escuela secundaria? Opiniones de especialistas en Geometría

Florencia Fusi
EEM2, EES1, EES3, EES13, EET1 e
Instituto Santa María de San Pedro (Argentina)
florchiz13@hotmail.com
Natalia Sgreccia
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina)
nataliasgreccia@hotmail.com

Resumen: *El concepto "Noción de fractal" fue incorporado en la última reforma educativa del Diseño Curricular de Matemática para sexto año de secundaria de la Provincia de Buenos Aires (Argentina). Su inclusión se justifica por el encanto estético que poseen los fractales y su potencial para integrar contenidos matemáticos. Pero, docentes sin formación específica y bibliotecas escolares desprovistas de bibliografía podrían opacar estas intenciones. Ante ello, en la presente investigación cualitativa de alcance exploratorio-descriptivo, se procedió a reconocer la voz de tres especialistas en Geometría acerca de la incorporación del tema en el último año de la escolaridad obligatoria.*
Palabras clave: *fractal, Geometría, secundaria, currículum.*

Why teach the notion of fractal in the last year of secondary school? Opinions of specialists in Geometry

Abstract: *The concept of "Fractal notion" was incorporated into the latest educational reform of the Mathematics Curriculum Design for the sixth year of secondary school in the Province of Buenos Aires (Argentina). Its inclusion is justified by the aesthetic charm*

that fractals possess and their potential to integrate mathematical contents. But, teachers without specific training and school libraries devoid of bibliography could obscure these intentions. Given this, in the present qualitative research of exploratory-descriptive scope, we proceeded to recognize the voice of three specialists in Geometry about the incorporation of the subject in the last year of compulsory schooling.
Keywords: *fractal, Geometry, secondary, curriculum.*

PRESENTACIÓN

En un comienzo los fractales eran considerados, simplemente, curiosidades matemáticas. Si bien su existencia se conoce desde fines del siglo XIX, su verdadera identidad no fue plenamente expresada hasta el período entre 1960 y 1970.

Los fractales fueron concebidos aproximadamente en 1890 por el francés Henri Poincaré, el primero en estudiar las ecuaciones de sistemas impredecibles, dándose cuenta que estaban fuertemente influenciadas por las condiciones iniciales, de forma que, aún cuando se cumplían las leyes deterministas newtonianas, era imposible calcular sus soluciones, ya que la información inicial se iba perdiendo y el sistema se iba volviendo impredecible. Sus ideas fueron extendidas más tarde por dos matemáticos también franceses, Gastón Julia y Pierre Fatou, hacia 1918. Ellos se plantearon el problema de determinar qué sucede con un punto z cuando se le aplica iteradamente una transformación, es decir, estudiaron la órbita de z en un sistema dinámico. Además, Julia fue quien explicó cómo se pueden generar los fractales a través de cualquier función compleja y señaló que se trata de un conjunto cuya frontera sería imposible dibujar a pulso por ser de longitud infinita.

Se trabajó mucho en este campo durante varios años, pero el estudio quedó congelado en 1920. Gracias a los importantes estudios en la Universidad de Yale en el año 1974 de Benoît Mandelbrot, un matemático francés de origen polaco (1924-2010) que trabajaba en la empresa multinacional estadounidense de tecnología IBM (*International Business Machines*), este estudio fue renovado. El desarrollo de la computadora digital provocó un fuerte impulso y le permitió a Mandelbrot dibujar las curvas fractales.

La parte más importante de su trabajo comenzó en 1960, cuando encontró la forma de analizar dos importantes fenómenos irregulares. En primer lugar, llegó a una representación matemática de la variación de las crisis en los mercados del algodón, del trigo e incluso en el bursátil. Este modelo matemático permitía demostrar cómo se comportaban los precios y cómo variaban de modo discontinuo, de un día para otro, ya que si los precios caían un día, al día siguiente tendían a recuperarse. Las consecuencias fueron muy interesantes e importantes. En segundo lugar, interesado en la turbulencia y en la variación de su intensidad, elaboró un modelo para describir cómo el clima puede estar bien en determinado momento y cada tanto registrar un fenómeno de vientos y ocasionalmente tornados extremadamente fuertes, algunas veces destructivos (Bransleły, 1993).

A Mandelbrot le fascinaba la idea de buscar la simplicidad en el desorden. Halló la naturaleza más ordenada, organizada y atractiva a través de la Geometría Fractal. Le llamó considerablemente la atención el título de un trabajo del año 1967 de Lewis Richardson: *¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?*, considerada hoy como la pregunta precursora del origen del concepto “fractal”. Mandelbrot llegó a la conclusión de que no se puede determinar esta longitud puesto que la costa británica es un patrón complejo y no hay manera de medir las hondonadas y penínsulas pequeñas de la costa, simplemente porque una figura con bordes rectos o redondeados tiene una longitud menor que otra equivalente pero llena de rugosidades, independientemente del instrumento de medición que usemos.

Mandelbrot es considerado el padre de este campo de investigación relativamente reciente llamado “Geometría Fractal” y, además, fue él quien acuñó en 1975 -cuando aún no existía un nombre para estas formas conocidas como “monstruos geométricos” que amenazaban con hacer tambalear los pilares- el término “fractal”, proveniente del vocablo latino “fractus” y que significa “fracturado” o “quebrado”.

En su libro *The fractal Geometry of Nature* (Mandelbrot, 1997), objeta el hecho de que la Geometría Euclídea estudia formas ideales, suaves, lejanas a las que realmente se encuentran en la naturaleza. “Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y la corteza de los árboles no es lisa y tampoco los relámpagos viajan en línea recta… La naturaleza no solamente exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad” (p.15).

Muchas aplicaciones demuestran que la Geometría Fractal forma parte de la Matemática, de las ciencias y de las artes; tal es así que el matemático Michael Barnsley (1988) asegura que la Geometría Fractal cambiará a fondo la visión de las cosas. Sostiene que jamás se volverá a pensar lo mismo de los objetos, arriesgándose a perder definitivamente la imagen inofensiva que se tiene de nubes, bosques, galaxias y de muchas otras cosas. Los fractales revelan más acerca del caos oculto dentro de la regularidad, pues no solo se refieren a aspectos específicos de la naturaleza sino a una irregularidad organizada.

