Quintaesencia
Revista de Educación
ISSN 2076-5363 (en línea)

Quintaesencia [(2021), vol. 12, pp. 27-35]
DOI: https://doi.org/10.54943/rq.v12i.104

Artículo original

La historia del Límite para promover el conocimiento del contenido en los profesores

La historia del Límite para promover el conocimiento del contenido en los profesores

César Guillermo Rendón Mayorga

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia cgrendonm@upn.edu.co

Información

Recibido: 14/03/2021.

Aceptado: 26/05/2021.

Palabras clave:

Límites, Historia de las Matemáticas, Educación del profesor, Conocimiento Didáctico.

Resumen

Se presentan algunas tareas acerca del concepto de límite, inspiradas en la Historia de las Matemáticas (HM) y dirigidas a profesores en formación inicial, con el fin de indagar sobre su pertinencia en la promoción del conocimiento del contenido que debe tener el docente. La propuesta se fundamenta, por una parte, en la utilidad que puede tener el uso de la HM en la educación del profesor (Furinghetti, 2007) y por otra, en el trabajo de Ball, Thames, y Phelps (2008), particularmente en lo que denominan “Conocimiento Especializado del Contenido”. Se muestran algunos resultados de la puesta en práctica de las tareas y un análisis de los razonamientos que se ponen en juego, por parte de los docentes en formación, a la hora de resolverlas.

Information

Keywords:

Limits, History of Mathematics, Teacher Education, Didactic Knowledge.

Abstract

Some tasks about the concept of limit are presented, inspired by the History of Mathematics (HM) and addressed to teachers in initial training, in order to inquire about their relevance in the promotion of the content knowledge that the teacher should have. The proposal is based, on the one hand, on the usefulness that the use of the HM can have in teacher education (Furinghetti, 2007) and, on the other hand, on the work of Ball, Thames, and Phelps (2008), particularly on what they call "Specialized Content Knowledge". We show some results of the implementation of the tasks and an analysis of the reasoning put into play by the trainee teachers when solving them.

INTRODUCCIÓN

Desde hace bastantes años que la Educación Matemática, como campo de investigación, no solamente se ocupa de analizar los asuntos relativos a los estudiantes, como por ejemplo los procesos de enseñanza y aprendizaje, los errores, las dificultades, etc., también se ha venido preocupando, de una forma cada vez más sistemática, sobre los aspectos relativos a la formación del profesor de matemáticas escolares. Ha sido tanto el interés que incluso se ha conformado un campo de investigación paralelo, enriquecido por la Educación Matemática pero diferente de este, llamado por distintos autores como Educación del Profesor de Matemáticas “EPM” (Guacaneme & Mora, 2012).

En este campo interesa, entre otras, abordar el asunto de cuáles son los conocimientos que debe tener un docente de matemáticas para el buen ejercicio de su profesión, en búsqueda de responder a esa pregunta la cual se devela bastante compleja, se han desarrollado diferentes modelos de análisis, uno de ellos es el propuesto por Deborah Ball y su equipo de trabajo (Ball, Thames, & Phelps, 2008) llamado “Conocimiento Matemático para la Enseñanza”, los autores promulgan la presencia de distintos tipos de saberes en la formación del profesor dentro de su modelo. En este trabajo se abordará un componente del modelo en particular llamado “Conocimiento Especializado del Contenido” (SCK), el cual será descrito con detalle más adelante, por ahora basta mencionar que allí son considerados aquellos saberes específicos del profesor y que no son de uso común por parte de otros profesionales o ciudadanos en general.

Una forma que ha venido cobrando fuerza, en relación con el desarrollo de ese conocimiento especializado, es el uso de la Historia de las Matemáticas (HM), entendida como una fuente de recursos que pueden llegar a permear las aulas (escolares y de educación docente) con resultados provechosos en términos formativos (Clark, 2012).

