RINCÓN "SAPERE AUDE"…. ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

1. MATEMÁTICAS EN EL SIGLO XVII

1.1. La creación de nuevas herramientas de gran recorrido en el siglo XVII

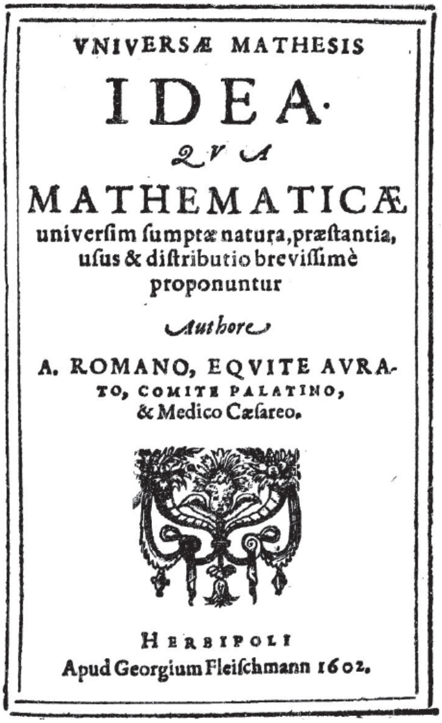
No puede quedar en el olvido, antes de analizar los nuevos progresos en el siglo XVII, y para finalizar con las matemáticas del Renacimiento, el extraordinario progreso de los métodos de cálculo algebraico obtenido por Adriann Van Roomen, más conocido con el nombre de Adrianus Romanus, nacido en Lovaina en 1562, murió en Mainz en 1615.

Figura 1. Adriann Van Roomen. http://www.cosmovisions.com/mathematiquesChrono.htm

Médico y matemático holandés, enseñó medicina y matemáticas en Lovaina, luego fue profesor y doctor en matemáticas en Würtzburg, y obispo de esta ciudad, finalmente hizo una estancia prolongada en Polonia como matemático del rey. Sus trabajos versaron principalmente sobre geometría y trigonometría plana y esférica. Propuso y dio solución a una ecuación algebraica de grado 45. Calculó el número Pi con quince decimales, 3.141592653589793. Entre sus obras destacan *Ideae mathematicae* (1593) y *Canon triangulorum sphericorum* (1609).

La aritmética, álgebra, geometría e incluso la antigua herencia de los griegos, volverán a hacer nuevos progresos, pero "el remate" o ábaco de las creaciones de las matemáticas del siglo XVII son: la geometría analítica, debido a Descartes y que trata las propiedades geométricas 'una figura que utiliza los procesos ordinarios del álgebra, y

Figura 2. Placa conmemorativa a Adriaan Von Roomen en la Colegiata de Neumünster de Wurzburgo (Alemania). https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Adriaan_van_Roomen_(mathematician).



VNIVERSÆ MATHESIS

IDEA.

QVA

MATHEMATICÆ

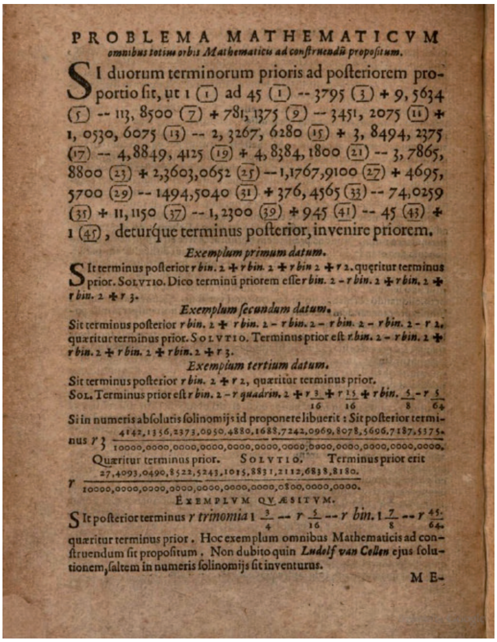
universim sumptæ natura, præstantia, usus & distributio brevissimè proponuntur

Authore

A. ROMANO, EQVITE AVRATO, COMITE PALATINO, & Medico Cæsareo.

HERBIPOLI

Apud Georgium Fleischmann 1602.



PROBLEMA MATHEMATICVM

omnibus totius orbis Mathematicis ad construendū propositum.

SI duorum terminorum prioris ad posteriorem proportio sit, ut 1 (1) ad 45 (1) -- 3795 (3) + 9,5634 (5) -- 113,8500 (7) + 781,1375 (9) -- 3451,2075 (11) + 1,0530,6075 (13) -- 2,3267,6280 (15) + 3,8494,2375 (17) -- 4,8849,4125 (19) + 4,8384,1800 (21) -- 3,7865,8800 (23) + 2,3603,0652 (25) -- 1,1767,9100 (27) + 4695,5700 (29) -- 1494,5040 (31) + 376,4565 (33) -- 74,0259 (35) + 11,1150 (37) -- 1,2300 (39) + 945 (41) -- 45 (43) + 1 (45), deturque terminus posterior, invenire priorem.

Exemplum primum datum.

SIt terminus posterior *r bin.* 2 + *r bin.* 2 + *r bin* 2 + *r* 2. quæritur terminus prior. SOLVTIO. Dico terminū priorem esse *r bin.* 2 − *r bin.* 2 + *r bin.* 2 + *r bin.* 2 + *r* 3.

Exemplum secundum datum.

Sit terminus posterior *r bin.* 2 + *r bin.* 2 − *r bin.* 2 − *r bin.* 2 − *r bin.* 2 − *r* 2. quæritur terminus prior. SOLVTIO. Terminus prior est *r bin.* 2 − *r bin.* 2 + *r bin.* 2 + *r bin.* 2 + *r bin.* 2 + *r* 3.

Exemplum tertium datum.

Sit terminus posterior *r bin.* 2 + *r* 2, quæritur terminus prior.

SOL. Terminus prior est *r bin.* 2 − *r quadrin.* 2 + $r\,\frac{3}{16}$ + $r\,\frac{15}{16}$ + *r bin.* $\frac{5}{8}$ − $r\,\frac{5}{64}$

Si in numeris absolutis solinomijs id proponere libuerit: Sit posterior terminus $r\,3\,\frac{4142,1356,2373,0950,4880,1688,7242,0969,8078,5696,7187,5375}{10000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000}$.