Por otro lado, el Ciclo Superior de la escuela secundaria representa para los jóvenes la oportunidad de profundizar contenidos matemáticos anteriores, evitando las definiciones abstractas, los procedimientos mecánicos, desarrollos unívocos y acabados que contribuyen a colocar la materia en un lugar casi inalcanzable para las personas. Esto se ve reflejado en la propuesta del Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires (Dirección General de Cultura y Educación, 2011), Argentina, que considera a la disciplina como parte de la cultura, y valora a los alumnos como hacedores de la misma.

El Diseño Curricular de sexto año de secundaria organiza los contenidos de la materia Matemática del Ciclo Superior en cuatro ejes. Uno de ellos es Geometría y Álgebra y uno de los contenidos mínimos a abordar es “Noción de fractal”[1]:

> La Noción de fractal posee modelos matemáticos donde los alumnos verán contenidos trabajados a lo largo de su escolaridad, pero aplicados con ciertas particularidades -como Geometría, sucesiones, transformaciones, matrices, ecuaciones exponenciales y Noción de límite de sucesiones-. Los fractales también modelizan objetos que exhiben una estructura a varios niveles de escala y se utilizan en la gráfica computarizada, que en ciertos casos describen formas de la naturaleza: Helge Koch mostró una curva con perímetro infinito, que encierra una

1. Esta incorporación es acorde a lo sucedido en el currículum oficial de otros países alrededor del mundo (Karakus, 2013).

región del plano de área finita, representada por una figura con forma de copo de nieve (Dirección General de Cultura y Educación, 2011, p.13).

Entre opiniones de docentes de sexto año en ejercicio encontramos:

Lo que pasa es que lo complicado es el tiempo que te puede llevar esto, si lo querés hacer transversal encontrar coordinación en tiempo y en onda, que te den bolilla.

Hay veces que los chicos te dicen "¿esto para qué me va a servir?", yo siempre tengo una respuesta. El tema va a ser cuando te digan "¿para qué vamos a utilizar los Fractales?".

Sería un desafío si debiera enseñarlo. Primero tendría que estudiarlo yo.

El concepto de Geometría Fractal no es algo para lo que estén preparados los alumnos para afrontar en la actualidad.

Los docentes me parece no fuimos capacitados para hacerlo y por eso evitamos darlo.

Frente a este panorama surgió la necesidad de realizar investigación educativa al respecto (Fusi, 2015). El Diseño Curricular anticipa que los alumnos del último año de la escuela secundaria verán allí reflejados los contenidos trabajados a lo largo de su escolaridad, pero también aclara que para ello deberán aplicar ciertas propiedades que hagan del tema algo asequible. La "Noción" aludida procura englobar la Geometría (Euclídea) previamente tratada en la escolaridad. Así como mediante los números complejos se trata de dar un cierre a los conjuntos numéricos, con la Geometría Fractal se estaría dando un marco más amplio de lo conocido hasta el momento.

Desde las disposiciones curriculares se fomenta dejar al alcance del alumno las herramientas de la Geometría Fractal. Esto podría revolucionar la enseñanza de la Geometría en las escuelas. Asimismo la complejidad de tal pretensión podría devenir en una dificultad para los docentes, quienes en muchos casos no han estudiado el tema en su carrera de grado.

Por ello interesa dilucidar los posibles aportes en la formación matemática del estudiante al incorporar el tema en el último año de la escuela secundaria. Y, esto, desde la perspectiva[2] de especialistas matemáticos dedicados a la Geometría y su enseñanza en nivel superior. En efecto, se irán recorriendo sus pareceres en torno a asuntos de interés para los que fueron especialmente convocados.

Se espera que este material aporte a los profesores en ejercicio en la escuela secundaria así como en la etapa de formación docente, en tanto horizonte en el conocimiento matemático en cuestión (Ball y Bass, 2009) que comprende una conciencia del profesor acerca del contenido fractal a través del curriculum, más allá de cierta clase o contenido en particular. De este modo se presentan de manera sucinta algunos trabajos que dan cuenta de un estado de avance sobre el tema, posteriormente se delimita el concepto de fractal presentándose las principales características y algunos ejemplos. Se recorren las categorías de análisis (asuntos de interés), para cerrar el artículo con las principales conclusiones y propuestas posibles para continuar el trabajo.

2. El trabajo completo (Fusi, 2015) comprende otras dos perspectivas: de las autoras del Diseño Curricular y de los docentes de sexto año en ejercicio de una localidad bonaerense. En esta ocasión se efectuó un recorte.

Algunos trabajos de interés

Fue posible identificar dos tipos de trabajos relativos al tema: aquellos que estudian la teoría fractal y aquellos que presentan propuestas de enseñanza para la escuela secundaria.

Entre los primeros encontramos el aporte de Nápoles y Palomá (2012) quienes clasifican los fractales según su origen en tres categorías: matemáticos, naturales y humanos. Por su parte, Garbin y Mireles (2009) presentan un estudio sobre la noción de dimensión, realizado a partir de tres acercamientos: histórico-epistemológico, del discurso escolar y cognitivo. Así también Spinadel (2003) explica que la dimensión fractal indica el grado según el cual el objeto fractal llena la dimensión euclídea en la que está inmerso, marcando de alguna manera la medida de la irregularidad. Por su parte, Thompson (2000) sugiere estudiar la dimensión fractal como una generalización de la dimensión euclídea, lo que requiere interiorizarse acerca de la relación entre escala y replicación. En términos más generales, Quezada (2005) se refiere a la Geometría Fractal como novedosa por su utilidad en la descripción de diversos objetos y sistemas como también por la estética de sus formas infinitas, y Martín (2003) sugiere pensar que hasta las situaciones más confusas se pueden llegar a entender, teniendo en cuenta que la mayoría de las leyes de la naturaleza son no lineales y potencialmente caóticas.