Así las cosas, en este trabajo se propone una tarea inspirada por la Historia, dirigida a profesores en formación y que apunta hacia las nociones y el concepto que tienen acerca del límite. Para la propuesta de la tarea, se plantea en primer lugar una ubicación de los referentes teóricos y conceptuales que dan pie a la idea y se mencionaron de forma superficial en los párrafos anteriores de esta introducción, así como la descripción sucinta de algunos antecedentes de investigación que son relevantes para este trabajo. Seguidamente, se señalan algunos hitos históricos que fueron identificados como sustanciales en el desarrollo del límite, de estos derivan las tareas planteadas en Rendón (2017) y de las cuales se analizará una en particular.

Después, se describe cuál es la tarea que se aplicó a los estudiantes participantes, y son presentadas unas categorías preliminares de análisis para abordar de forma organizada los resultados obtenidos. Finalmente, se mencionan un par de conclusiones de la actividad en términos de lo considerado en los referentes teóricos y algunos asuntos que emergieron de forma inesperada en la aplicación de la tarea.

Referentes teóricos

El trabajo propuesto se fundamenta en esencia desde dos marcos teóricos a saber: en primer lugar, el modelo MKT (Ball, Thames, y Phelps, 2008), en español “Conocimiento Matemático para la Enseñanza”, como enfoque para analizar los conocimientos que debe tener el profesor de Matematicas en su acción profesional. Particularmente, se hará enfasis en el componente del modelo llamado “Conocimiento Especializado del Contenido” (SCK por sus siglas en inglés). Por otra parte, en segundo lugar, se considera el estudio de la Historia de las Matemáticas (HM) como área que puede enriquecer de forma sistemática la formación profesional de profesores, asunto que ha sido abordado en distintas investigaciones en las últimas décadas (Clark, 2012; Furinghetti, 2007; Guacaneme, 2016, etc.).

En lo que respecta al modelo MKT propuesto por Ball y su grupo de trabajo (2008) es de destacar que, aunque no es el primero que busca analizar los conocimientos propios del profesor, sí llama la atención su esquematización y sistema de categorías, tal como lo reseña Escudero (2015) toda vez que clasifica con precisión los elementos que deben ser consustanciales a la formación del profesor.

En lo que respecta al Conocimiento Especializado del Contenido, este se ha reconocido como uno de los aportes más relevantes del modelo MKT por los intereses que aborda, los cuales giran en torno al estudio de los conocimientos exclusivos del profesor de Matemáticas y que le son necesarios para el desarrollo de su profesión. Es decir, asuntos explícitamente matemáticos desde su carácter formal, componente que es opuesto al llamado “Conocimiento Común” y que son aquellos saberes matemáticos que debe tener cualquier otra persona independientemente de su profesión u oficio.

En los últimos años ha sido tan creciente el interés por el estudio del SCK que incluso han surgido propuestas alternativas para estudiar el mismo objeto, tal es el caso de, por ejemplo, la propuesta MTSK (Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas por sus siglas en inglés) planteada por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz Catalán (2013) citados por Montes, Contreras y Carrillo (2013), y que se basa en el supuesto de que la especialización del conocimiento del profesor deriva de su profesión.

En atención a las ideas presentadas sobre el SCK, este adquiere una relevancia particular en el marco de esta propuesta, en tanto la misma se constituye en el diseño de tareas específicas para la formación del profesor acerca del concepto de límite, que aluden a asuntos matemáticos que le son exclusivos y le permiten reflexiones así como transformaciones sobre su actuar docente, tareas de formación que probablemente no tendrían el mismo efecto pedagógico sobre personas ajenas al campo de la Educación Matemática y, por tanto, no se pueden entender como parte del conocimiento común.

Por otra parte, un segundo enfoque referencial que se ha considerado es la presencia de la Historia de las Matemáticas (HM) en la formación de profesores de Matemáticas y más en general, su influencia sobre el campo de investigación denominado Educación del Profesor de Matemáticas "EPM", (Guacaneme & Mora, 2012). Las relaciones que se pueden establecer entre HM y EPM son de diversa naturaleza y abarcan asuntos como la visión del conocimiento del profesor, la formación de profesores desde un punto de vista normativo, así como también un estudio sobre los conocimientos que debe tener el formador de profesores. Considerando estas vertientes que se logran advertir; cabe mencionar que en esta propuesta solo se analizará brevemente la influencia de la HM sobre las visiones o percepciones del conocimiento del maestro.

