

Una aplicación a nivel de licenciatura del cálculo integral a la probabilidad: El problema de la aguja de Buffon

Margarita Tetlalmatzi-Montiel¹

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Resumen: *El problema de la aguja de Buffon para agujas cortas y largas puede resolverse calculando áreas bajo ciertas curvas. Pero también las probabilidades de que una aguja larga termine sobre exactamente una, dos o tres líneas se determinan calculando áreas entre ciertas curvas. En estas notas se muestran las regiones cuyas áreas resuelven el problema en dos casos particulares para agujas largas. Las ideas pueden adaptarse fácilmente al caso general. Los requisitos para entender este trabajo son cálculo integral y conceptos elementales de probabilidad, por lo que resulta ser una aplicación accesible para estudiantes de licenciatura.*

Palabras clave: *Agujas de Buffón, aplicación de cálculo, probabilidad, educación matemática.*

An application at the bachelor's level of integral calculus to probability: Buffon's needle problem

Abstract: *The Buffon needle problem for short and long needles can be solved by calculating areas under certain curves. But also the probabilities that a long needle ends on exactly one, two or three lines are determined by calculating areas between certain curves. These notes show the regions whose areas solve the problem in two particular cases for long needles. Ideas can be easily adapted to the general case. The requirements to understand this work are integral calculus and elementary concepts of probability, so it turns out to be an accessible application for undergraduate students.*

Keyword: *Buffon's needle, calculus applications, probability, mathematics education*

1. tmontiel@uaeh.edu.mx

INTRODUCCIÓN

Es importante en la formación matemática de los estudiantes universitarios el adquirir competencias de pensamiento crítico y creativo y no enfocarlos únicamente a la memorización de métodos y algoritmos. En la materia de cálculo integral, al calcular áreas de regiones por medio de integrales definidas, aparte de aprender las técnicas necesarias puede ser muy enriquecedor mostrar su utilidad en otras áreas. Ya que el cálculo de las probabilidades de que ocurran los eventos deseados en el problema de la guja de Buffon se reduce al cálculo de áreas de ciertas regiones, este problema es adecuado para poder apreciar una aplicación del cálculo de áreas. Es el análisis del problema lo que llevará al estudiante a encontrar las funciones y las regiones apropiadas de integración, es decir, encontrar el modelo matemático necesario para poder llegar a la solución. El problema de la aguja de Buffon puede ayudar a lograr los objetivos anteriores, además de que su planteamiento es muy ilustrativo y fácil de realizar en un salón de clase.

El problema clásico de la aguja de Buffon requiere calcular la probabilidad de que una aguja de longitud l , al caer en un piso con líneas paralelas separadas entre sí una distancia d , cruce al menos una línea. Cuando $l < d$ se le suele llamar el problema de la aguja corta, de otra forma es conocido como el problema de la aguja larga (figuras 2 y 3).

Para abordar este problema en clase, se puede proporcionar al grupo cinta y palillos de longitud l (figura 1). Se marcan en el piso líneas paralelas separadas una distancia d . Después de lanzar los palillos sobre las líneas, proceder a contar cuántos quedaron sobre alguna de las paralelas y así ilustrar el planteamiento del problema. Si se desea, reservar los resultados para compararlos después con los obtenidos al calcular las probabilidades. Es pertinente observar que en estas notas no se realiza el análisis estadístico del experimento descrito.