Entre las propuestas de enseñanza de fractales en el nivel medio se destacan los aportes de Castro, Díaz y Palacios (2011) quienes presentan una secuencia didáctica para la enseñanza de semejanza utilizando fractales. Puntualizando en dimensión fractal, Reyes (2009) la trabaja empleando software matemático del tipo GeoGebra, y Comas y Herrera (2010) comparten una experiencia en la que estimaron la dimensión fractal de los contornos de las localidades a las que pertenecen sus estudiantes y compararon sus rugosidades. De manera más amplia, Sardella, Zapico y Berio (2006) relacionan variados contenidos en su propuesta, tales como funciones, transformaciones geométricas y operatoria con números racionales. También, Oviedo, Kanashiro y Benzaquen (2006) sugieren acercarse a la noción de infinito a partir de la visualización de ciertos fractales, como el copo de nieve (o curva de Koch, Fig. 4). Redondo y Haro (2004) presentan conceptos de Geometría Fractal y de la teoría del caos de manera breve y sencilla, fomentando el aprendizaje por descubrimiento. Por su parte, Moreno (2002) apuesta al carácter manual de las construcciones fractales para despertar el interés de los estudiantes y favorecer su capacidad de formalización y abstracción.

Figueiras, Molero, Salvador y Zuasti (2000) muestran actividades donde se trabaja con fractales y varios conceptos, subrayando que el estudio de fractales resulta motivador en el alumnado debido a la estética de sus diseños. Particularmente Moreno (2017) comparte una experiencia en que los estudiantes construyen colaborativamente una escultura del triángulo de Sierpinski (Fig. 2) con latas pintadas y encastradas para adornar el frente de la escuela. Asimismo Martín, Parra y Fanaro (2019) relevan que habitualmente se sigue un enfoque tradicional en la enseñanza de los fractales, por lo que deciden implementar en el último año de una escuela secundaria rural actividades de estudio e investigación, a partir de la generación de preguntas, subpreguntas y respuestas, con el fin de generar un fractal teórico. También Karakus (2013) examina cómo los estudiantes entienden los fractales dependiendo de su edad. Puntualmente realiza un estudio en tres cursos consecutivos de secundaria con pruebas de distintos niveles. Las mayores complejidades aparecieron al tener que encontrar reglas de patrones y formularlas.

Concepto de fractal

Cuando hablamos de fractal nos encontramos ante un concepto geométrico para el cual no existe una definición precisa, ni una teoría única ni comúnmente aceptada. Mandelbrot (1997) asegura que los fractales son figuras geométricas irregulares que no pueden ser descriptas en términos geométricos tradicionales. Al respecto ha indicado: “Algunos conjuntos fractales son curvas, otros son superficies, todavía otros son nubes de puntos deshilvanados y aún otros son formados de una manera tan rara que para ellos no hay buenos términos en las ciencias o en las artes” (p.15).

Asimismo es caracterizar a los fractales a través de propiedades fundamentales que los identifican (Fig. 1).

Figura 1. Propiedades de los fractales

La definición de autosimilitud trae aparejadas otras propiedades, tales como la linealidad o no. En particular, los fractales lineales se construyen con un simple cambio en la variación de sus escalas, lo que implica que son exactamente idénticos en todas sus escalas hasta el infinito. El triángulo de Sierpinski (Fig. 2) y la curva de Koch (Fig. 4) son ejemplos de fractales lineales.

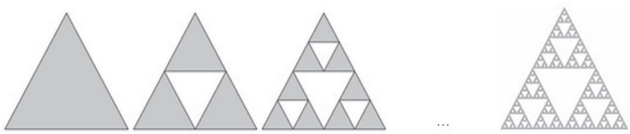

Figura 2. Proceso de construcción del triángulo de Sierpinski

El *triángulo de Sierpinski* fue ideado por Waclaw Sierpinski en 1915, partiendo de un triángulo equilátero de lado 1 (figura inicial, semilla) al que se le aplican construcciones geométricas sencillas. Análogamente, pero partiendo de un cuadrado, se conoce a la *alfombra de Sierpinski* (Fig. 3).

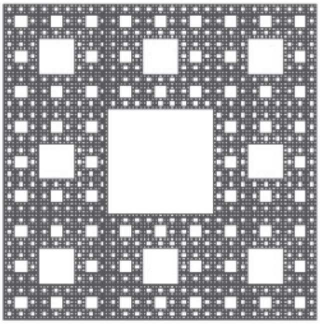

Figura 3. Alfombra de Sierpinski

Resulta interesante comentar también que en el trabajo de Darias y Batista (2015), estudiantes de secundaria realizan video creaciones explicando los conceptos involucrados. En una de ellas surge un nuevo fractal que consiste en una construcción con circunferencias (tres inscriptas en otra recursivamente) que, al aumentar las iteraciones, se asemeja a un triángulo de Sierpinski pero no tiene ni un tramo rectilíneo.

La *curva de Koch* fue ideada por Helge Von Koch en 1904 como ejemplo de curva de longitud infinita contenida en un recinto acotado y sin tangente en cualquier punto. La curva de Koch es la curva a la que se van aproximando las sucesivas poligonales que resultan en cada paso.

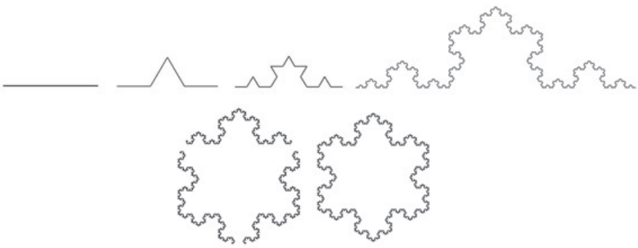

Figura 4. Proceso de construcción de la curva de Koch

Los fractales no lineales, en cambio, son aquellos que se generan a partir de distorsiones complejas, no lineales, como su nombre lo indica. Tienen su origen en los números complejos y en su mayoría son fractales puramente matemáticos o naturales. Ejemplos de ellos son el conjunto de Julia (autosimilar) y el de Mandelbrot (cuasi-autosimilar).