Quæritur terminus prior. SOLVTIO. Terminus prior erit

$r\,\frac{27,4093,0490,8522,5243,1015,8831,2112,6838,8180}{10000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000}$.

EXEMPLVM QVÆSITVM.

SIt posterior terminus *r trinomia* $1\,\frac{3}{4}$ -- $r\,\frac{5}{16}$ -- *r bin.* $1\,\frac{7}{8}$ -- $r\,\frac{45}{64}$. quæritur terminus prior. Hoc exemplum omnibus Mathematicis ad construendum sit propositum. Non dubito quin **Ludolf van Collen** ejus solutionem, saltem in numeris solinomijs sit inventurus.

M E-

Figura 3. Portada y Página del prefacio de la obra de Van Roomen *Ideae mathematicae.* https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Adriaan_van_Roomen_(mathematician) especialmente el cálculo infinitesimal, elaborado por Cavalleri (al transformar el método de agotamiento de Arquímedes, conduce a su geometría de indivisibles), Fermat y Barrow (método de tangentes) y fundado por Newton y Leibniz aumentará prodigiosamente el poder de las matemáticas. No se abrió nuevos campos solo en matemáticas puras, sino también en mecánica y física. De esta manera se encontró la solución definitiva a algunos problemas que venían reelaborándose desde antiguo: *centros de gravedad, cuadraturas y cubaturas de figuras planas y espaciales*, principalmente. Estos viejos problemas encerraban *el tratamiento de lo infinito y lo continuo*, considerándose herederos de una tradición que se remontaba como se ha indicado, ut supra, a la Grecia Antigua.

1.1.1. Logaritmos

Aunque la aritmética india y la notación de fracciones decimales reducen los cálculos numéricos al mayor grado de simplicidad, estos cálculos aún serían a menudo muy difíciles e incluso impracticables por su longitud, si Neper no hubiera "imaginado" los logaritmos, mediante los cuales todas las operaciones se reducen, por así decirlo, en un grado.

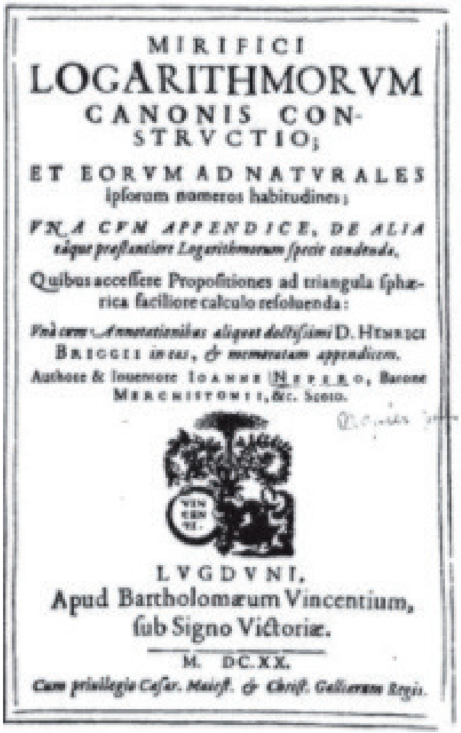
Figura 4. John Napier. https://www.biografiasyvidas.com/biografia/n/napier.htm

John Napier, llamado Neper, es un matemático nacido en el castillo de Merchiston, cerca de Edimburgo (Escocia), en 1550, murió en Merchiston el 4 de abril de 1617. Hijo de Archibald Napier, director de la Casa de la Moneda de Escocia, se crio en la Universidad de Saint Andrew y completó sus estudios en Francia e Italia.

A los veintidós años se casó con Elisabeth Stirling de Keir y se instaló con ella en Gartnes, en un castillo situado en uno de los rincones más pintorescos de Escocia. Allí llevó la vida pacífica del terrateniente, que apenas se vio perturbada excepto por discusiones sobre la herencia, tras la muerte de su padre, por experimentos agrícolas, que no siempre tuvieron éxito, y por una controversia religiosa bastante amarga. Como todo buen británico, se sintió obligado a contar a los *papistas* sus hechos y denunciarlos en público. Y no contento con dirigir panfletos contra ellos, inventó para defender a Inglaterra de las *empresas enemigas* de Dios y de la verdadera religión ¡dos espejos relucientes, un cañón *y una especie de ametralladora!*

Napier tuvo de Elisabeth Stirling un hijo, Archibald (1576-1645), que fue Tesorero de Escocia y una hija, de su segunda esposa, Agnes Chisholm, tuvo cinco hijos.

La base de los llamados logaritmos naturales del nombre del autor es el número e = 2.7182818. describe su descubrimiento en su *Logarithmorum canonis descriptio* (Edimburgo, 1614), pero sin explicar los medios empleados para lograrlo. Simplemente apela



MIRIFICI
LOGARITHMORVM
CANONIS CONSTRVCTIO;
ET EORVM AD NATVRALES ipsorum numeros habitudines;
VNA CVM APPENDICE, DE ALIA eàque præstantiore Logarithmorum specie condenda.
Quibus accessere Propositiones ad triangula sphærica faciliore calculo resoluenda:
Vnà cum Annotationibus aliquot doctissimi D. HENRICI BRIGGII in eas, & memoratam appendicem.
Authore & Inuentore IOANNE NEPERO, Barone MERCHISTONII, &c. Scoto.
LVGDVNI,
Apud Bartholomæum Vincentium, sub Signo Victoriæ.
M. DC.XX.
Cum priuilegio Cæsar. Maiest. & Christ. Galliarum Regis.

Figura 5. *Mirifici logarithmorum*.

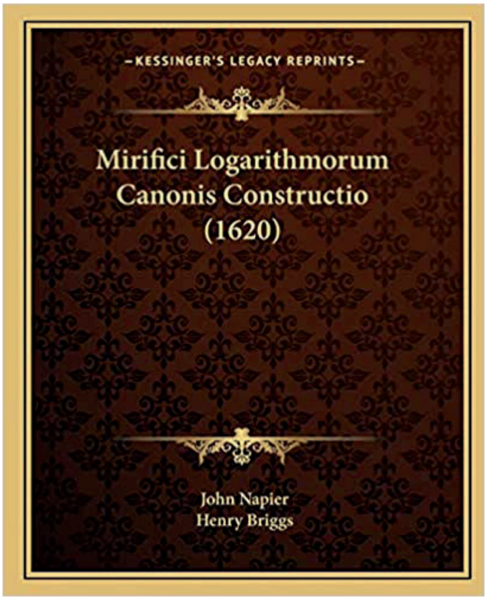


Figura 6. *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1620) *canonis constructio* (1620). Kessinger Pub (2010).

a consideraciones mecánicas, e incluso los logaritmos conocidos hoy como neperianos parecen haber sido imaginados por Speidel. Tras su fallecimiento, su hijo publicó la obra, *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Lyon, 1620), que revelaba los procesos implementados por su padre.