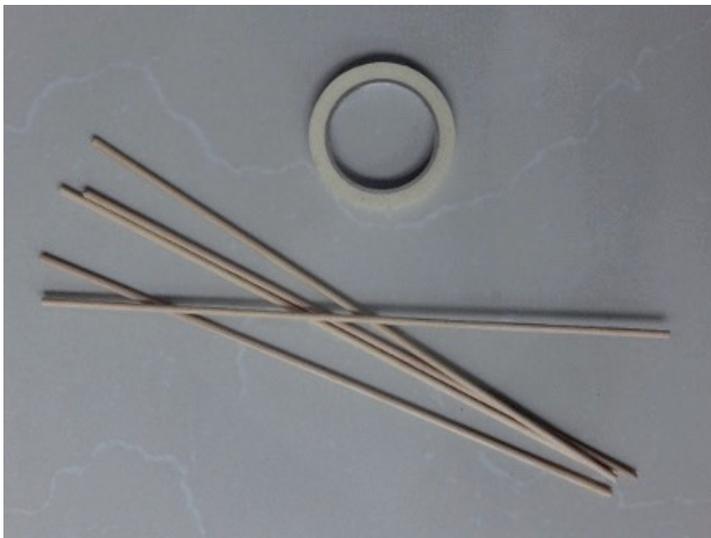
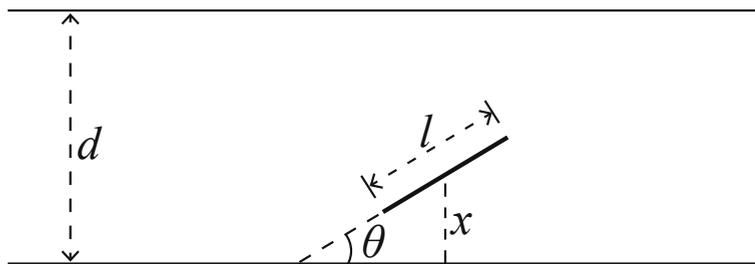


Figura 1. Cinta y palillos.

Figura 2.
Aguja corta.



Las soluciones del problema de la aguja de Buffon corresponden al área entre las gráficas de ciertas funciones. Por ejemplo, la región cuya área da la solución del problema clásico de Buffon para una aguja corta es la mostrada en la figura 4, esta puede verse en Arnow (1994), Mathai (1999), Schroeder (1974) y en Uspensky (1937) y en la página de Internet de Rezhdo (2011). En el caso de tener una aguja larga la región que da la solución es la mostrada en la figura 5, la cual puede verse en Schroeder (1974) y en la página de Internet previamente mencionada. La solución para el caso general en que $nd < l < (n+1)d$, donde n es un número entero positivo, puede verse en Mathai y Solomon (1978), sin embargo, no se muestran las regiones cuyas áreas dan las soluciones en casos particulares de n y mucho menos en el caso general.

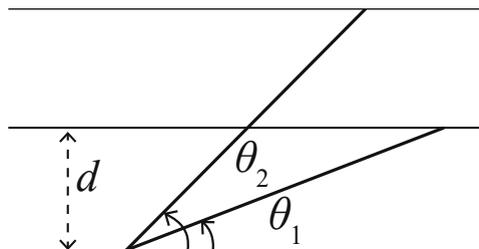


Figura 3. Aguja larga

Al dar relaciones más explícitas para l y d , se pueden calcular probabilidades más específicas. Por ejemplo, si $2d < l < 3d$ es posible determinar las probabilidades de que la aguja termine cruzando exactamente una, dos o tres líneas (figura 7).

En este trabajo son mostradas las regiones cuyas áreas dan todas las probabilidades cuando $d < l < 2d$ y cuando $2d < l < 3d$, las ideas detrás de las soluciones son fácilmente generalizadas para otros casos. Como se verá, los cálculos necesarios se reducen al cálculo de áreas entre gráficas de funciones. Esto es, para estudiar este problema solo se requieren conocimientos básicos de probabilidad y de cálculo integral, por lo que puede presentarse como una aplicación accesible en un curso de cálculo integral.

Las dos variables que determinan completamente la posición de la aguja en un piso con líneas paralelas se muestran en la figura 2. Una de ellas es la distancia x del punto medio de la aguja a la línea más cercana, con $0 \leq x \leq \frac{d}{2}$. La otra es el ángulo θ formado por la aguja y la horizontal (las paralelas), con $0 \leq \theta \leq \pi$. Por lo que, todas las posibles posiciones de la aguja corresponden a los puntos del rectángulo $I = [0, \pi] \times [0, \frac{d}{2}]$. En lo sucesivo, se consideran a x y a θ como las realizaciones de las variables aleatorias X y Θ , independientes y uniformemente distribuidas en los intervalos mencionados. Esto quiere decir, dado que el área del rectángulo I es $\pi d/2$, si S es una región en el rectángulo I con área $|S|$, la probabilidad de que S ocurra es $|S|/(\pi d/2)$.