Tras hacer una revisión documental no es difícil concluir que la literatura que estudia dichas relaciones HM – EPM, aunque creciente, sigue siendo escasa (Guacaneme, 2016; Rendón, 2017). No obstante, investigadores como Furinghetti (2007) reseñan acerca de las bondades que tiene el uso de la Historia en la formación docente, toda vez que esta permite el cambio en las concepciones que tienen los profesores acerca de distintos objetos matemáticos, dotándolos en la mayoría de las veces de un trasfondo cultural y contextual que enriquece su quehacer.

Sin embargo, el uso de la HM en la formación conlleva también una serie de asuntos sobre los cuales debemos prestar cuidado, particularmente, D'Amore (2004), citado por Vidal, Quintanilla y Maz, (2010, p. 12), mencionan acerca de la necesidad que tiene el docente de efectuar una "transposición didáctica", de modo que no se convierta en un puro "reproductor" o transmisor de ideas históricas. Esto es, darle un uso significativo a la historia de tal suerte que trascienda su papel anecdótico o informativo. En tal sentido, parece viable y adquiere más relevancia la propuesta que se presenta, entendiendo que la misma se constituye de tareas que ponen en juego los saberes del profesor acerca del límite, lo lleva a reflexiones sobre su disciplina y, en el mejor de los casos, le promueve conocimientos nuevos susceptibles de ser traspuestos en el aula escolar en la que se desenvuelve.

Un tercer aspecto para reseñar en la constitución de estos referentes teóricos es la presencia de antecedentes que se encargaron de abordar el asunto del límite. Vale la pena destacar que este objeto matemático ha sido centro de estudio de innumerables ocasiones desde el campo de la Educación Matemática para analizar asuntos como enseñanza, aprendizaje, errores, dificultades, etc. No obstante, las investigaciones que han hecho uso del límite en la formación de profesores son más limitadas (aunque no por ello menos relevantes). Específicamente, se tomarán los trabajos de Bagni (2005) y Medina (2001) que son bastante oportunos para la ocasión.

MATERIAL Y MÉTODOS

En primer lugar, se comentará sucintamente el trabajo de Bagni (2005). En su propuesta el autor reconoce algunos hitos que a su juicio fueron determinantes en la constitución del límite, estos son: el método de exhaución griego, las discusiones y aportes de Euler sobre el infinito, las disquisiciones entre Newton y Leibniz en la creación del Cálculo y la formalización del concepto con Cauchy y Weierstrass. A la par que advierte estos momentos importantes en la historia, Bagni señala el posible paralelo que se puede establecer entre lo histórico y lo didáctico (desde un punto de vista genético); en el sentido en que el desarrollo de las nociones históricas relativas al límite es análoga a las trasposiciones didácticas (en la perspectiva de Chevallard) que pueden aparecer en las aulas escolares, situación ante la cual el autor se pregunta cuál es el papel del profesor ante esta posibilidad, qué tan útil es establecer estas comparativas y en qué medida los docentes están preparados para orientar estos procesos educativos.

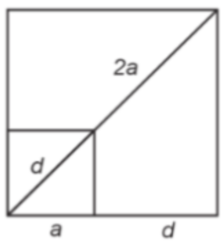
Por otra parte, está la propuesta de Medina (2001), quien a través de una revisión histórica acerca del desarrollo del límite concluye que las complejidades que el concepto tuvo a lo largo de su evolución hasta su formalización, pueden contribuir a explicar la dificultad que comporta su estudio en las aulas escolares, toda vez que la autora reconoce que la historia del límite no fue continua, sistemática u organizada sino que, por el contrario, tuvo rupturas, avances y retrocesos, y obstáculos de todo tipo.