Los *conjuntos de Julia* (Fig. 5) son fruto de los trabajos de Pierre Fatou y Gastón Julia en los años 1920. Julia estudió el método iterativo $z_{n+1}=z_n^2+c$, siendo z_k números complejos y c una cierta constante también compleja. Algunos de estos conjuntos son de una única pieza (conexos), mientras que otros están separados en varios trozos (disconexos), que podrían ser hasta infinitos.

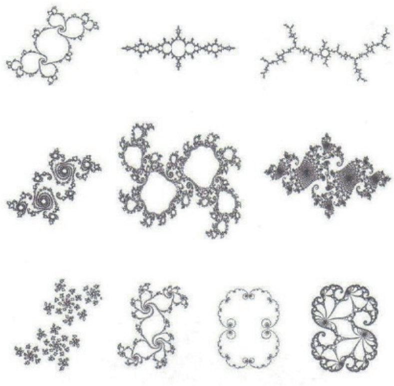

Figura 5. Conjuntos de Fatou y de Julia

Mandelbrot estudió los valores de c para los que el conjunto de Julia era conexo y encontró que la disposición de estos números complejos en el plano tenía una estructura realmente interesante: el conjunto de Mandelbrot (Fig. 6), presentado en la década de 1970 pero visualizado una década más tarde, cuando pudo representarse gráficamente con una computadora.

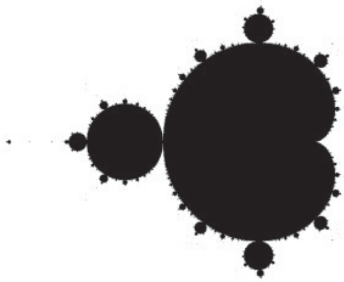

Figura 6. Conjunto de Mandelbrot

Tiene dos propiedades que han despertado gran curiosidad: el conjunto es conexo (demostrado por A.Douady y J.H.Hubbard entre 1984 y 1985); en cada ampliación las estructuras que se repiten son cada vez más filamentosas, lo que permite saber en qué escala se está.

El fractal considerado más simple, y también el primero en ser conocido, es el *conjunto de Cantor* (Fig. 7), introducido en el año 1883 por Georg Cantor cuando intentaba caracterizar lo que es un conjunto continuo, es decir, denso en todas partes. Pensaba que todo conjunto perfecto (conjunto cerrado tal que todos sus puntos son puntos de acumulación, o sea, no tiene puntos aislados) debía ser continuo. Pero encontró el conjunto en cuestión, que es perfecto pero no denso en ninguna parte. Es considerado por los matemáticos como un conjunto de propiedades paradójicas: tiene infinitos puntos pero longitud nula; es totalmente disconexo, es decir, entre dos puntos siempre hay infinitos puntos que no pertenecen al conjunto (Reyes, 2006).

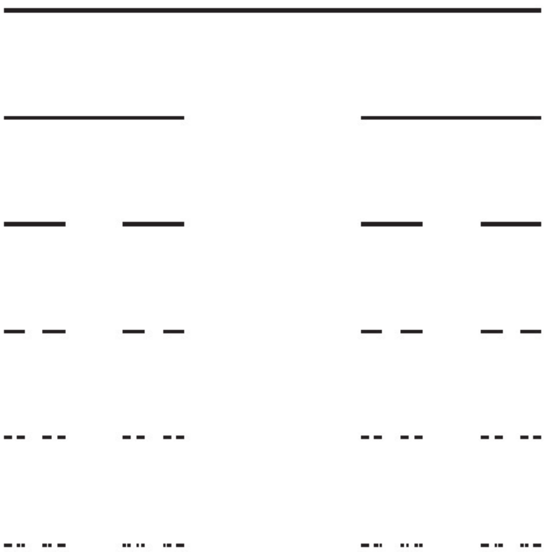

Figura 7. Proceso de construcción del conjunto de Cantor

Aunque las simulaciones matemáticas pueden repetir fragmentos y dimensiones de manera infinita, los fractales pueden ser identificados en cualquier parte del mundo natural (la naturaleza repite fragmentos de forma limitada y con pequeñas deformaciones). No son exactamente autosemejantes, sino tan solo al azar, en forma estadística o estocástica (Spinadel, 2003). Asimismo, sean naturales o geométricos, todos los fractales poseen dimensión no entera. De esta manera los fractales, según su origen, se clasifican como (Nápoles y Palomá, 2012):

- Matemáticos: definidos por fórmulas o expresiones matemáticas, que permiten generar su imagen por computadoras.
- Naturales: objetos reales que pueden definirse por un modelo matemático fractal (nube, costa, sistema circulatorio).
- Humanos: creaciones humanas que no pueden ser estudiadas mediante herramientas "clásicas". Por ejemplo, secciones de las pinturas del norteamericano Jackson Pollock (Fig. 8).

Científicos australianos (R.P.Taylor, A.P.Micolich y D.Jones) anunciaron en 1999 que los cuadros de Pollock tenían estructuras fractales, generadas tanto por la manera de escurrir la pintura (*dripping*) como por la configuración geométrica que seguían los regueros que derramaba el pintor en sus vuelos alrededor del cuadro. Cabe reportar la

Figura 8. Jackson Pollock, N° 5, 1948

experiencia compartida por Comas y Pérez-Nieto (2017), denominada "Reinterpretando a Pollock". Junto a estudiantes de secundaria estiman la dimensión fractal en obras artísticas a partir de las líneas presentes en cuadros contemporáneos seleccionados del Museo Thyssen-Bornemisza (Madrid). Ponderan que este tipo de actividades contribuye a entender y valorar tanto al Arte como a la Matemática.

Finalmente se destaca que formalmente no existen fractales en la naturaleza ni producidos por el hombre, ya que al ser los procesos finitos no se cumple la autosemejanza. Por otro lado, la Geometría Fractal permite abrir la puerta, dando respuesta a numerosas conjeturas sobre la complejidad del mundo, a la teoría del caos. Suele considerarse como la Geometría que describe los sistemas caóticos que se encuentran en la naturaleza. Gracias a la belleza de los fractales que podemos observar la "realidad verdadera de las cosas", una realidad en la que todo cambia de manera irregular pero que, a pesar de esos cambios, se mantiene la esencia (Díaz, 2009).