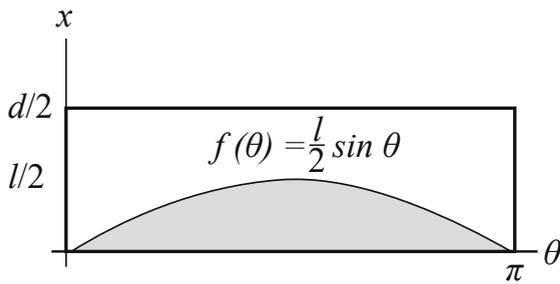


Figura 4.
Región para aguja corta

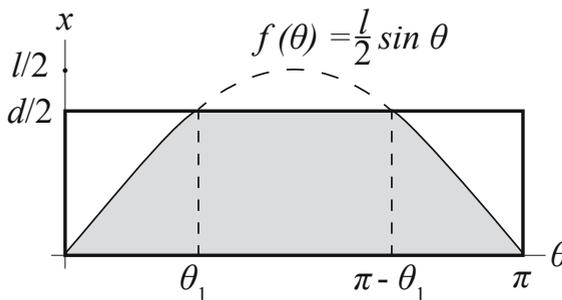


Figura 5.
Región para aguja larga

A continuación, en la primera sección se mencionan las probabilidades de que la aguja corte al menos una línea en los casos de tener una aguja corta y una aguja larga. En la segunda sección se dan condiciones más específicas para l y d que permitan calcular las probabilidades de que la aguja termine sobre una, dos o tres líneas paralelas, según sea el caso. Se concluye mostrando la generalización más conocida del problema, el de la aguja de Laplace-Buffon.

Probabilidad de cruzar al menos una línea

Los siguientes cálculos se encuentran ampliamente en la literatura, sin embargo, aquí se muestran para tener una idea completa del problema de la aguja de Buffon.

El problema clásico de Buffon pide calcular la probabilidad de que la aguja de longitud l caiga sobre al menos una de las líneas paralelas del piso separadas entre sí una distancia d .

Primero, en el caso de tener una aguja corta $l < d$, al fijar un valor de θ la aguja corta al menos una línea cuando x cumple $0 \leq x \leq \frac{1}{2} l \sin \theta$ (figura 2). Luego, al variar el ángulo de inclinación θ de la aguja, sus posibles valores están en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, así se obtienen todas las parejas ordenadas (θ, x) en las cuales la aguja corta al menos una línea, esta región es precisamente el área bajo la gráfica de la función $f(\theta) = \frac{1}{2} l \sin \theta$ en el intervalo $[0, \pi]$, precisamente la región sombreada en la figura 4. Entonces, la probabilidad de que una aguja corta termine cruzando al menos una línea es

$$P_c = \frac{2}{\pi d} \int_0^\pi \frac{l}{2} \text{sen } \theta \, d\theta = \frac{2l}{\pi d}.$$

Y la probabilidad de no cortar ninguna línea es $1 - P_c$.

Cuando $l = d$ se tiene la solución

$$P_c = \frac{2}{\pi},$$

que ha cautivado a muchas personas por generaciones debido a su relación simple con el número π , dando lugar a simulaciones para aproximar éste número, por ejemplo se sugiere ver las simulaciones mostradas en la página de MSET (2015).

Ahora el caso de tener una aguja larga $d < l$: si el extremo inferior de la aguja toca una de las paralelas y si θ_1 es el ángulo en el cual $\frac{l}{2} \text{sen } \theta_1 = \frac{d}{2}$ (figura 3), esta corta al menos una línea si su ángulo de inclinación θ está entre θ_1 y $\pi - \theta_1$. Al mover esta aguja hacia arriba, ésta seguirá cortando al menos una línea si x cumple $0 \leq x \leq \frac{l}{2} \text{sen } \theta$, pero teniendo cuidado de que x se mantenga en el rectángulo $I = [0, \pi] \times [0, d/2]$. Con lo cual, la probabilidad de que la aguja corte al menos una línea es la región bajo la gráfica de la función $f(\theta) = \frac{l}{2} \text{sen } \theta$ y dentro del rectángulo I (figura 5), por simetría, esta es