Henry Briggs, profesor del Gresham's College, Oxford , tiene la idea de tomar 10 como base del sistema de logaritmos, y calcula la primera tabla de logaritmos de los números del 1 al 1000 con 14 decimales (1618). En su *Arithmetica logarithmica* (1624), completó este ensayo dando los logaritmos de 1 a 20.000 y de 90.000 a 100.000. En 1628, Vlacq llena el hueco de 20.000 a 90.000 estableciendo tablas con 10 decimales que contienen, además de los logaritmos de los números de 1 a 100.000, los logaritmos de los senos, tangentes y secantes, calculados minuto a minuto para todos los grados de un cuarto de círculo (1633). Este libro fue la fuente para sus sucesores, durante los siglos siguientes: Callet (1783), Lalande (1802), Prony y Schroen, por nombrar sólo los más famosos.

Hasta la llegada de los ordenadores electrónicos en la segunda mitad del siglo XX, los logaritmos mantuvieron la mejor manera de hacer frente a los complicados cálculos numéricos.

A Napier siempre le habían gustado las abstracciones matemáticas. Dedicaba todo su tiempo libre a estos estudios, y sólo lo distraía el ardor de su pasión religiosa. En 1594 inventó los logaritmos, descubiertos casi al mismo tiempo por Juste Byrge, y utilizó los últimos veinte años de su existencia para desarrollar su teoría, perfeccionar el método y calcular tablas. Es superfluo insistir aquí en los méritos de estas obras que, gracias a la activa propaganda de Kepler, lograron los

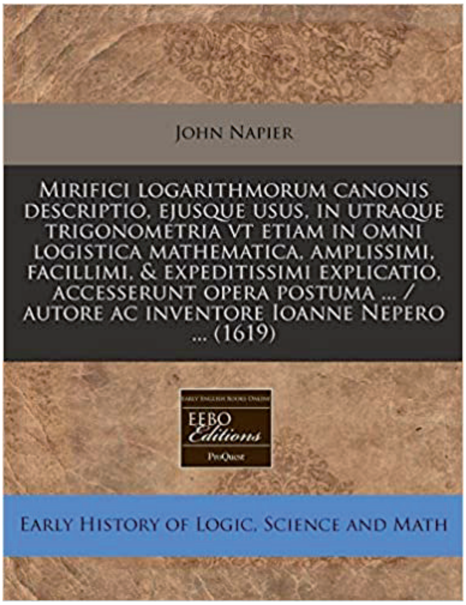


Figura 7. *Mirifici logarithmorum canonis* descriptio. Ed. 2010. Early History of logic Science and Math.

Figura 8. *Mirifici logarithmorum canonis descriptio.* Ed. A., G. Cadorino. Edinburgh; Padua, 1667.

mayores avances en astronomía y ciencias exactas y marcaron una fecha en la historia de las ciencias.

Los escritos de Napier son: *Un simple descubrimiento de toda la Revelación de St-John* (Edimburgo, 1594), traducido al holandés, al francés (La Rochelle, 1602) y al alemán; *De Arte logistica* (1839); *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614, y Lyon, 1620) traducido al inglés en 1616; *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1620), traducido al inglés en 1889; *Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo* (1617), que contiene los principios sobre los que se fundaron las máquinas de calcular.

Se recuerda también a Napier en la historia de la trigonometría por haber encontrado importantes relaciones entre los elementos de los triángulos planos (teorema de Napier) y entre los de los triángulos esféricos (analogías de Napier).

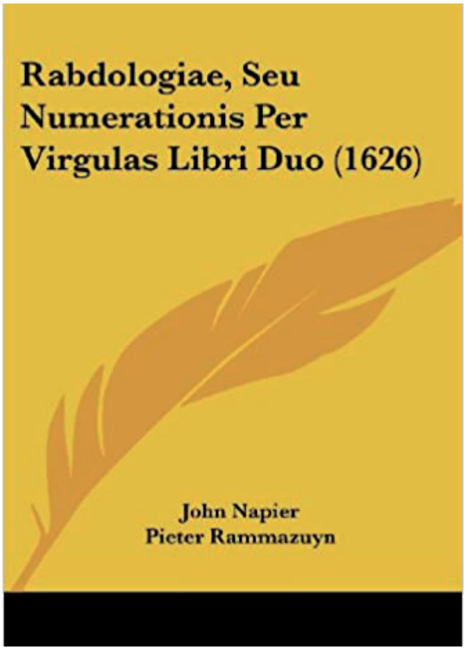


Figura 9. *Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo.* Ed. Kessinger Publishing (2009).

Fig. 10. Jost Bürgi. https://es.wikipedia.org/wiki/Joost_B%C3%BCrgi#/media/Archivo:Jost_B%C3%BCrgi_Portr%C3%A4t.jpg

Joost Bürgi o Jobst Bürgi (también conocido por su forma latinizada Byrgius) (28 de febrero de 1552, Lichtensteig, Suiza - 31 de enero de 1632, Kassel, Hesse-Kassel) fue un relojero y matemático suizo. En ocasiones es acreditado como el inventor de los logaritmos (que publicó en 1620), aunque habitualmente el crédito de este descubrimiento se atribuye al británico John Napier, quien fue el primero en publicar su trabajo.

También fue un gran contribuidor a la ***prostaféresis***, que es una técnica rápida para calcular productos usando identidades trigonométricas, procedimiento ideado antes que los logaritmos. Es decir, es un algoritmo utilizado a finales del siglo XVI y principios del XVII para aproximar la multiplicación y división de números mediante identidades trigonométricas. Durante los 25 años que precedieron la introducción del logaritmo en 1614, la prostaféresis era el único método conocido y aplicable a gran escala para aproximar rápidamente un producto. El término proviene de las palabras griegas *prosthesis* (πρόσθεσις) y *aphairesis* (ἀφαίρεσις), que significan adición y sustracción, dos de los pasos del proceso.