Categorías del estudio

Se procuró interpretar la factibilidad de la enseñanza de Geometría Fractal en la escuela secundaria de acuerdo con los significados que tiene para especialistas matemáticos dedicados a la Geometría y su enseñanza en el nivel superior de formación docente. Se entrevistó individualmente vía Skype a tres especialistas en el área de Geometría de Universidades de la región centro de Argentina: Nacional de Rosario (E1), Nacional del Litoral (E2) y Tecnológica Nacional (E3). Se recorrieron 10 asuntos de interés, de los cuales aquí se comparten los siguientes cinco:

- Investigación matemática actual sobre el tema
- Aportes de la Geometría Fractal a la formación de los ciudadanos
- "Noción de fractal" como contenido escolar
- Contenidos matemáticos que sostienen la Noción de fractal
- Recomendaciones para los profesores

En lo que sigue se sintetizan los principales hallazgos, ilustrando con algunos extractos de los testimonios de los especialistas.

Investigación matemática actual sobre el tema (Tabla 1)

Afirman que es un tema actual, novedoso, híper-moderno, desconocido en cierto punto. Plantean que la Geometría Fractal se trabaja en la actualidad, en numerosas ramas de la ciencia, como la Botánica, la Medicina, la Física, la Computación y el Arte. Subrayan la revolución que la Geometría Fractal ha desatado en muchas áreas a partir de la aplicación de la propiedad de auto-semejanza que poseen algunos fractales.

Tabla 1. Investigación matemática actual sobre el tema

E1	E2	E3
Es muy reciente. Me parece que lo estudia la gente que trabaja la Teoría del caos.	Yo trabajo con temas bastante abstractos que involucran fractales. Se trabaja continuamente con fractales, hay mucho por hacer todavía así que es bueno para investigar.	Un fractal es la fórmula matemática de un patrón, que se repite en diferentes escalas de tamaños y tiempos. No podemos encuadrarlo en una sola ciencia. Revolucionó la ciencia actual, ya que, por ejemplo, junto a la estadística ayudan a pronosticar fenómenos.

Aportes de la Geometría Fractal a la formación de los ciudadanos (Tabla 2)

Los fractales realizan un gran aporte al mundo de la ciencia, porque otorgan una nueva forma de concebir y resolver los problemas que se nos plantean al estudiar los aspectos geométricos de las cosas. La Geometría Fractal sirve de complemento, porque permite describir muchas de las complicadas formas de la naturaleza, irregulares y fragmentadas, a través de modelos matemáticos alternativos. Los fractales resultan ser el camino más idóneo para analizar, a través de un modelo, estructuras complejas a partir de la repetición de estructuras más simples.

Se mencionan variadas aplicaciones de los fractales en diversas ciencias; es por eso que se considera oportuno destacar y agregar más aplicaciones de esta Geometría en otros ámbitos, tales como:

- *Cardiología*: variabilidad de la dimensión fractal del árbol coronario izquierdo en pacientes con enfermedad arterial oclusiva severa.
- *Geología*: redes de fracturas de los macizos rocosos y las microestructuras de los minerales.
- *Física*: análisis de resistencias en estructuras complejas, o de propagación de la corrosión, así como del comportamiento de aeronaves frente a turbulencias formadas por fuertes ráfagas variables de viento.

- *Naturaleza*: los perfiles y grietas de un macizo montañoso, un bosque de helechos o el delta de un gran río; también la propagación de un incendio forestal en una plantación ordenada de árboles.
- *Militar*: detección de almacenamientos bajo el agua y trazabilidad del movimiento de submarinos, como en análisis medioambiental para la determinación del origen y ruta seguida por nubes de lluvia ácida.
- *Arte*: figuras tales como mandalas o dibujos budistas introductorios a la meditación. En la pintura abstracta, obras de Dalí, Escher o Pollock. En los sonidos y en la música, desde el ruido de una catarata o el golpeteo de las olas del mar al canto de un pájaro o a una obra de Bach o de los Beatles. En Arquitectura, la Sagrada Familia de Gaudí, los detalles filigranísticos del barroco, las catedrales góticas.
- *Cuerpo humano*: los pulmones, el sistema sanguíneo y el cerebro tienen estructuras fractales (finitas).

Tabla 2. Aportes de la Geometría Fractal a la formación de los ciudadanos

E1	E2	E3
La posibilidad de modelizar de otra manera.	Complementar, saber que las cosas que quedaron fuera de la Geometría Euclídea tienen también una Geometría que las describe. Todas las cosas que uno ve en la naturaleza, que ve que una montaña no es un cono, que tiene un montón de irregularidades, básicamente viene a decir que dentro de esa irregularidad la naturaleza tiene una organización, digamos, que se describe mediante la Geometría Fractal.	Junto con las Estadísticas ayudan a pronosticar fenómenos. En Geografía Mandelbrot comenzó sus estudios queriendo calcular la longitud de la costa de Gran Bretaña, pues con los fractales se puede representar las líneas costeras y determinar su longitud. En Sociología las ecuaciones que representan el comportamiento de las poblaciones pueden tener estructura fractal. En Biología las plantas, como los helechos, las coliflores son ejemplos de estructuras fractales y por supuesto la Matemática les brinda el modelo para estudiarlos, es así que se puede calcular la edad de los pinos justamente por este hecho.

"Noción de fractal" como contenido escolar (Tabla 3)

En el caso de la Geometría Fractal, que presenta una gran complejidad para comprenderla, una "Noción de fractal" puede resultar lo más pertinente para enseñar en la escuela secundaria, evitando de esta manera toda posible sensación negativa que pueda despertarse en el alumno al ver el concepto tan inalcanzable. Puede considerarse como un punto de partida y no como una meta final, en el sentido de que el docente puede pretender más si el grupo de alumnos así lo permite.

Destacan la importancia de trabajar solo con un tipo de fractales, los autosemejantes, ya que los alumnos pueden acercarse a esta Geometría sin introducirse necesariamente en conceptos intrincados. Aparte, cabe destacar que este tipo de fractales permite trabajar con manipulativos, tanto concretos (por ejemplo regla, tijera, compás para el trabajo con papel en actividades de plegado) como digitales (por ejemplo calculadora, computadora; existen programas específicos para crear arte y animaciones fractales -como “Ultra fractal” y “Fractint”-).