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{2}{\pi d} \left[\frac{d}{2} (\pi - 2\theta_1) + 2 \int_0^{\theta_1} \frac{l}{2} \text{sen } \theta \, d\theta \right] = 1 - \frac{2\theta_1}{\pi} + \frac{2l}{\pi d} (1 - \cos \theta_1) \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \arcsen \left(\frac{d}{l} \right) + \frac{2l}{\pi d} - \frac{2}{\pi d} \sqrt{l^2 - d^2}. \end{aligned}$$

Para la última igualdad, la identidad $\text{sen } \theta_1 = d/l$ corresponde a un triángulo rectángulo con hipotenusa l , cateto opuesto d y cateto adyacente $\sqrt{l^2 - d^2}$, respecto a θ_1 , dando así que $\theta_1 = \arcsen(d/l)$ y que $\cos \theta_1 = \sqrt{l^2 - d^2}/l$.

Probabilidad de cruzar exactamente m líneas

Cuando se deja caer una aguja larga en un piso con líneas paralelas esta puede terminar cruzando más de una línea. Si se desea calcular la probabilidad de cruzar un número exacto de líneas simplemente se necesita especificar la relación entre la aguja y la distancia entre las líneas paralelas, por ejemplo, si $d < l < 2d$ o si $2d < l < 3d$. Estos casos corresponden a agujas largas, por lo que las regiones se encuentran en la región sombreada de la figura 5. A continuación se analizan estos dos casos particulares.

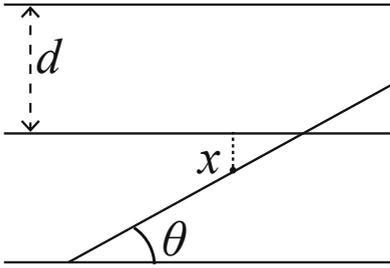


Figura 6. $d < l < 2d$

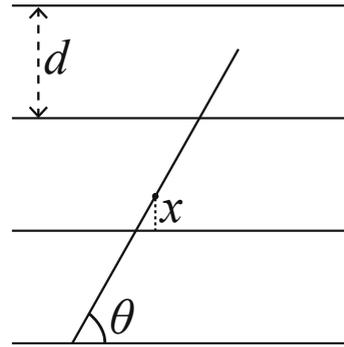


Figura 7. $2d < l < 3d$

- a) $d < l < 2d$: cuando esto ocurre la aguja puede cruzar exactamente una, dos o ninguna línea (figura 6). Para la probabilidad de cruzar exactamente dos líneas primero coloque uno de los extremos de la aguja sobre una de las líneas. Se puede observar que la aguja cruzará dos líneas si su ángulo de inclinación θ cumple $\theta_1 < \theta < \pi - \theta_1$, donde $l \text{ sen } \theta_1 = d$ (figura 3). Al fijar un ángulo θ de este intervalo resulta que $d = x + \frac{l}{2} \text{ sen } \theta$. Si la aguja se mueve hacia abajo los valores de x en los que la aguja sigue intersectando dos líneas son los que cumplen $d - \frac{l}{2} \text{ sen } \theta < x < d/2$. Estas dos condiciones corresponden a la región con sombra punteada de la figura 8. Por simetría, la probabilidad de que la aguja, al caer en el piso, termine cruzando exactamente dos líneas es

$$P_2 = \frac{2}{\pi d} \int_{\theta_1}^{\pi/2} \left[\frac{d}{2} - \left(d - \frac{l}{2} \text{ sen } \theta \right) \right] d\theta = \frac{2\theta_1}{\pi} - 1 + \frac{2l}{\pi d} \cos \theta_1$$

$$= \frac{2}{\pi} \arcsen \left(\frac{d}{l} \right) - 1 + \frac{2}{\pi d} \sqrt{l^2 - d^2}.$$