Posterior a la ubicación y revisión de los referentes, tanto teóricos como conceptuales, se procedió a elaborar una reconstrucción propia de la historia del límite; para tal efecto se hizo una revisión bibliográfica de alrededor de 50 documentos (artículos, memorias, tesis, etc.) y se sistematizó la información correspondiente. Una vez realizada dicha interpretación propia de la historia, se identificaron algunos momentos relevantes en el desarrollo del concepto de límite, los cuales se listan superficialmente a continuación:

1. La concepción de lo que es un infinitesimal y cómo esta idea se contrapone con las llamadas "cantidades infinitamente pequeñas".
2. Aplicaciones del límite en el sentido en cómo se utiliza este objeto en temáticas como la Física, la Estadística, la Geometría, etc.
3. El concepto de continuo, como asunto que emerge desde la antigua Grecia y del cual derivan discusiones acerca del infinito, en particular de algunas ideas nacientes de lo que hoy llamamos límite.
4. Dicotomía entre límites e infinitesimales. Este hito alude a que, históricamente, el límite en sus inicios (antes de su formalización) es un objeto "desdeñado" por la academia toda vez que carecía de formalismo, mientras que los "infinitesimales" eran más valorados o apreciados en los círculos matemáticos. No obstante, una vez el límite es formalizado, se invierten los roles.
5. Simbología y notación del límite, aunque este asunto no es un momento histórico específico, sí se reconoce una importancia en las distintas notaciones utilizadas para simbolizar al límite, en tanto varias de ellas permiten inferir algunas interpretaciones que se le daban al objeto en cada época.

A partir de la descripción de los anteriores hitos se elaboraron seis tareas que promovieran el uso de la historia en la formación docente. Se presenta a continuación una de estas tareas, su aplicación y algunos resultados parciales de la tarea:

Se propone la siguiente situación: sea un cuadrado de lado a y diagonal d, constrúyase un nuevo cuadrado de lado $a + d$ y diagonal $2a + d$ (ver figura a continuación). En Excel desarrollar los siguientes ítems:



a. Determinar la razón entre el lado y la diagonal; a continuación, iterar al menos 500 veces en la hoja de cálculo el proceso de construir un nuevo cuadrado de lado $a + d$ y diagonal $2a + d$ Posteriormente determine la razón entre el lado y la diagonal para cada iteración.

b. ¿A qué conjunto numérico pertenece cada uno de los resultados que obtiene al determinar las razones entre lado y diagonal? ¿Qué resulta al realizar indefinidamente el proceso?

c. Tomar dos términos sucesivos de la sucesión y realizar su diferencia; repetir el proceso para las 500 iteraciones. Describa qué ocurre con tales diferencias.

Figura 1. *Tarea propuesta*

Esta tarea se propone para que, a partir de un proceso "indefinido" de iteraciones de razones entre el lado y la diagonal de un cuadrado, el profesor reconozca que se pueden aproximar números (un irracional para el caso particular de esta tarea) a través de sucesiones, y que logre expresar esta relación a partir de su noción de límite y con base en las preguntas que se proponen. Aquí es importante mencionar que las tareas no persiguen evaluar si el profesor reconoce y maneja la definición "*épsilon - delta*" (como se suele denominar a la acepción moderna), sino más bien ahondar en su comprensión sobre la noción.

La tarea fue propuesta en el marco de un curso sobre Historia de las Matemáticas a un grupo de 20 estudiantes, que cursan un pregrado para ser profesores de matemáticas escolares y se les solicitó enviar de forma digital un documento dando respuesta a las preguntas, además de la hoja de cálculo en la que realizaron las iteraciones y las diferencias.

A partir de los resultados obtenidos por parte de los participantes, se identificaron afirmaciones, argumentos y razonamientos en general que son relevantes por cuanto parecen apuntar a la dirección formativa que buscaba la tarea. Estos resultados fueron sistematizados y categorizados como se lista a continuación:

1. Sobre los errores y obstáculos para resolver la tarea
2. Sobre los usos del límite
3. Sobre otros saberes matemáticos relacionados
4. Sobre el software y sus posibilidades

Enseguida se describirán en detalle y se mostrarán algunos de los resultados obtenidos para cada una de estas. Sin embargo, antes cabe mencionar que, por un parte estas categorías son de autoría propia y constituyen una versión preliminar, la cual se espera pueda ser mejorada a medida que se vaya poniendo a prueba más veces la tarea. Por otra parte, reseñar que la clasificación se pensó para atender a las evidencias de esta tarea, pero que en lo posible también sean lo suficientemente genéricas como para lograr usarlas en las demás tareas.