Tabla 3. “Noción de fractal” como contenido escolar

E1	E2	E3
La idea es una introducción muy *naíf* a los fractales. Uno le muestra al alumno que la ciencia ha avanzado tanto que existe una rama específica que modeliza hasta el más mínimo detalle de la naturaleza. Eso no es poco interesante, pero es algo que puede llevar una o dos clases. ¿Qué actividades le hacés hacer a un alumno sobre fractales? ¿Cuál es tu objetivo? ¿Cómo evaluás cuánto sabe de fractales? Es captar la atención de un alumno para después no poder darle respuesta de lo que te pregunte, porque la Noción de fractal toca un montón de ramas de la Matemática que ya de por sí son complicadas y muy avanzadas.	Pretenden hablar de un tipo particular de fractales, los más sencillos, los de autosimilitud exacta. Yo considero que si vos querés dar “fractales” es complejo pero si querés dar la “Noción de fractal” es muy simple.	Porque debemos trabajar con un tipo de fractales.

Contenidos matemáticos que sostienen la Noción de fractal (Tabla 4)

Los contenidos que pueden ser tratados a partir de la enseñanza de una simple noción de la Geometría Fractal son variados. A partir de los testimonios y los contenidos detallados por los especialistas se observa que el alcance otorgado por cada uno de ellos a la “Noción de fractal” propuesta por el Diseño Curricular de sexto año no necesariamente es el mismo. Acuerdan en que los alumnos deben manejar las nociones básicas de la Geometría Clásica.

Se observa que algunos de los contenidos propuestos por los especialistas en Geometría (conceptos propios de la Geometría Clásica, sucesiones, transformaciones, matrices, ecuaciones exponenciales, noción de límite de sucesiones) coinciden con los planteados en el Diseño Curricular de sexto año de la Secundaria que actuarían como base para la enseñanza de la “Noción de fractal”, planteada específicamente en el eje “Geometría y Álgebra”.

Tabla 4. Contenidos matemáticos que sostienen la Noción de fractal

E1	E2	E3
Alguien que sabe límite lo va a entender mucho más rápido. Límite y continuidad. Logaritmo y exponenciales. Congruencia y semejanza de triángulos. La Geometría Clásica, obviamente, no tiene sentido hablar de Geometría Fractal si no diste antes Geometría Euclídea.	Límite es poco lo que necesitan, si saben límite mejor y si no se puede dar de todas maneras. El concepto de algoritmo recursivo, que es una instrucción que se repite infinitas veces. Se puede dar mediante transformaciones, si querés tocar el tema. Tienen que haber visto Geometría Euclídea y darse cuenta que justamente no completa todo, que hay cosas que no se pueden describir con esa Geometría. Podrías dar la Noción de fractal simplemente con los conceptos de "algoritmo recursivo" y "limite de una sucesión".	Nociones de límite y derivadas. Función iterativa. Funciones y ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Transformaciones isométricas: simetrías, traslaciones y rotaciones. Homotecias. Semejanzas (por ser la composición de isometrías con homotecias). Inversión. De Geometría la idea de construcciones simples. Nociones de: segmentos, triángulos, clasificación y construcciones. Polígonos. Perímetro. Área. Proporcionalidad, escalas. En 3D: poliedros regulares: tetraedro, cubo. Los fractales presentan distintas estructuras, y para cada tipo habrá conocimientos matemáticos especiales.

Recomendaciones para los profesores (Tabla 5)

Se destaca la importancia de enseñar el concepto de fractal por su gran utilidad para explicar algunos temas de carácter geométrico y otros de carácter natural. Coinciden en su potencial para captar la atención de los alumnos.

Los especialistas manifiestan, por un lado, que es fundamental que el docente se actualice e informe sobre el tema antes de enseñarlo; y, por otro lado, explican la importancia de ofrecer a los alumnos una visión general de la Geometría Fractal y sus aplicaciones. Afirman que hay que estudiar los fractales, entenderlos y en la medida de lo posible transmitirlos lo más completo posible, sin caer en conceptos muy complejos o formalismos a los que el alumno no pueda llegar. También sugieren el empleo de material concreto y virtual.

Tabla 5. Recomendaciones para los profesores

E1	E2	E3
Realizar actividades de construcción. Hay fractales famosos que se pueden construir de manera muy simple. Lo primero es informarse, básicamente por Internet hoy en día se encuentra absolutamente todo. Se necesita tecnología para que el alumno descubra qué es lo que puede construir con eso. Hay que darlo a nivel divulgativo lamentablemente, no hay forma de darlo de manera formal y cuando uno da algo a nivel divulgativo la actividad científica ya no existe más. Uno tiene que apuntar a ciertos temas y eso no quiere decir que la clase tiene que ser aburrida, a lo mejor fractales es algo para una clase que está desmotivada, los motivás y después podés poner algún otro contenido, como mecharlo con algo y que no sea tan monótona.	Deberían leer o hacer algún mini curso, y después trabajar cómo darlo, pero entender los conceptos no es algo que le puede llevar mucho tiempo. Que no tengan miedo porque es un tema accesible.	Que se actualicen, el tema hoy en día no es difícil ya que las computadoras hacen los cálculos tediosos y hay en Internet muchos programitas que muestran las curvas que se pueden obtener variando las variables o parámetros. Se puede trabajar con software de Geometría dinámica y sitios en Internet como complemento. Todo lo que se puede manejar con material concreto o virtual que se asemeja al concreto se aprende mucho más, de eso soy una convencida. Hay que entenderlo, cuando uno entendió transmite.

CONCLUSIONES

Con la incorporación del contenido "Noción de fractal" al Diseño Curricular, se persigue que el alumno experimente que la Matemática es una ciencia en constante evolución, intensamente dinámica y cambiante.