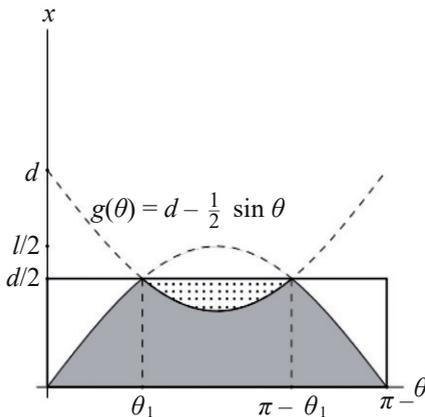


Figura 8. Región cuando $d < l < 2d$

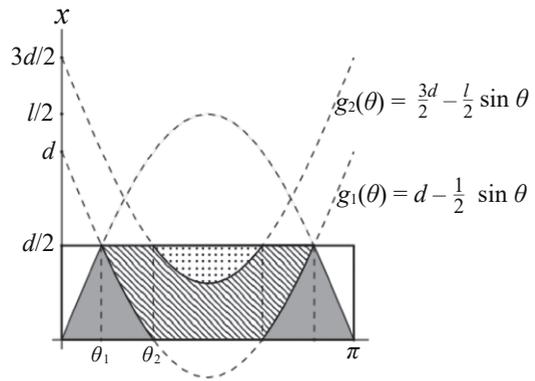


Figura 9. Región cuando $2d < l < 3d$

Con esto, la aguja termina cortando una sola línea con probabilidad $P_1 = P_L - P_2$, precisamente la región sombreada de la figura 8, quedando

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{2l}{\pi d} - 2 \left(\frac{2}{\pi} \arcsen \left(\frac{d}{l} \right) - 1 + \frac{2}{\pi d} \sqrt{l^2 - d^2} \right) \\ &= \frac{2l}{\pi d} - 2P_2. \end{aligned}$$

Y la probabilidad de no cortar ninguna línea es

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 - P_L = \frac{2}{\pi} \arcsen \left(\frac{d}{l} \right) - \frac{2l}{\pi d} + \frac{2}{\pi d} \sqrt{l^2 - d^2} \\ &= 1 - \frac{2l}{\pi d} + P_2. \end{aligned}$$

b) $2d < l < 3d$: en este caso la aguja puede cortar una, dos, tres o ninguna línea (figura 7). Considere para este caso $\theta_1 = \arcsen(d/l)$ y $\theta_2 = \arcsen(2d/l)$ (figura 3). Siguiendo argumentos similares al caso anterior, la aguja termina sobre exactamente tres líneas cuando $\theta_2 \leq \theta \leq \pi - \theta_2$ y $0 \leq x \leq \frac{l}{2} \sen \theta - d$, como $\frac{l}{2} \sen \theta - d = \frac{d}{2} - \left(\frac{3d}{2} - \frac{l}{2} \sen \theta \right)$, resulta ser la región sombreada con puntos de la figura 9. Lo que da la probabilidad

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{4}{\pi d} \int_{\theta_2}^{\pi/2} \left(\frac{l}{2} \sen \theta - d \right) d\theta = \frac{2l}{\pi d} \cos \theta_2 - 2 + \frac{4\theta_2}{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi d} \sqrt{l^2 - 4d^2} - 2 + \frac{4}{\pi} \arcsen \left(\frac{2d}{l} \right). \end{aligned}$$

En el caso en que la aguja termine sobre exactamente dos líneas la probabilidad p_2 es precisamente el área de la región sombreada con líneas de la figura 9, dando

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{4}{\pi d} \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{d}{2} - \left(d - \frac{l}{2} \sen \theta \right) \right] d\theta + \int_{\theta_2}^{\pi/2} \left(\frac{3d}{2} - \frac{l}{2} \sen \theta \right) d\theta \right] \\ &= \frac{2l}{\pi d} (\cos \theta_1 - 2 \cos \theta_2) + 3 + \frac{2}{\pi} (\theta_1 - 4\theta_2) \\ &= \frac{2}{\pi d} (\sqrt{l^2 - d^2} - 2\sqrt{l^2 - 4d^2}) + 3 + \frac{2}{\pi} \left[\arcsen \left(\frac{d}{l} \right) - 4 \arcsen \left(\frac{2d}{l} \right) \right]. \end{aligned}$$

Finalmente, por la región sombreada de la figura 9, puede verse que la probabilidad de que la aguja termine cruzando exactamente una línea es

$$p_1 = P_L - p_3 - p_2 = \frac{2l}{\pi d} - 2p_2 - 3p_3,$$

y la probabilidad de no cruzar ninguna línea es, en este caso,

$$p_0 = 1 - P_L = 1 - \frac{2l}{\pi d} + p_2 + 2p_3.$$

Se invita a la lectora o al lector a encontrar las probabilidades de que al lanzar una aguja con $3d < l < 4d$ esta termine cruzando una, dos, tres o cuatro líneas, las regiones se pueden encontrar a partir de la figura 10.