1. Sobre los errores y obstáculos para resolver la tarea[1]:

En esta categoría se incluyen los aportes de los estudiantes que permiten inferir la presencia de conocimientos asociados al tema, pero que eventualmente son utilizados de forma descontextualizada o descuidada y conllevan a errores a la hora de su resolución.

Hay dos elementos muy recurrentes en esta categoría; el primero referido a algunos estudiantes quienes asumen equívocamente que los números que arroja el archivo de Excel cuando se solicita hacer la razón entre diagonal y lado, son irracionales. No es difícil imaginar que lo afirman dado que la sucesión converge a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Sin embargo, al hacerlo ignoran el hecho de que los números del *software* no son más que aproximaciones del valor real; por ejemplo, la siguiente respuesta de una estudiante a la primera pregunta del literal b:

> Este número pertenece al conjunto numérico de los números irracionales ya que hace referencia a $\sqrt{2}$, pues es un numero con infinitos números decimales.

Figura 2. *Respuesta de Camila*

Como se observa, es explícita la afirmación sobre lo irracional, pero además se justifica en que los números (que aparecen en Excel) tienen infinitas cifras decimales (llama la atención que no haga referencia al periodo de estas).

El segundo elemento que apareció de forma constante en esta categoría es que los estudiantes asumieron, desde un inicio, que la diagonal de la figura debía ser igual al producto entre el lado y raíz cuadrada de dos, posiblemente debido al fuerte arraigo que tienen en relación con el teorema de Pitágoras, no obstante que en la aplicación de la tarea se aclaró que el lado y la diagonal podían ser números naturales cualesquiera. Por ejemplo:

[1] Las definiciones que se adoptan para errores, dificultades y obstáculos son las expuestas en Palarea (1999).

> Dado que tenemos un cuadrado, entonces por el teorema de pitágoras, la diagonal d, viene dada por la expresión $d = \sqrt{2}a$ y como esto se cumple para cualquier cuadrado, entonces la razón entre el lado y su diagonal es $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Figura 3. *Respuesta de Fito*

Donde se observa que, a partir de asumir esta relación aritmética, Fito concluye -desde su perspectiva- que el problema está resuelto. En la misma dirección estuvo Sofia:

> Es un número irracional, dado que se puede encontrar que al colocar un cuadrado cuya medida es igual a a(siendo a un número natural positivo), su diagonal es igual a $\sqrt{2}a$, es decir que puedo reescribir a d como $\sqrt{2}a$, además sé que $d_n = l_{n-1} + l_n$, esto quiere decir que para la segunda iteración sería el lado del cuadrado $a + \sqrt{2}a$ y su diagonal $2a + \sqrt{2}a$, para la tercera iteración el lado del cuadrado $3a + 2\sqrt{2}a$ y su diagonal $4a + 3\sqrt{2}a$ y así sucesivamente…

Figura 4. *Respuesta de Sofía*

Quien utiliza la relación $a = d\sqrt{2}$ para establecer las siguientes iteraciones de la tarea.

2. Sobre los usos del límite

Como era de esperar, en la resolución de la tarea el límite se manifestó de forma implícita o explícita por parte de los estudiantes a la hora de escribir algunos de sus planteamientos. Para ilustrar esta idea se tienen, por ejemplo, los siguientes casos:

> Al parecer, al realizar indefinidamente el proceso, la razón entre la diagonal y el lado del cuadrado se aproxima al valor numérico de $\sqrt{2}$. Cuando la iteración tiende a infinito, se podría pensar que la diagonal del cuadrado se está dividiendo en infinitos segmentos de una longitud aproximada a $\sqrt{2}$, ya que:"
>
> $$\frac{d}{l} \approx \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{\sqrt{2}} \approx l$$

Figura 5. *Respuesta de Andrés*

> R// Los números obtenidos de estas razones son números racionales porque la división entre dos números racionales es otro número racional. En este caso, la fracción que representa los decimales obtenidos, a partir de la primera iteración, es $\frac{5}{7}$. Dónde 5 y 7 son números racionales. En la medida que se repite el proceso, esta razón se acerca a su valor teórico: $\frac{L}{L * \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sim 0,07071 \ldots$, donde L el lado del cuadrado y $L * \sqrt{2}$, su diagonal. Además como esta es la razón entre un número entero y uno irracional, su resultado es un número irracional. En otras palabras, $\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$..