Como el concepto de fractal puede resultar difícil de comprender y requiere su estudio en niveles superiores, el trabajo con fractales en secundaria está enfocado en una Noción del tema, a modo introducción. Se prescinde de definiciones o fórmulas matemáticas abstractas o rigurosas, en pos a basarse principalmente en la gran potencialidad visual y estética de los mismos.

La complejidad del estudio de los fractales y la idea de mantener la enseñanza en una Noción introductoria, sugiere que las actividades que se propongan sean en lo posible de carácter lúdico y con el manejo constante de lo concreto.

En síntesis, se percibe como fructífero que en el Diseño Curricular se mencione "Noción de fractal". Permite disminuir la complejidad existente y centra el tema en un trabajo sencillo, tal vez solo de construcciones, ya sean manuales o computarizadas, desarrollados posiblemente con la modalidad de taller.

Por ejemplo con el software GeoGebra se puede construir el árbol fractal (Fig. 9), para introducir a los estudiantes en el tema a partir de construcciones fractales.

a) Construimos primero un segmento AB, que será el tronco del árbol.
b) Ahora procedemos a construir dos ramas. Para ello:
Trazamos las circunferencias con centro en cada vértice que pasen por el otro vértice.
Marcamos las intersecciones y trazamos las rectas que unen esos puntos de intersección con el vértice B.
Marcamos los puntos de intersección de esas rectas con la circunferencia de centro B; los denominamos C y D.
Tomamos los puntos medios I y J de BC y BD respectivamente
Trazamos los segmentos BI y BJ.
Ocultamos todos los objetos auxiliares, dejando visibles únicamente los segmentos AB, BI y BJ. Así, AB es el tronco y BI y BJ son las primeras ramas.
c) La idea es hacer lo mismo con BI y BJ. Es decir, pensar que BI y BJ son los troncos y construir las ramas que salen de estos troncos. Para esto, construimos una nueva herramienta:
Seleccionamos la opción Creación de Herramienta Nueva.
Seleccionamos como objetos de entrada primero el punto A y luego el punto B.
Seleccionamos como objetos de salida los puntos I y J así como los segmentos BI y BJ.
Concluimos la herramienta.
Seleccionamos el nuevo botón, y aplicamos la herramienta a los puntos B e I. Deben aparecer dos nuevas ramas.
Aplicamos la herramienta a los puntos B y J.
d) Aplicamos la herramienta a las cuatro nuevas ramas.

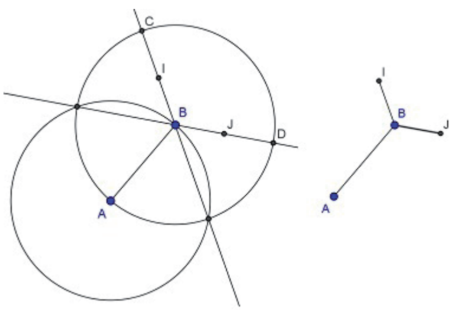

Figura 9. Construcción del árbol fractal

Otro ejemplo, provisto por un docente en ejercicio en sexto año que participó en otra etapa de la investigación, consiste en la construcción manual de fractales, empleando una plantilla modelo y a partir de un algoritmo recursivo (Fig. 10).

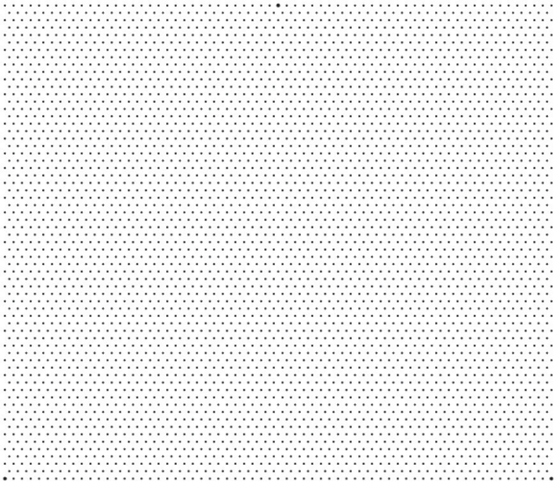

Figura 10. Ejemplo de actividad proporcionada por un docente de sexto año

Construyan un triángulo equilátero, de lado L.
Marquen el punto medio de cada lado.
Unan los puntos medios de cada lado, quedando así 4 triángulos equiláteros de lado L/2.
Eliminen el triángulo central.
Repitan el proceso anterior en cada uno de los triángulos restantes.
Si consideramos que la construcción del primer triángulo equilátero es la etapa 0:
¿Cuál es la etapa 1?, ¿cuántos triángulos se obtienen?
¿Qué ocurre si repiten el proceso una y otra vez?, ¿cambia la figura?
¿Qué características o rasgos pueden encontrar para considerarlo un fractal?
¿Es un fractal "conocido"? Investiguen qué nombre recibe.
¿Podrían construir otra figura fractal, utilizando el mismo conjunto de pasos propuestos pero cambiando la figura inicial por otra?
A partir de sus conclusiones, completen el siguiente cuadro con el número de triángulos que componen cada etapa

Etapa	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	...	*n*
Número	*1*					...	

Suponiendo que cada lado del triángulo inicial (etapa 0) tiene longitud 1, completen los datos de la siguiente tabla:

	Etapa	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	...	*n*
Cantidad de triángulos								
Longitud de cada lado								

	Etapa	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*...*	*n*
Perímetro de cada triángulo								
Perímetro total								
Área de cada triángulo								
Área total sombreada								

Para la última columna deben encontrar las expresiones generales para calcular el número de triángulos, el perímetro y el área.
¿Qué pasará con el perímetro total si el número de pasos aumenta tanto como queramos?
¿Qué pasará con el área total si el número de pasos aumenta tanto como queramos?

La Geometría escolar a nivel secundario no ha incorporado contenidos prácticamente posteriores a Euler, motivo por el cual existe un genuino interés por los fractales. Probablemente los alumnos crean que las formas geométricas referidas a objetos creados por el hombre han sido pensadas, desarrolladas y descritas dentro de la Geometría Euclídea, desconociendo por completo que la Geometría Fractal se adapta perfectamente al mundo que nos rodea.