La solución del caso general, cuando $nd < l < (n-1)d$, resulta ahora más natural. Esta puede verse en Mathai (1999).

El problema de Laplace-Buffon

Una de las generalizaciones más conocidas del problema clásico de la aguja de Buffon es el problema de la aguja de Laplace-Buffon, donde la aguja se deja caer en un piso con líneas paralelas y perpendiculares, es decir, con rectángulos de altura a y base b , $b < a$ (figura 11). Este problema se encuentra en Arnow (1994), Mathai (1999), Solomon (1978) y en Uspensky (1973) para agujas cortas, es decir que $l < b < a$. En los cálculos de las soluciones de este caso hay que encontrar volúmenes de regiones entre ciertas funciones bidimensionales dentro de un paralelepípedo. Las regiones cuyos volúmenes dan la probabilidad de que una aguja corta termine sobre al menos una línea se encuentran en el artículo de Arnow (1994), aunque las secciones que se emplean para el cálculo del volumen son rectángulos, y no círculos como afirma Arnow (figura 12).

Muy brevemente, si $l < b < a$, las variables involucradas se encuentran en los rectángulos $0 < x < a/2$, $0 < y < b/2$, y $0 < \theta < \pi/2$. El volumen del paralelepípedo es $\frac{ab\theta}{8}$. Fijando θ , la aguja corta la línea inferior si $0 < x < \frac{l}{2} \cos \theta$ y la aguja corta la línea a la derecha si $0 < y < \frac{l}{2} \sin \theta$ (figura 11).

La probabilidad de que la aguja corte una línea horizontal es

$$R_1 = \frac{8}{ab\pi} \int_0^{b/2} \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2} \cos \theta \, d\theta \, dy$$

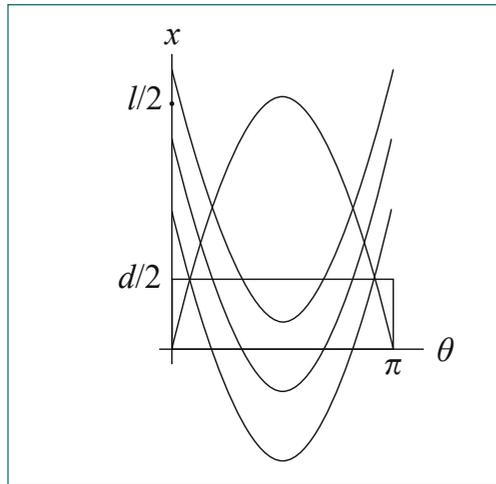


Figura 10. Sugerencia para el caso $3d < l < 4d$.

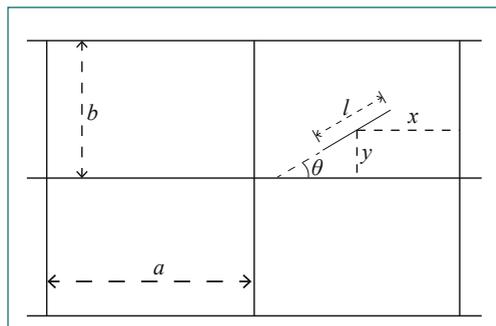


Figura 11. Laplace-Buffon con aguja corta.

Que corte una línea vertical

$$R_2 = \frac{8}{ab\pi} \int_0^{a/2} \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, dx$$

Y la parte en que se intersecan las regiones es

$$R_3 = \frac{8}{ab\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{1}{2}l \cos \theta} \int_0^{\frac{1}{2}l \operatorname{sen} \theta} dy \, dx \, d\theta$$

La probabilidad de que la aguja corte al menos una línea es

$$P_1 = R_1 + R_2 - R_3 = \frac{2l(a+b) - l^2}{ab\pi}$$

Y la probabilidad de no cortar línea alguna es $1 - P_1$.