En la Europa del siglo XVI, los navíos que surcaban los mares utilizaban para orientarse la navegación astronómica, que hacía un fuerte uso de las efemérides para determinar su posición y dirección. Estas tablas voluminosas confeccionadas por astrónomos reflejaban la posición de los astros a lo largo del tiempo. Para calcular dichas posiciones, se utilizaba la trigonometría esférica.

A pesar de que era un autodidacta, ya en vida fue considerado como uno de los más excelentes ingenieros mecánicos de su generación. Su patrón, Guillermo IV de Hesse-Kassel, en una carta a Tycho Brahe alabó a Bürgi como un *segundo Arquímedes*.

No se sabe mucho sobre su vida o su educación antes de su empleo como astrónomo y relojero en la corte de Guillermo IV en Kassel en 1579; se ha especulado que adquirió sus conocimientos matemáticos en Estrasburgo, entre otros del matemático suizo Conrad Dasypodius (que ejerció la docencia en matemáticas en Estrasburgo. Nació en Frauenfeld, Thurgau, Suiza. Su primer nombre también se tradujo como Konrad o Conradus o Cunradus, y su apellido se ha indicado alternativamente como Rauchfuss , Rauchfuß y Hasenfratz . Era hijo de Petrus Dasypodius (Peter Hasenfuss) (1490-155), un humanista y lexicógrafo. En 1564, Dasypodius editó varias partes de los Elementos de

Euclides. En el prefacio, dice que durante 26 años había sido la regla en su escuela que todos los que fueran promovidos de las clases a conferencias públicas debían aprender el Libro I de los Elementos. En 1568, Dasypodius publicó un trabajo sobre la teoría heliocéntrica de Nicolaus Copernicus, *Hypotyposes orbium coelestium congruentes cum tabulis Alfonsinis et Copernici seu etiam tabulis Prutenicis.* No está claro si Dasypodius era un heliocentrista o más bien siguió la interpretación de Wittenberg. Dasypodius diseñó un reloj astronómico para la catedral de Estrasburgo: ese reloj fue construido en 1572-1574 por Isaac Habrecht y Josia Habrecht. Este reloj monumental representó la síntesis del conocimiento científico más avanzado de la época, en los dominios de la astronomía, las matemáticas y la física. Ese mecanismo permaneció en la Catedral hasta 1842, cuando fue reemplazado por un reloj construido por Jean Baptiste Schwilgué. Dasypodius tradujo los escritos de Herón de Alexandria del griego al latín. Dasypodius murió en Estrasburgo, pero no se dispone de datos que lo confirme.

1.1.2. Teoría de números

La teoría de números renace en el siglo XVII con Bachet de Méziriac (1587-1638), que en 1621 hace una muy buena primera traducción de Diofanto, y en 1624 una colección de problemas agradables y deliciosos con números. Claude-Gaspard Bachet, señor de Méziriac (o de Mézériat), nace el 9 de octubre de 1581 en Bourg-en-Bresse y fallece en París el 28 de febrero de 1638. Matemático y filólogo, se dice que en su juventud ingresó en la orden de los jesuitas, enseñando retórica a los veinte años en un colegio de Milán, pero pronto volvió a la vida civil y se instaló en París. donde formó parte de la Académie Française desde su fundación en 1634. Sus títulos literarios fueron: *Chansons dévotes et saintes sur toutes les principales fêtes de l'anné* (incluidas algunas piezas de su hermano Guillaume) (Dijon, 1615 y Lyon, 1618); *Les Epîtres d'Ovide en vers français avec des commentaires fort curieux*, Bourg-en-Bresse, 1626, reimpreso en La Haye, 1746, con algunos otros panfletos de Bachet, inéditos o sólo publicados en folletos.

Figura 11. Claude-Gaspard Bachet, señor de Méziriac. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bachet/

Como matemático, publicó, en 1612, en Lyon (2a ed., 1624), *Problemas agradables y deliciosos que se hacen con n*úmeros, de los que Labosne proporcionó en 1874 (París, Gauthier-Villars), una nueva edición, revisada y acortada donde encontramos la solución completa de los problemas de análisis indeterminado de primer grado, primero en

Figura 12. Pierre Fermat. http://www.cosmovisions.com/Fermat.htm.

Europa en abordar este problema metódicamente. Escribió libros sobre acertijos matemáticos que formaron la base de casi todos los libros posteriores sobre recreaciones matemáticas.

Se publica su excelente edición grecolatina: *Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex et de numeris rectangulis liber unus* en París, 1621, enriquecido con comentarios que sólo pueden ser criticados por su prolijidad y que fueron, en todo caso, el punto de partida del trabajo de Fermat en la teoría de números.

Bachet dejó un manuscrito: *Elementorum arithmeticorum libri XIII*, del cual se ha publicado importantes extractos en Bullettino Boncompagni en 1879. La Biblioteca Nacional tiene otra parte de sus trabajos, en particular un *Comentario sobre Apolodoro.*

Los versos en francés de Bachet, que se hicieron famosos durante su vida, no son atractivos y suelen ser "muy pesados" y carecen de gracia, pero se le consideraba un gran humanista y erudito, y su valor no era inferior como matemático.

El gran creador en la teoría de Números es Pierre Fermat (1601-1665). Es un matemático, nacido en Beaumont-de-Lomagne en agosto de 1601, muerto en Castres el 12 de enero de 1665. Hijo de Dominique Fermat, burgués y segundo cónsul de Beaumont, y de Claire de Long, que pertenecía a la familia parlamentaria, Pierre, después de haber recibido su primera educación con los Cordeliers de Beaumont, terminó sus estudios en Toulouse tomando destino en la magistratura.

Su nombramiento como consejero de la Cámara de Investigaciones estaba fechado el 30 de diciembre de 1634; logró, con bastante dificultad, pasar por la sala del edicto en agosto de 1648, falleció dos días después de haber denunciado allí un pleito. Dejó cinco hijos: Clément-Samuel (1632-1690), abogado y asesor del Parlamento; Juan, archidiácono de Fimarens; Claire, cuyo nieto, Jean Gailhard, sucedió a Jean-François, hijo de Clément-Samuel, como consejero; finalmente Catherine y Louise, que eran ambas monjas. Fue sólo como asesor de la corte que Fermat tomó, según la costumbre, la parte nobiliaria, que a menudo se agrega a su nombre.