Figura 6. *Respuesta de Carlos*

Aunque para los efectos de este documento no anexamos todas las evidencias recolectadas, con las anteriores se observan términos claves cuando se piensa en el límite, como por ejemplo "aproximarse por izquierda y derecha", "tender hacia…", "acercarse al valor…", etc., asuntos que, como se mencionó, parecen indicar una presencia tácita del límite, salvo en la figura 6 donde su uso es explícito.

3. Sobre otros saberes matemáticos relacionados:

En la resolución de la tarea los estudiantes en general advirtieron que estaban aproximándose a un número irracional a partir de una sucesión de racionales, a algunos este hecho les llamó la atención y quisieron justificarlo de una manera más formal, para lo cual aludieron a distintos saberes matemáticos que han desarrollado a lo largo de su formación profesional inicial. Son precisamente estos "otros saberes" los que configuran la presente categoría.

Dentro de esos conocimientos no necesariamente relacionados de forma directa con el límite, los estudiantes aludieron al Álgebra lineal para establecer un sistema de ecuaciones a partir de las sucesiones y para el cual lograran encontrar su única solución, también se hizo presente el conocimiento aritmético en el sentido de identificar características de los conjuntos numéricos de racionales e irracionales para lograr diferenciarlos, así mismo hubo algunos aportes desde la Geometría con el fin de analizar la inconmensurabilidad del lado y la diagonal del cuadrado propuesto desde una perspectiva sintética. A continuación, un ejemplo de lo comentado:

> Cuando se hace el proceso de la iteración de las razones, al principio se puede observar que son decimales finitos no periódicos, por ende, pensé que era racionales tomando en cuenta que en Excel las razones muestran 14 decimales. Sin embargo, en una calculadora online se llega a visualizar que a pesar de que desde la iteración 20 (Figura 1), las razones aparentan ser iguales, los decimales después de la posición 16 cambian (Figura 2 y 3).

Figura 7. *Respuesta de Paula.*

Paula, como se ve, alude a sus nociones sobre los números decimales y pretende contrastar la información del Excel con una calculadora digital, a fin de poder establecer si el número es periódico o no.

4. Sobre el software y sus posibilidades

En esta categoría se decidió incluir aquellos aportes que pusieron de manifiesto asuntos sobre el *software* empleado (Excel o en general una hoja de cálculo), como por ejemplo su potencia, sus limitaciones y las posibilidades que tiene un programa de validar afirmaciones matemáticas. La categoría tiene sentido en el marco del conocimiento especializado del profesor, toda vez que la utilización de *software* es cada vez más evidente y necesaria en las aulas y los usos, así como reflexiones que el docente haga de estos, constituyen un elemento valioso para su quehacer como profesional. Frente a esta categoría, se muestran a continuación algunas respuestas de los futuros profesores.

> Esto se ve reflejado en la forma en que sus diferencias son cada vez más imperceptibles, hasta el punto en que el propio software se ve desbordado y muestra una diferencia nula incluso antes de las primeras 30 iteraciones"

Figura 8. *Respuesta de Sebastián.*

Sebastián, reconoce las limitaciones del programa y cómo estas afectan los resultados matemáticos que obtiene y las inferencias que sobre estos podría hacer. Caso similar al siguiente:

> Cada iteración genera un término mayor que el anterior, por lo que llegado a cierto punto el cálculo de la multiplicación llega a ser complejo hasta para el *software*, es de esperar que la iteración cuyo número sea medianamente alto presente un error que se acumulará al sucesor, y esto también impactará en la razón. Este último llega a ser ínfimo, casi despreciable.