Asimismo cabe advertir que otro factor que puede actuar de condicionante, además de la necesidad de no abrumar a los alumnos con contenidos inalcanzables, es que este tipo de actividades requieren de un tiempo considerable, factor que escasea en el último año de estudios del nivel secundario. Son muchos los temas que se prescriben y muy poco el tiempo disponible, temas considerados en su mayoría como fundamentales para estudios superiores. Asimismo, como hemos visto, la enseñanza de "Noción de fractal" es factible en no demasiado tiempo (un par de semanas, por ejemplo) y podría propiciar una apertura en el pensamiento matemático de los egresados del secundario.

Entre comentarios a favor de docentes en ejercicio en sexto año hemos encontrado:

Lo trabajaría, inclusive, dentro del aula, fuera del aula, con un proyector… iría buscando la vuelta, las distintas actividades.

> *¿Por qué pensar que la Geometría fractal aporta a la Geometría Euclidiana? ¿Acaso el Álgebra debe aportar a la Geometría o tiene importancia en sí misma? El contenido de fractales es un contenido que pretende "abrir" la concepción y la formación matemática del alumno.*
>
> *Considero que la Geometría Fractal viene a aportar una nueva visión de la Geometría que hasta el momento no la tengo en cuenta. Me parece que este tema con el uso de las computadoras podría contribuir a una nueva mirada. Creo que sería necesario poder contar con espacio de profundización y de capacitación docente para poder abordar estos contenidos desde la Secundaria básica con sustento epistemológico.*

Esperamos haber contribuido a caracterizar algunos elementos a tener en cuenta en la decisión de trabajar el tema en el aula. Una de las próximas metas es compartir estos hallazgos con los docentes de sexto año que participaron en el estudio para que puedan contar con material básico (por lo general no presente en las bibliotecas de las escuelas). Además se prevé socializarlo con los especialistas en Geometría así como las autoras del Diseño Curricular que colaboraron y, también, fomentar instancias de formación docente.

BIBLIOGRAFÍA

Ball, D. y Bass, H. (2009). *Mit einem Auge auf den mathematischen Horizont: Was der Leher braucht für die Zukunft seiner Schüler*. Conferencia presentada en la "43 Jahrestagung für Didaktik der Mathematik". Oldenburg, marzo.

Branslely, M. (1993). *Fractals Everywhere* (2ª Ed.). Burlington: Morgan Kaufmann.

Castro, C., Díaz, L. y Palacios, R. (2011). Secuencia didáctica para la enseñanza de la semejanza utilizando fractales. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp.181-188). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Comas, J. y Herrera, M.J. (2010). Cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad como trabajo de investigación en secundaria. *Revista SUMA*, (65), 23-32.

Comas, J. y Pérez-Nieto, A. (2017). La dimensión fractal en obras del museo Thyssen-Bornemisza. *Revista SUMA*, (92), 51-62.

Darias, S. y Batista, E. (2015). Vídeo creaciones con GEOGEBRA. Fractal de Esteban. *Números. Revista de Didácticas de las Matemáticas*, *90*, 105-115.

Díaz, S. (2009). Primeras reflexiones de los fractales, la teoría del caos y su aplicación en el aula. *Revista Red Visual*, (9-10), p.s.n.

Dirección General de Cultura y Educación (2011). *Diseño Curricular para la educación Secundaria. Matemática Ciclo Superior. Sexto año*. Buenos Aires: Autor.

Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A. y Zuasti, N. (2000). Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales. *Revista SUMA*, (35), 45-54.

Fusi, F. (2015). *Enseñanza de la noción de fractal en sexto año de la escuela secundaria en la Provincia de Buenos Aires*. Tesina de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática no publicada. San Nicolás: Universidad Tecnológica Nacional.

Garbin, S. y Mireles, M. (2009). Un estudio sobre la Noción de dimensión en la enseñanza - aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 27(2), 223-240.

Karakus, F. (2013). A Cross-age study of students' understanding of fractals. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27(47), 829-846.

Mandelbrot, B. (1997). *La Geometría Fractal de la naturaleza*. Barcelona: Tusquets.

Martín, M. (2003). Caos y fractales. *Revista de Humanidades*, (1), 68-79.

Martín, N.B., Parra, V. y Fanaro, M.A. (2019). Enseñanza de fractales a partir de preguntas: descripción de una experiencia en un curso de matemática del último año de la escuela secundaria. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, (102), 25-34.

Medina, M. y Yavioli, A. (2011). La Geometría de la naturaleza. *Revista Q.e.d.*, 4(5), 12-17.

Moreno, J. (2002). Experiencia didáctica en Matemática: construir y estudiar fractales. *Revista SUMA*, (40), 91-104.

Moreno, P.C. (2017). Un sierpinski en la fachada. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, (96), 45-60.

Nápoles, J. y Palomá, L. (2012). Fractales a nuestro alrededor. *Revista VIDYA*, 32(4), 97-112.

Oviedo, L., Kanashiro, A., Gorrochategui, M. y Benzaquen, M. (2006). Una aproximación a la Noción de infinito a través de la curva de Von Koch. *Aula Universitaria*, 18(8), 55-64.

Quezada, A. (2005). Fractales, Más allá de 1D, 2D o 3D. *Revista Digital Universitaria*, 6(12), 2-14.

Redondo, A. y Haro, M. (2004). Actividades de Geometría Fractal en el aula de Secundaria. *Revista SUMA,* (47), 91-104.

Reyes, M. (2006). *Fractales, Conjuntos fractales, Dimensión fractal*. Madrid: ESTALMAT. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Reyes, M. (2009). *Fractales*. Madrid: Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid.

Sardella, O., Zapico, I. y Berio, A. (2006). Fractales una nueva mirada en la enseñanza de la Geometría. *Números. Revista de Didácticas de las Matemáticas*, *65*, 14-20.

Spinadel, V. (2003). Geometría Fractal y Geometría Euclídea. *Revista Educación y Pedagogía*, XV(35), 85-91.

Thompson, P. (2000). What is Required to Understand Fractal Dimension? *The Mathematics Educator*, *10*(2), 33-35.