Si bien su carrera como magistrado transcurrió oscuramente, a través de su correspondencia con algunos estudiosos de su época (Roberval , Torricelli , Huygens , etc.) y por la comunicación en manuscrito de tratados compuestos en latín, adquirió, en 1637, la reputación de un matemático destacado. Sus principales relaciones fueron primero con Despagnet (el hijo), consejero del parlamento de Burdeos, Carcavi, quien, primero su colega en Toulouse, lo puso en contacto, una vez en París, con Beaugrand y Mersenne , que hizo depositario de sus escritos. Todos ellos fueron responsables de la propagación de las obras de Fermat. Con Descartes, sobre la explicación de la refracción, tuvo una disputa que pronto se extendió al método de maximis et minimis del que Fermat fue el inventor, y que terminó en una aparente reconciliación.

También fue a través de Mersenne que Fermat conoció a Roberval y Frénicle. Posteriormente, Carcavi lo puso en contacto con Blaise Pascal y probablemente también con Digby, lo que le dio la oportunidad del desafío y del proceso matemático, cuyas piezas están recogidas en el Commercium epistolicum de Wallis. Fermat, después de haberle contado a Carcavi varias veces sobre el proyecto de publicar sus obras, sin poner su nombre allí, murió, habiendo tenido impresa una sola tesis bajo las iniciales MPEAS, en 1660 (siguiendo el tratado de Lalouvère sobre cicloide), donde demostró, como Arquímedes , la rectificación de curvas geométricas. Por una de estas curvas, había sido precedido, sin que él lo supiera, por Neil y Van Heuraet; la rectificación de otro (desarrollado a partir de la hipérbola equilátera) le pertenece sin lugar a dudas. Su hijo Samuel se ocupó de publicar los escritos de su padre, pero experimentó las mayores dificultades, pues, por un lado, no era en absoluto un matemático; por otro lado, Fermat no tenía la costumbre de guardar papeles, ni siquiera copias de sus obras, y Carcavi mostraba una mala voluntad difícil de explicar. El nombre del matemático de Toulouse es inseparable de la teoría de los números, cuyas bases puso mientras estudiaba a Diofanto. Dado que, en su tiempo, se prestó mucha más atención a las soluciones de los problemas que a los teoremas, y dado que después de él la invención del cálculo infinitesimal absorbió las mentes, sus proposiciones generalmente enunciadas sin prueba en su correspondencia o en las observaciones sobre Diofanto permanecieron infructuosas hasta Euler , y todavía no podemos estar seguros de saber tanto sobre este tema como él.

Si una de estas proposiciones (que $2^{2n}+1$ es un número primo) ha sido reconocida como falsa, es especialmente esta otra (que $x^n + y^n = z^n$ es imposible en números enteros, si $n> 2$) que se asumió que era cierto sin haberse podido demostrar, hasta 1994 gracias al trabajo a largo plazo de Andrew Wiles, demostrarlo en toda su generalidad. Aunque declara formalmente tener la demostración de esta última proposición (que nunca hizo para la primera), teniendo en cuenta el método de trabajo de su cabeza, un error de su parte no es imposible (sus escritos, incluso los más elaborados, podrían dar evidencia). En cualquier caso, no disminuiría la gloria de un hombre que fue el primero en abordar cuestiones de este tipo y encontrar métodos para resolverlas.

A Fermat también se le atribuye la invención del cálculo diferencial con respecto a su método de máximos y mínimos y tangentes, que, de los métodos anteriores, es en realidad el más cercano al algoritmo de Leibniz ; se podría, con tanta justicia, atribuirle la invención del cálculo integral; su tratado *De Oequationum localium transmutatione ,* da de hecho el método de integración por partes, al mismo tiempo que reglas para integrar, además de cualquier potencia de las variables, sus senos y las potencias de estas. Cabe señalar, sin embargo, que no encontramos en sus escritos una sola palabra sobre el punto mayúsculo, la relación entre las dos ramas del cálculo infinitesimal.

Pero lo importante es que Fermat comparte con Descartes la invención de la geometría analítica; lo concibió al mismo tiempo, de manera completamente independiente y en una forma más cercana a la clásica que la de Descartes (*Isagoge ad locos planos et solidos*). Corrigió a su rival en un punto esencial, la clasificación por grados. También fue el primero en intentar extenderse a tres dimensiones, en un ensayo por lo demás desafortunado (*Isagoge ad locos ad superficiem*), en el que, tratando de clasificar las superficies de segundo grado, reconoce como regladas solo los conos. y los cilindros.

En álgebra pura, le debemos en particular el primer método general de eliminación. Se le puede considerar con Pascal como el inventor del cálculo de probabilidades. Finalmente, dejó, en la geometría antigua, obras notables, en particular una restitución de los *Lieux plan* de Apolonio .

Aparte de sus aptitudes matemáticas, Fermat poseía una singular erudición. La filología griega y latina le debían varias correcciones importantes y le gustaba componer versos latinos. Su carácter, según su correspondencia, es afable, inverosímil, sin orgullo, pero con ese punto de vanidad que Descartes, su opuesto en todos los aspectos, caracterizaba por decir: "*El señor de Fermat es gascón, yo no soy*. " (P. Curtiembre).

Conocemos su obra aritmética por la publicación que hizo, en 1670, su hijo Samuel Fermat, de una edición de Diofanto. acompañado de las notas que Pierre Fermat había escrito al margen de su copia; allí se encuentran las soluciones de estos problemas sobre los números, con los que Fermat desesperaba a sus corresponsales, y también de los teoremas: la demostración completa tuvo que esperar hasta 1994. Fermat poseía quizás, para el estudio de los números, un método sencillo que desconocemos: En aritmética se ha quedado sin igual.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

¡El triángulo, siempre el triángulo! El hombre desde su creación ha utilizado herramientas inspiradas en formas geométricas simples, y no tan simples para poder sobrevivir. La construcción de caminos, viviendas, herramientas para cazar…

Por su simpleza e interés, se utiliza el triángulo en el quehacer diario de las personas, solo la observación de nuestro entorno nos permite identificar infinidad de formas triangulares. observar a nuestro alrededor para identificar las formas triangulares: casa, ornamentos, joyería, objetos de nuestros escritorios, mesas, señales que ordenan y organizan el tráfico en las ciudades y carreteras,..