Figura 9. *Respuesta de Natalia*

Por su parte, Natalia no solo reconoce las restricciones del *software,* sino que además advierte la presencia de lo que ella denomina un "error" que puede afectar a los resultados, aunque sea de forma mínima.

RESULTADOS

En un primer momento vale destacar que las respuestas obtenidas a la tarea propuesta son de una diversidad tal que obligan a reflexionar acerca de la complejidad que comporta el Conocimiento Especializado del Contenido, pues el estudio de estos saberes específicos del profesor de Matemáticas no parece ser un asunto que vaya en una sola dirección ni tampoco que se deba abordar desde un solo ángulo. Haber logrado establecer algunas categorías de análisis para las respuestas, aunque sean de forma preliminar, permite afirmar que la riqueza obtenida de la actividad es tal que su revisión precisa de todo un marco teórico el cual se espera poder perfilar en el futuro.

Sin embargo, cabe señalar que la complejidad intrínseca del SCK, aunque se devela en este trabajo en particular no es precisamente un descubrimiento del mismo, toda vez que otros autores recientemente han planteado enfoques para estudiar la formación del profesor, en los cuales ese conocimiento especializado ocupa el lugar central (Escudero, 2015). Así las cosas, este trabajo lo que logra es que emerja de forma natural la reflexión acerca de la importancia de esos saberes específicos y que esa emergencia se produzca en el contexto particular en el que se desarrolló la aplicación de la tarea.

Por otra parte, aunque en el desarrollo los participantes no sabían que la actividad estaba asociada con asuntos históricos de las Matemáticas (lo cual se refleja en sus respuestas, ninguna aludió a algún aspecto de la historia) lo cual quizás habría enriquecido más la situación, lo cierto es que su realización confirma la eficacia de la HM como una fuente muy amplia de potenciales recursos que pueden ser llevados al aula, en este caso al aula en la que se forma el profesor. Se espera poder seguir ahondando en el tema y aportando en esa dirección de trabajo que parece cada vez más constituirse como un elemento necesario en la formación docente.

DISCUSIÓN

Finalmente, comentar que la aplicación de la tarea no solo puso de manifiesto las bondades de la HM en la educación del profesor, ni los asuntos más relevantes y aspectos complejos del SCK; también sirvió, sin querer, para identificar errores y obstáculos que persisten en los maestros que están en formación (por ejemplo, se advirtió que tienen dificultades para definir formalmente qué significa inconmensurabilidad, número racional, etc.), asunto que debe llamar la atención en tanto permite reconocer focos de acción para que el formador de profesores los siga abordando desde diferentes frentes, y más aún para reflexionar acerca de la educación que tiene o debe tener el formador de profesores de Matemáticas.

REFERENCIAS

Bagni, & G. (2005). The historical roots of the limit notion: cognitive development and the development of representation registers. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education*, 453-468.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Clark, K. (2012). The influence of solving historical problems on Mathematical Knowledge for Teaching. *History and Pedagogy of Mathematics*, 211-219.

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Universidad de Huelva (tesis doctoral), Huelva.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 131-143.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas.* Cali: Universidad del Valle (Tesis doctoral).

Guacaneme, E., & Mora, L. (2012). La educación del profesor de Matemáticas como campo de investigación. *Revista PAPELES, 4*(7), 102-109.

Jankvist, U. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235-261.

Medina, A. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Tecne, Episteme y Didaxis, 9*(1), 44-59.

Palarea, M. d. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 3-28.

Rendón, C. (2017). Diseño de tareas mediadas por la historia del concepto de límite dirigidas a la formación del profesor de Matemáticas. Bogotá D.C: Universidad Pedagógica Nacional (tesis de maestría).

Vidal, R., & Salinas, M. (2011). Algunas ideas del profesorado sobre aspectos relacionados con la instrucción del concepto de límite funcional. *Investigación en Educación Matemática XV* (págs. 587-598). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.

Vidal, R., Quintanilla, M., & Maz, A. (2010). La Historia de la Matemática: Un valioso componente para la formación del profesorado de matemáticas. *Revista Chilena de Educación Matemática RECHIEM, 5*(1), 7-21.