En el artículo de Duma (1999) pueden encontrarse soluciones para agujas largas cuando el piso está teselado con paralelogramos, triángulos y hexágonos, por supuesto, este artículo es avanzado para estudiantes de los primeros semestres de licenciatura. Algunos de estos casos particulares se mostrarán en un artículo posterior.

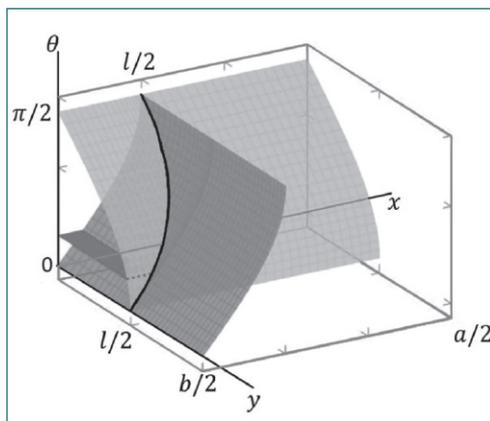


Figura 12. Regiones para Laplace-Buffon con aguja corta.

CONCLUSIONES

En este artículo se plantea una aplicación accesible del cálculo integral a la probabilidad con el problema de la aguja de Buffon. Cuando se aborda el tema del cálculo de áreas de regiones en la materia de cálculo integral en la universidad, aparte de aprender las técnicas necesarias es importante que el estudiante pueda ver una aplicación de lo visto. En sí, las probabilidades necesarias en el problema de la aguja de Buffon para agujas cortas y largas puede resolverse calculando áreas bajo ciertas curvas. Pero, en este artículo resulta ser aún más enriquecedora la aplicación, ya que además del caso clásico, se aborda el problema de calcular las probabilidades de que una aguja larga termine sobre exactamente una, dos o tres líneas, y estas probabilidades se determinan calculando áreas entre ciertas curvas.

Este problema tiene un planteamiento muy ilustrativo y fácil de realizar en un salón de clases. Bajo la guía del profesor, el estudiante puede encontrar las regiones necesarias cuyas áreas dan las probabilidades que resuelven los diversos casos del problema de la aguja de Buffon, es decir, los modelos matemáticos necesarios para resolver el problema. Las ideas pueden adaptarse fácilmente al caso general permitiendo al profesor llegar tan lejos como desee. Los conceptos de probabilidad son elementales, por lo que este problema puede ser planteado en un curso de cálculo integral, aún si los estudiantes no han tomado un curso universitario de probabilidad. Por todo lo anterior, este es un problema que puede contribuir en las competencias de pensamiento crítico y creativo del estudiante.

AGRADECIMIENTOS

La autora agradece al Dr. Aarón V. Reyes Rodríguez sus acertados comentarios que ayudaron a mejorar este trabajo. Así también, agradece las valiosas sugerencias del evaluador que contribuyeron a esclarecer algunos puntos del artículo.

REFERENCIAS

- Arnou, B. A. (Enero 1994). On Laplace's Extension of the Buffon Needle Problem. *The College Mathematical Journal*, Vol. 25, No. 1, 40– 43. DOI: 10.2307/2687085. <http://www.jstor.org/stable/2687085>
- Duma, A. (1999). Problems of Buffon type for 'non-small' needle. *Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo*, Serie II, Tomo XLVIII, pp 23 – 40.
- Mathai, A. M. (1999). *An Introduction to Geometrical Probability: Distributional Aspects with Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Singapore.
- MSET (2015). Buffon's Needle. An Analysis and Simulation. The Mathematics, Science, and Technology Education (MSTE), division of the College of Education at the University of Illinois. Recuperado 28 de enero de 2020, de <https://mste.illinois.edu/activity/buffon/#schroeder>
- Rezhdo, A. (Noviembre 2011) Buffon's needle problem. Recuperado el 28 de enero de 2020, de https://math.dartmouth.edu/archive/m20f11/public_html/Projects.html
- Solomon, H. (1978). *Geometric Probability*. SIAM.
- Schroeder, L. (1974). Buffon's needle problem: An exciting application of many mathematical concepts. *Mathematics Teacher*, 67 (2), 183– 186.
- Uspensky, J. V. (1937). *Introduction to Mathematical Probability*. New York: McGraw-Hill.