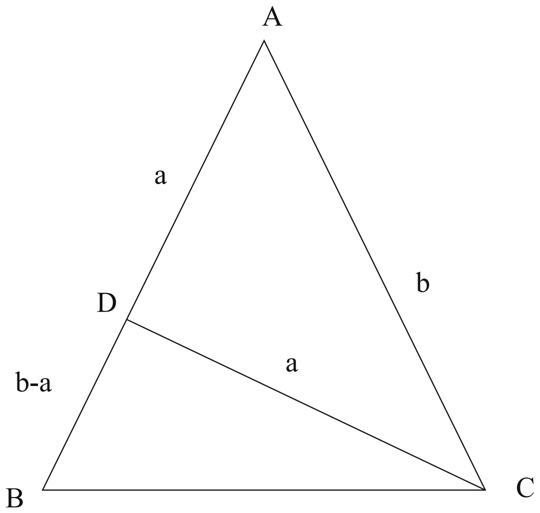
Los triángulos tienen una gran importancia en la geometría, pues todo polígono puede ser descompuesto o formado por triángulos. Es por esta razón que la geometría es de suma importancia en el campo científico y de sus aplicaciones.

En esta entrega, presentamos una vez más, como primera joyita geometría al triángulo como figura importante en la geometría. Sus elementos los traigo, en esta ocasión, una vez más, para calcular la medida de un lado sin recurrir a las funciones trigonométricas (¡La trigonometría, rama de la matemática, cuya etimología significa "medición del triángulo"!). Y como segunda joyita, presento un ejercicio sencillo que relaciona geometría analítica con la teoría de probabilidad.

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 104)

*Ejercicios propuestos en la Olimpiada Matemática Nacional Española
http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimmain.html

JOYITA*: a) *El ángulo A del triángulo isósceles ABC mide 2/5 de recto, siendo iguales sus ángulos B y C. La bisectriz de su ángulo C corta al lado opuesto en el punto D. Calcular las medidas de los ángulos del triángulo BCD. Expresar la medida **a** del lado BC en función de la medida **b** del lado AC, sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas.*



SOLUCIÓN

Consideremos la imagen de arriba dónde se pueden observar los tres triángulos: $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{BDC}$ y $\overset{\triangle}{ADC}$.

Paso 1

Con la hipótesis inicial que nos proporciona el ejercicio, podemos decir que:

- En el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ se cumple

$$\widehat{BAC} = 36^{o};\ \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72^{o}$$

- En el triángulo $\overset{\triangle}{CBD}$ se tiene

$$\widehat{BCD} = 36^{o};\ \widehat{CBD} = \widehat{BDC} = 72^{o}$$

- En el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ se tiene

$$\widehat{DAC} = \widehat{ACD} = 36^{o};\ \widehat{ADC} = 108^{o}$$

Paso 2

De aquí se deduce que los triángulos $\overset{\triangle}{BCD}$ y $\overset{\triangle}{ADC}$ son isósceles y además el triángulo $\overset{\triangle}{BCD}$ es semejante al triángulo ABC.

Paso 3

Se infiere para los lados que DC=AD=*a*; y BD=*b-a*

En función de la semejanza anterior se cumple la proporcionalidad

$$\frac{b-a}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a^2 = b^2 - ab \Leftrightarrow a^2 + ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0$$

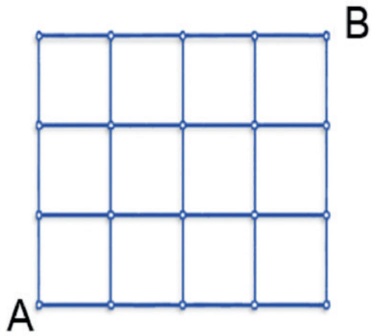
Paso 4

De aquí se puede calcular el valor de *a* en fucnión de b, como se solicita en ele ejercicio:

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{5b^2}}{2} = \frac{-b \pm b\sqrt{5}}{2} = b.\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Conclusión el lado *a* es la sección aúrea del lado *b*.

JOYITA*: b) *La figura adjunta muestra un plano con calles que delimitan 12 manzanas cuadradas*



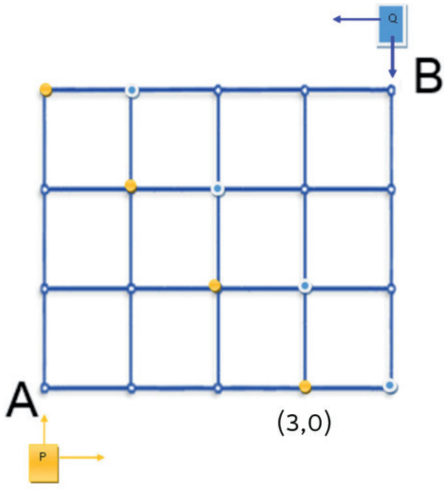
Una persona P va desde A hasta B y otra Q desde B hasta A. Ambas parten a la vez siguiendo caminos de longitud mínima con la misma velocidad constante. En cada punto con dos posibles direcciones a tomar, ambas tienen la misma probabilidad. Hallar la probabilidad de que se crucen.

SOLUCIÓN

Paso 1

Comencemos por ***definir un sistema de coordenadas*** en la figura que muestra el plano con las calles que delimitan las 12 manzanas cuadradas.

- Origen: (0,0) es el Punto A.
- Extremo: (4,3) es el Punto B.
- Movimientos de P y Q recorren, según las hipotésis dadas, caminos de longitud mínima, por lo tanto, la persona P sólo puede ir hacia la derecha o hacia arriba, mientras que la persona Q puede ir a la izquierda y abajo.

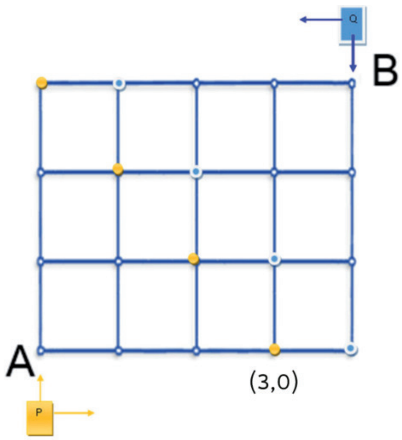


Paso 2

Todos los caminos tendrán siete unidades de longitud. Por lo tanto, las personas P y Q se podrán solamente entre el tercer y cuarto movimiento. Se señalan con diferentes colores las diferentes posiciones de P y de Q.

Paso 3

Estudiemos los diferentes casos:
I. La persona P llega al punto **(3,0)**



Su probabilidad será (1/2).(1/2).(1/2)=1/8. Sólo se podrá cruzar con la persona Q si ésta se encuentra en el punto (1,3): esto sucede también con probabilidad

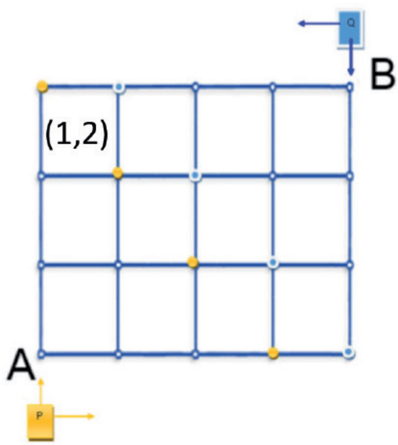
(1/2). (1/2). (1/2)=1/8.

Por lo tanto, la persona P está obligada a pasar por el punto (1,3), mientras que la persona Q pasa a (0,3) con probabilidad ½.

En consecuencia, la probabilidad de que se cruce entre (3,0) y (1,3) es el producto:

$$(1/8).\ (1/8).(1/2)=\ 1/2^7$$

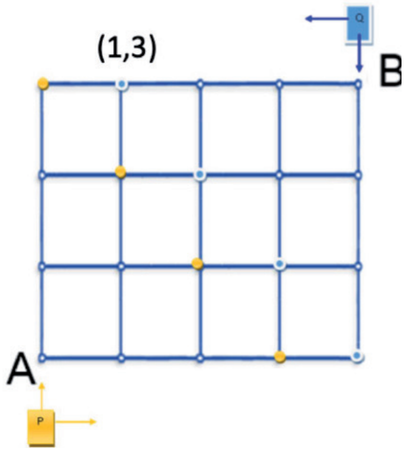
II. La persona P llega al punto **(1,2)**



La probabilidad de que P llegue a (1, 2) es $3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$.

Nota: Fácilmente se puede describir que hay tres modos de llegar **(1, 2)**.
Sólo se puede cruzar con Q si éste está en (1, 3) o en (2, 2).
Distingamos ambos casos:

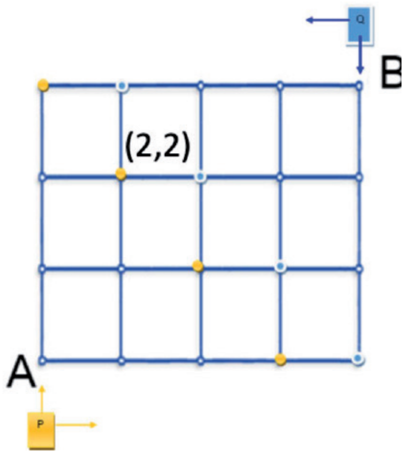
a) Q llega a (1, 3) con probabilidad $\frac{1}{8}$, entonces se cruzarán entre (1, 2) y (1, 3) si P se



mueve hacia (1, 3) y Q hacia (1, 2) ambos movimientos con probabilidad $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la probabilidad de cruzarse es $\frac{3}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{2^8}$.

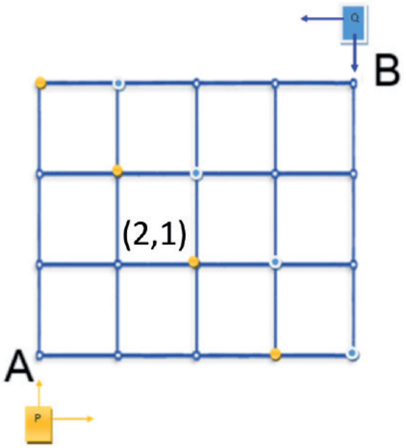
b) Q llega a (2, 2) con probabilidad $\frac{3}{8}$, entonces se cruzarán entre (1, 2) y (2, 2) si P se



mueve hacia (2, 2) y Q hacia (1, 2) ambos movimientos con probabilidad $\frac{1}{2}$.

La probabilidad de cruzarse es $\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{9}{2^8}$.

III. La persona P llega al punto **(2, 1)**.



Si razonamos de forma análoga, se tiene que la probabilidad de cruzarse entre los puntos (2, 1) y (2, 2) es, $\frac{9}{2^8}$ y la de cruzarse entre (2, 1) y (3, 1) es $\frac{9}{2^8}$.

IV. La persona P llega al punto **(3,0)**.

La probabilidad de cruzarse entre (3, 0) y (3, 1), es $\frac{3}{2^8}$ y la de cruzarse entre (3, 0) y (4, 0) es $\frac{1}{2^7}$.

Paso 4: Conclusión

La probabilidad pedida es la suma de todos los casos, resulta:

$$\frac{1}{2^7}+\frac{3}{2^8}+\frac{9}{2^8}+\frac{9}{2^8}+\frac{9}{2^8}+\frac{3}{2^8}+\frac{1}{2^7}=\frac{37}{256}$$

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la propuesta de los ejercicios del número anterior 104)

*Ejercicios propuestos en la Olimpiada Matemática Nacional Española
shttp://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimmain.html

En esta ocasión presento la solución de dos Joyitas Numéricas: una que aborda las progresiones aritméticas con la presencia de algunas propiedades de los números piramidales; y la segunda utiliza el binomio de Newton y el principio de inducción. los conceptos de desigualdad y potencias de números naturales.

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

JOYITA: a) *Calcular la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale -1, y que la suma de los términos de lugar par vale +1.*

SOLUCIÓN

Paso 1

Consideremos lasa progresión aritmética :

$$p,\ p+d,\ p+2d,\ p+3d,\ldots\ldots p+99d.$$

Nos piden calcular la suma de los cuadrados:

$$p^2,\ (p+d)^2,\ (p+2d)^2,\ (p+3d)^2,\ldots\ldots,\ (p+99d)^2$$

Paso 2

Para calcular p y d resolveremos el sistema siguiente:

$$\sum_{h=0}^{99}(p+hd)=-1\Rightarrow\frac{[p+(p+99d)]100}{2}=-1\Rightarrow[p+(p+99d)]50=-1$$

$$\sum_{h=0}^{50}[p+(2h+1)d]=1\Rightarrow\frac{[p+d+p+99d)50]}{2}=1\Rightarrow[p+d+p+99d]25=1$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} [p+(p+99d)]50=-1 \\ [p+d+p+99d]25=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 50p+50p+99.50d=-1 \\ 25p+25d+25p+99.25d=1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 100p+4950d=-1 \\ 50p+2500d=1 \end{matrix} \Rightarrow d=\frac{3}{50};p=\frac{-745}{250}$$

PASO 3

De la expresión

$$S=\sum_{h=0}^{h=99}(p+hd)^2=100p^2+2pd(1+2+3+...+99)+d^2(1^2+2^2+...+99^2)$$

Se deduce que el resultado final se obtiene de la expresión:

$$S=100.\left(\frac{-745}{250}\right)^2+2.\left(\frac{-745}{250}\right).\left(\frac{3}{50}\right).\left(\frac{(1+99)100}{2}\right)+\left(\frac{3}{50}\right)^2\left(\frac{99(2.99+1)(99+1)}{6}\right)$$

$$S=100.\left(\frac{-745}{250}\right)^2+2.\left(\frac{-745}{250}\right).\left(\frac{3}{50}\right).\left(\frac{(1+99)99}{2}\right)+\left(\frac{3}{50}\right)^2\left(\frac{99(2.99+1)(99+1)}{6}\right)\Rightarrow S=299{,}98$$

Que es la solución final para la suma solicitada:

$$S=299{,}98$$

JOYITA: b) *Hallar todos los números enteros positivos m y n para los que*

$$(m+1)^m = 2m^n + 3m+1$$

SOLUCIÓN

Paso 1

- Veamos que sucede para cuando m=1

$$(1+1)^1=2.1^n+3.1+1\Rightarrow 2\neq 6,\forall n\in N$$

- ¿Qué sucede para $n\geq 2$?
  Aplicado el binomio de Newton

$$(m+1)^m - 1 = \sum_{i=0}^{i=m} \binom{m}{i} m^{m-i} - 1 \Rightarrow (m+1)^m - 1 = m^2 + \binom{m}{2} m^2 + \binom{m}{3} m^3 + \ldots$$

que nos lleva a afirmar que es múltiplo de m^2.

Paso 2

Analicemos varios casos:

- $n=1$. Entonces, m^2 divide a $2m^1+3m= 5m$. Por lo tanto, m dividiría a 5, con lo que $m=5$, y la expresión inicial nos lleva a que $6^5=26$, lo cual es trivial y efectivamente falso.
- $n \geq 2$. Entonces, m^2 dividiría a $2m^n + 3m$, pero como divide a $2m^n$, también ha de dividir a 3m, es decir que m divide a 3, con lo que m=3.

Paso 3

Se puede demostrar fácilmente que para m=3, la ecuación se convierte en $4^3 = 2.\ 3^n + 10$. Por lo tanto, de la expresión:

$$4^3 = 2.\ 3^n + 10.$$

Se deduce que $2.\ 3^n = 4^3 - 10 = 54$.
De dónde concluimos que $3^n = 27$, y por lo tanto esto se cumplirá si y solo sí n=3.

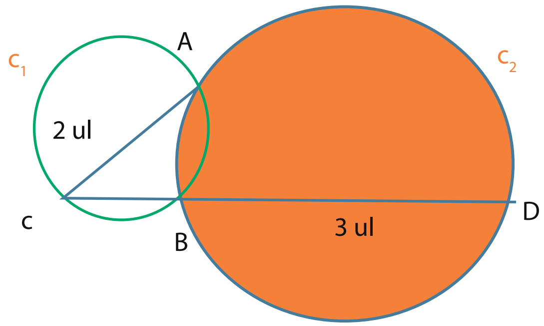
SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS.

En números anteriores planteaba diversas cuestiones entorno a: "… *Desarrollar las habilidades matemáticas que poseen los alumnos y simultáneamente cubrir los objetivos más allá del curso. (Dichos objetivos rara vez mencionan a las habilidades, reduciéndose a la adquisición de conocimientos y manipulación de fórmulas para aplicaciones en problemas sencillos).....Impulsar a los estudiantes que tienen habilidades matemáticas e interés por aprender más profundamente esta ciencia...(sic)"*. En este número, quiero añadir unas líneas sobre la idea: "…*el rendimiento académico en matemáticas constituye uno de los desafíos permanentes en la mayoría de los sistemas educativos no sólo porque las matemáticas son consideradas como una de las asignaturas fundamentales en el currículum escolar, sino también por la contribución al desarrollo del conocimiento cognitivo del niño, y por la funcionalidad que poseen la mayoría de los aprendizajes matemáticos en la vida adulta. Dada esta importancia, en las sociedades modernas occidentales existe una creciente preocupación por el hecho de que una parte importante de los alumnos, y también la población en general, tiene relevantes* *dificultades para comprender y utilizar los conocimientos matemáticos*...) (sic) (Las actitudes hacia las matemáticas: perspectiva evolutiva. Núñez, J.C. et al).

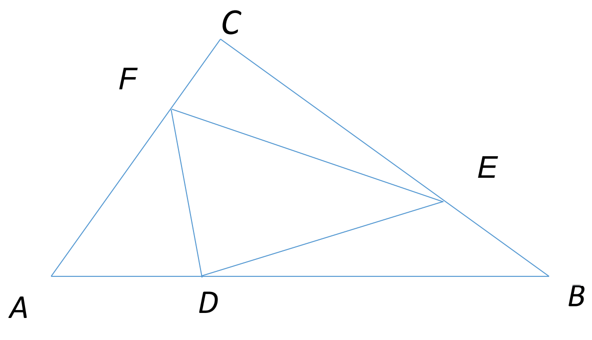
Para implicar al estudiante en su interés por la resolución de problemas en matemáticas lo que repercutiría directamente en su formación propongo las cuatro joyitas que aparecen a continuación.

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

a) *Los círculos C_1 y C_2 de la figura se intersectan en A y B. El diámetro CA de C_1es tangente a C_2 en A, y D es el punto en C_2 tal que C, B y D están alineados. Si BD = 3 y AC = 2, ¿Cuál es el área de C_2?*



b) *El área del triángulo ABC es igual a 40 cm².*



Los puntos D, E y F cumplen que DB = 3AD, CE = 3EB y AF = 3FC. ¿Cuál es el área del triángulo DEF*?*

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

a) *Enrique tiene que usar una tarjeta bancaria porque necesita dinero para salir de viaje. El código de cuatro dígitos se le ha olvidado y quiere recuperarlo. ¿Podrías ayudarle a encontrarlo, si cada uno de los números siguientes* ***6427, 4271, 6412, 2671****, tiene una cifra incorrecta y otra fuera de su lugar?*

b) *Hallar los pares de valores* ***(p, q)*** *para los que*

$$1+2^p+2^{2p+1}=q^2$$

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@gmail.com